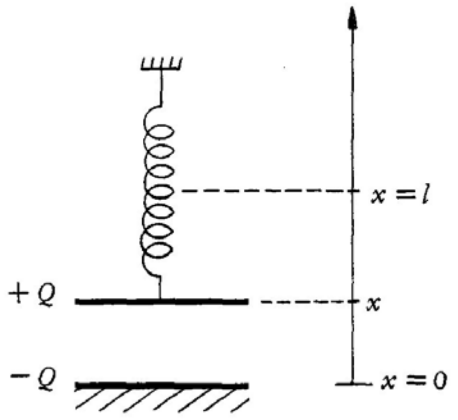
Problema N°. 16

Esercizio n. I.4.3 - Un condensatore ad armature piane e parallele, ciascuna di superficie A e massa m, viene caricato con una carica Q e poi le armature vengono isolate. Un'armatura è fissa, mentre l'altra è collegata con una molla di costante elastica k. La distanza tra l'armatura inferiore e la posizione di riposo della molla è l. Supponendo che l'armatura mobile venga lasciata andare da ferma dalla posizione in cui l'allungamento della molla è nullo ($x = l$), calcolare la minima distanza raggiunta tra le armature durante le oscillazioni. Si suppone che tutto stia in un piano orizzontale e che tra le armature del condensatore ci sia aria.



$Q = 5.2\ 10^{-7}$ C
$l = 30$ cm
$k = 8$ N/m
$A = 0.04\ \mathrm{m}^2$
$m = 0.05$ Kg

Soluzione - Seguendo un procedimento già usato altre volte partiamo dall'espressione dell'energia elettrostatica del condensatore evidenziando la carica Q, che resta in ogni caso costante, e ricordando che il condensatore è piano:

$$W_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\epsilon_0 A}x.$$

Oltre a questa, nel caso presente, va considerata l'energia potenziale elastica della molla ossia (per una generica elongazione $l - x$):

$$W_m = \frac{1}{2}k(l - x)^2.$$

Una volta liberata l'armatura mobile, il sistema si metterà ad oscillare avanti e indietro sicché sarà in generale presente anche l'energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2.$$

L'energia totale del sistema sarà ad ogni istante:

$$W_t = W_e + W_m + T.$$

Tale energia comunque si conserva, se prescindiamo dagli attriti e dall'irraggiamento di onde elettromagnetiche da parte delle cariche accelerate sull'armatura mobile, e manterrà pertanto il valore iniziale il quale è

$$W_t = W_0 = W_{ei} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\epsilon_0 A}l.$$

All'inizio infatti la velocità è nulla e la molla è a riposo.

La minima distanza x_m fra le armatura si avrà quando l'armatura mobile sarà nella posizione di massima ampiezza di oscillazione, in procinto di invertire il proprio moto e pertanto ancora a velocità nulla. In tale istante l'energia totale è

$$W_t = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\epsilon_0 A}x_m + \frac{1}{2}k(l - x_m)^2.$$

Uguagliando questo valore a quello iniziale

$$\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\epsilon_0 A}x_m + \frac{1}{2}k(l - x_m)^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\epsilon_0 A}l$$

si può ricavare x_m:

$$x_m = l - \frac{Q^2}{\epsilon_0 A k}.$$