Problema n. 8

0.42 moli di un gas ideale biatomico si trovano dentro un cilindro aventi pareti adiabatiche, di volume $V = 10 \quad \ell$, alla pressione $p = p_{atmosferica}$. Un piccolo oggetto solido, a temperatura $T_0 = 580 \quad K$, viene immesso molto rapidamente nel cilindro; il suo volume è trascurabile rispetto a *V*. Una volta raggiunto l'equilibrio termico alla temperatura T_1, tale oggetto viene rimosso, sempre molto rapidamente e si lascia muovere una delle basi del cilindro fino a che il gas raggiunge uno stato di equilibrio alla pressione *p*, che all'esterno è rimasta costante, compiendo un lavoro $L = 705.4 \quad J$.

Determinare la capacità termica del piccolo oggetto.

Soluzione

Nella situazione di partenza il gas si trova ad una temperatura ricavabile dalla $p_i V_i = nRT_i$

dove $p_i = p = 1$ atm $\quad V_i = V = 10\,\ell \quad R = 0{,}0821 \; \frac{\ell \times atm}{K}$

$$T_i = \frac{1 \times 10}{0{,}42 \times 0{,}0821} = 290 \; K$$

Poiché il piccolo oggetto ha una temperatura $T_0 \neq T_i$ si avrà uno scambio di calore con il gas.

$$Q_{\text{ceduto dal solido}} = C\,(T_1 - T_0)$$ dove C è la capacità termica del piccolo solido

in cui T_1 è la temperatura di equilibrio raggiunta (ovviamente $T_i < T_1 < T_0$).

Per determinare T_1 considero che tutto il calore ceduto dal solido è assorbito dal gas, in quanto il sistema (pistone + cilindro) è costituito da tutte pareti adiabatiche. Poiché una volta tolto il solido e lasciato muovere il pistone il gas compie il lavoro L sfrutto anche questa informazione.

Complessivamente il gas compie due trasformazioni:

a) Il gas riceve calore, dal solido, a $V=$ costante. Scrivo il 1° p.d.T.

$$Q_a = L_a + \Delta U_a = \Delta U_a \qquad (\text{poiché } V=\text{cost} \Rightarrow L_a = 0)$$

$$\Delta U_a = n c_V \Delta T_a = n c_V (T_1 - T_i) \Rightarrow Q_a = n c_V (T_1 - T_i)$$

$$Q_a = - Q_{solido} \qquad (\text{essendo } Q_{tot} = 0 \quad Q_a + Q_{solido} = 0)$$

$$- C(T_1 - T_0) = n c_V (T_1 - T_i)$$

$$C = - n c_V \frac{T_1 - T_i}{T_1 - T_0} \qquad \text{dove } c_V = \frac{5}{2} R$$

b) Occorre conoscere T_1 per calcolare C. Sfrutto allora la seconda trasformazione che è una espansione adiabatica (a pressione esterna costante)

In tale espansione il gas fornisce il lavoro $L = p \Delta V \equiv L_b$

$$L_b = p (V_2 - V_1) \qquad \text{dove } V_1 \equiv V \quad \text{e } V_2 = \text{Volume del gas al termine della espansione}$$

Si può ottenere $V_2 = V_1 + \dfrac{L}{p}$

che risulta essere $V_2 = 10 * 10^{-3} + \dfrac{705,4}{1,013 \times 10^5} = 1,7 \times 10^{-2}\ m^3$

Sempre dal 1° p.d.T. si ha (pareti adiabatiche)

$$Q_b = 0 = L_b + \Delta U_b \Rightarrow$$

$$L_b = - \Delta U_b = - n c_V (T_2 - T_1)$$

Essendo il gas ideale si può scrivere $p_2 V_2 = n R T_2$

$$T_2 = \frac{p_2 V_2}{n R} = \frac{p V_2}{n R} = \frac{1,013 \times 10^5 \times 1,7 \times 10^{-2}}{0,42 \times 8,31} = 492,4\ K$$

Si può quindi calcolare la T_1 dall'espressione di L_b

$$T_1 = T_2 + \frac{L_b}{n c_V} = T_2 + \frac{L}{\frac{5}{2} R n} = 492,4 + \frac{705,4}{\frac{5}{2} \times 8,31 \times 0,42} = 573,2\ K$$

Infine $C = -0,42 \times \dfrac{5}{2} \times 8,31 \times \dfrac{573,2 - 290}{573,2 - 580} = 363,4\ J/K$