Problema N. 2

Oscillazioni libere smorzate

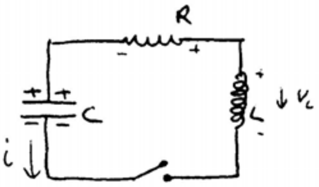
Un condensatore avente capacità $C = 10\ \mu F$ viene caricato mediante una batteria avente una f.e.m. = 1000 V. Successivamente il condensatore viene isolato e poi collegato in serie ad un induttore avente una induttanza $L = 1\ mH$ (vedi figura, in cui l'interruttore è aperto)

Si supponga ora che la resistenza ohmica complessiva presente nel circuito non sia trascurabile, ma abbia un valore $R = 18\ \Omega$ ((oppure $R = 0{,}1\ \Omega$))

All'istante t = 0 si chiuda, istantaneamente, l'interruttore.

Si studi l'andamento della corrente in questo caso.

$\Sigma ddp = 0$ oppure $\Sigma ddp = \Sigma fem \Rightarrow Ri + \frac{q}{C} = V_L = -L\frac{di}{dt}$



$-V_L + V_C + V_R = 0$ $\qquad V_C = \frac{q}{C} \quad V_R = Ri \quad V_L = -L\frac{di}{dt}$

$+L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} + Ri = 0$ $\qquad$ Ma $i = \frac{dq}{dt}$

per cui si ottiene

$$(a) \qquad L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0$$

oscillatore armonico smorzato

equivalente a $m\ddot{x} + \beta\dot{x} + Kx = 0$

si ha la corrispondenza

$L \rightarrow m$

$R \rightarrow \beta$

$\frac{1}{C} \rightarrow K$

La soluzione è ottenuta dopo aver analizzato l'eq. algebrica caratteristica ed il suo discriminante Δ

$$L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C} = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}}{2L} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

N.B.:

L'equazione (a) è equivalente alla:

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + Kx = 0$$

che valeva, in meccanica, per l'oscillatore smorzato

$\boxed{1^\circ \text{ caso} \quad R = 18\,\Omega}$

Calcolo $\Delta = R^2 - \frac{4L}{C}$ e trovo $\Delta < 0$ la soluzione dell'eq. differenziale è allora

$$q(t) = Q_1 e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad \text{con} \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = 4{,}36 \times 10^3 \text{ rad/s}$$

per trovare Q_1 e φ_1 uso le condizioni al contorno $q(0) = Q_I$

$i(0) = 0$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 1{,}44 \times 10^{-3}\ s \quad \text{pseudoperiodo}$$

$$i(t) = -\frac{R}{2L} Q_1 e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \omega_1 Q_1 e^{-\frac{R}{2L}t} \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$\tau = \frac{L}{R} = 5{,}56 \times 10^{-5}\ s$

(τ è il tempo di decadimento)

$\tau < T_1$ <u>non si notano oscillazioni !!</u>

$$\begin{cases} Q_1 \cos\varphi_1 = Q_I \\ -\frac{R}{2L} \cancel{Q_1} \cos\varphi_1 - \omega_1 \cancel{Q_1} \sin\varphi_1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{tg}\,\varphi_1 = -\frac{R}{2L\omega_1} = -2{,}064 \implies \varphi_1 = -1{,}12 \text{ rad} \cong -64^\circ$$

$\cos\varphi_1 = 0{,}436$ $\qquad Q_1 = \frac{Q_I}{\cos\varphi_1} = 2{,}29 \times 10^{-2}$ Coulomb

$$q(t) = 2{,}29 \times 10^{-2} e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega_1 t - 1{,}12)$$
$$= 2{,}29 \times 10^{-2} e^{-9000\,t} \cos(4{,}36 \times 10^3\, t - 1{,}12)$$

$\boxed{2^\circ \text{ caso}}$

<u>Se fosse stato $R = 0{,}1\,\Omega$</u> si avrebbe avuto $\tau = 10^{-2}\ s$

$\omega_1 = 9999{,}9$ rad/s ($< \omega_0$ ma circa $= \omega_0$)

$T_1 \cong 6{,}28 \times 10^{-4}\ s$ ed essendo $\tau \gg T_1$ <u>si sarebbero notate molte oscillazioni</u>

Si avrebbe, usando le condizioni iniziali come fatto sopra:

$\text{tg}\,\varphi_1 \simeq -\frac{0{,}1}{20} \Rightarrow \varphi_1 \simeq 0 \qquad \cos\varphi_1 \simeq 1 \longrightarrow Q_1 \simeq Q_I$

$q(t) = 10^{-2} e^{-50t} \cos 10^4 t$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 = 10^4 \text{ rad/s}}$$