Problema N. 26

Una sorgente ***S*** (considerata puntiforme ed isotropa) emette nel vuoto un fascio di onde elettromagnetiche, monocromatiche (lunghezza d'onda λ) e sferiche, verso uno schermo ***A*** (distante ***h*** dalla sorgente ***S***) su cui si trovano due fenditure puntiformi ***M*** ed ***N***, identiche, simmetriche rispetto all'asse *x*, distanti *d* fra loro.
A distanza *D* dallo schermo ***A*** si trova un secondo schermo ***B***, parallelo ad ***A***.
Si supponga che inizialmente la fenditura ***N*** sia "chiusa" (in modo che l'onda elettromagnetica proveniente da ***S*** non possa attraversarla).
Nota l'ampiezza $\boldsymbol{E_0}$ del campo elettrico dell'onda elettromagnetica subito dopo la fenditura ***M***, si determini:

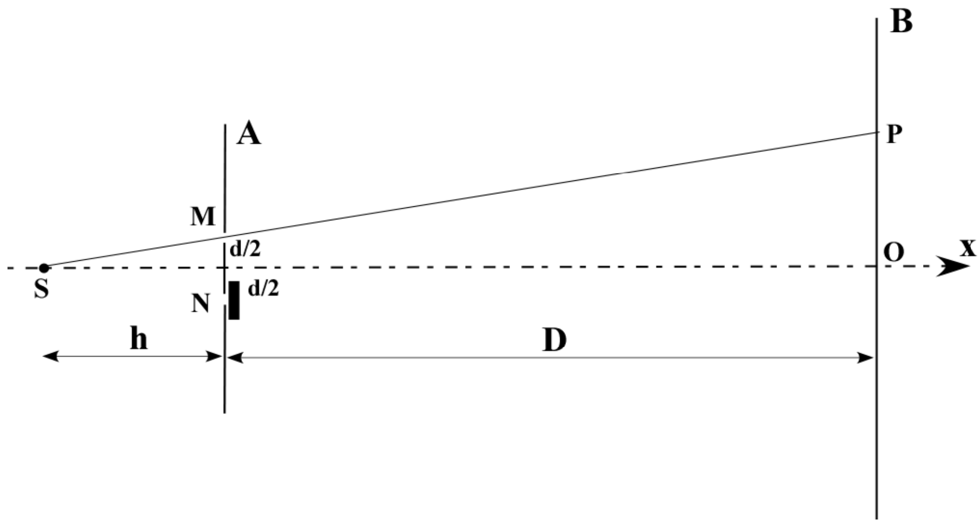
1) L'ampiezza e l'intensità media dell'onda nel punto ***P*** dello schermo ***B***.

Si supponga ora di "aprire" anche la fenditura ***N***. In tale situazione, si determini:

2) Quanti massimi di interferenza si trovano nel tratto **OP**, sullo schermo ***B***;
3) Il rapporto tra le intensità dell'onda in ***P*** e in ***O***.

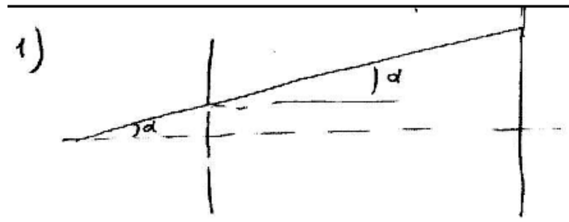
4) <u>Solo dopo aver risolto il problema (soluzione letterale)</u>, si considerino i seguenti valori per la soluzione numerica:

$E_0 = 10^{-4}\,\frac{V}{m}$;
h = 10 cm;
d = 2 mm;
D = 10 m.
$\lambda = 5\ 10^{-7}$ m.



Soluzione

1)



$$\cos\alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}}$$

$$\overline{MP} = \frac{D}{\cos\alpha} = \frac{D}{h}\sqrt{h^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

Poiché le onde secondarie nate in M sono sferiche si ha:

$E = \frac{E_0}{r}$ in un punto distante r da M.

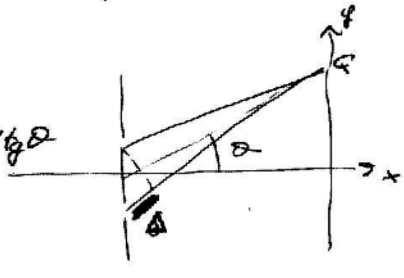
Quindi $$E_P = \frac{E_0}{\overline{MP}} = \frac{h}{D}E_0\frac{1}{\sqrt{h^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}}$$ $$\langle I_P\rangle = \frac{1}{2Z_0}E_P^2$$

Z_0 è l'impedenza del vuoto (circa uguale a quella dell'aria)

2) Si ha $$\frac{\overline{OP}}{\frac{d}{2}} = \frac{D+h}{h}$$ (triangoli simili)

Pertanto $$\overline{OP} \equiv y_P = \frac{d}{2}\left(\frac{D+h}{h}\right)$$

{ si può anche usare la $\overline{OP} = \frac{d}{2} + \overline{MP}\sin\alpha$
con $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{h^2}{h^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}}$ }



I max di interferenza si hanno nei punti Q per i quali $\Delta = m\lambda = d\sin\theta \simeq d\,\mathrm{tg}\,\theta$

$\Delta = d\frac{y_Q}{D} = m\lambda \qquad y_Q = \frac{D}{d}m\lambda$

La larghezza delle frange è

$$\Delta\Delta = \frac{D}{d}(m+1)\lambda - \frac{D}{d}m\lambda = \frac{D}{d}\lambda$$

Il numero di massimi tra O e P è quindi dato dall'intero minore di

$$\frac{y_P}{\Delta\Delta}$$

3) $I_P = 4\langle I_M \rangle \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$ mentre in O si ha $I_O = 4\langle I_M \rangle$

Pertanto $\frac{I_P}{I_O} = \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$

dove $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\alpha = \frac{\pi d}{\lambda}\sqrt{1 - \frac{l^2}{l^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}} =$

$= \frac{\pi d}{\lambda} \frac{d/2}{\sqrt{l^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}}$

Con i dati numerici si ottiene:

1)

$E_P \cong 10^{-5} \frac{V}{m}$ $\qquad I_P \simeq \left(\frac{1}{2} 10^{-10}\right)/377 \simeq 1.33 \times 10^{-13}\ W/m^2$

essendo $Z_0 \simeq 377\ \Omega$

2) Si ottiene $\overline{OP} \simeq 0.101\ m$

$\Delta s \simeq 2.5 \times 10^{-3}\ m$

numero max tra O e P $= 40$

3) $\frac{I_P}{I_O} \cong 0.34$