Problema N°. 18

Tra le armature (di area S e distanti d) di un condensatore piano è inserito un dielettrico omogeneo, avente costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = a > 1$, che riempie l'intero spazio interno. Il condensatore viene caricato in modo che la d.d.p. ai suoi capi sia V_E e, successivamente isolato.

1. Determinare l'energia immagazzinata nel condensatore.

In seguito il dielettrico viene sostituito con un altro, non omogeneo, avente costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = a + bx$ dove x è la distanza di un punto generico del dielettrico dall'armatura che porta la carica positiva e b>0.

2. Trovare la variazione di energia immagazzinata nel condensatore rispetto alla situazione con dielettrico omogeneo.

Soluzione

1) La capacità del condensatore (con dielettrico omogeneo) è:

$$C_1 = \varepsilon \frac{S}{d} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d} = a\,\varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

e l'energia immagazzinata è:

$$W_1 = \frac{1}{2} C_1 V_E^2 = \frac{1}{2} a\,\varepsilon_0 \frac{S}{d} V_E^2$$

La carica sulle armature del condensatore vale

$$Q_1 = C_1 V_E = a\,\varepsilon_0 \frac{S}{d} V_E$$

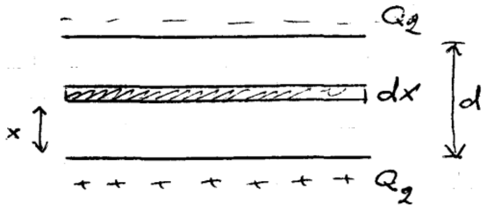
2) Nella nuova situazione varia la capacità del condensatore ma non la carica sulle armature (condensatore isolato). Quindi $Q_2 = Q_1$

Naturalmente sarà $V \neq V_E$.

Per l'energia immagazzinata avrò

$$W_2 = \frac{1}{2} C_2 V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q_2^2}{C_2} = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{C_2}$$

Per calcolare W_2, poiché Q_1 è nota $\left(= a\,\varepsilon_0 \frac{S}{d} V_E\right)$, occorre trovare C_2.



Suddivido il condensatore in infiniti condensatori, posti in serie, di area S e spessore dx considerando lo straterello di dielettrico a distanza x dall'armatura positiva. La capacità corrispondente a tale straterello è

$$dC = \varepsilon \frac{S}{dx} \qquad \text{dove } \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r = \varepsilon_0 (a + bx)$$

Per i condensatori in serie la capacità equivalente è data da $\frac{1}{C_{eq}} = \sum \frac{1}{C_i}$

Nel caso nostro ho infiniti condensatori in serie, ciascuno di capacità infinitesima dC.

Si avrà allora

$$\frac{1}{C_{eq}} \equiv \frac{1}{C_2} = \int_0^d \frac{dx}{\varepsilon S} = \int_0^d \frac{dx}{S\varepsilon_0(a+bx)} = \frac{1}{\varepsilon_0 S}\int_0^d \frac{dx}{a+bx} =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0 S b}\Big[\ln(a+bx)\Big]_0^d = \frac{1}{\varepsilon_0 S b} \ln \frac{a+bd}{a}$$

Quindi $C_2 = \dfrac{\varepsilon_0 S b}{\ln \frac{a+bd}{a}}$

e $W_2 = \dfrac{1}{2} \dfrac{(C_1 V_E)^2}{\varepsilon_0 S b} \ln \dfrac{a+bd}{a}$

La variazione di energia immagazzinata sarà quindi:

$\Delta W = W_2 - W_1$

Sostituendo si ottiene:

$$\Delta W = \frac{1}{2} a\, \varepsilon_0 \frac{S}{d} V_E^2 \left[\frac{a}{bd} \ln \frac{a+bd}{a} - 1\right]$$