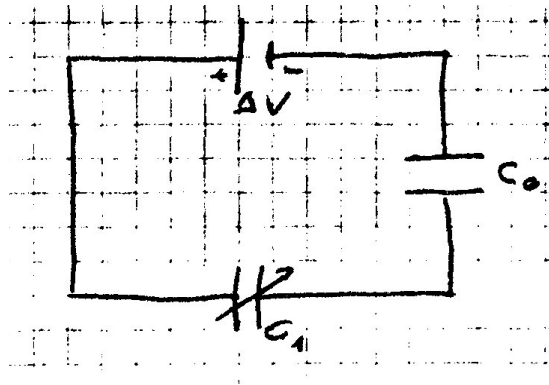


Problema N° 20

Sia data una batteria avente una forza elettromotrice $\Delta V = 100$ Volt applicata ai capi di due condensatori C_0 e C_1 posti in serie. La capacità C_0 vale $C_0 = 5 \mu\text{F}$ mentre C_1 è una capacità variabile tra 1 e $100 \mu\text{F}$.

1. Calcolare la capacità totale del circuito quando $C_1 = 10 \mu\text{F}$;
2. Calcolare quanto deve valere la capacità C_1 affinché l'energia immagazzinata in essa sia massima.



Soluzione

1) Poiché i due condensatori sono in serie si avrà

$$\frac{1}{C_t} = \frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_1} \Rightarrow C_t = \frac{C_0 C_1}{C_0 + C_1} = \frac{5 \cdot 10 \times 10^{-12}}{(5+10) \times 10^{-6}} = 3,33 \mu\text{F}$$

2) L'energia elettrostatica immagazzinata vale, per un generico condensatore

$$U = \frac{1}{2} C V^2$$

Per C_1 pertanto ha $U_1 = \frac{1}{2} C_1 V_1^2$

Occorre esprimere V_1 in funzione di altre grandezze (note)

Si ha che $q_0 = q_1$ (condensatori in serie) per cui $C_1 V_1 = C_0 V_0$

$$C_1 V_1 = C_0 (\Delta V - V_1) \Rightarrow C_1 V_1 + C_0 V_1 = C_0 \Delta V \quad V_1 = \frac{C_0}{C_0 + C_1} \Delta V$$

$$\text{Pertanto} \quad U_1 = \frac{1}{2} C_1 \frac{C_0^2}{(C_0 + C_1)^2} (\Delta V)^2$$

Per trovare il max di U_1 derivo rispetto C_1 e pongo $\frac{dU_1}{dC_1} = 0$

$$\frac{dU_1}{dC_1} = \frac{1}{2} C_0^2 (\Delta V)^2 \frac{d}{dC_1} \left[\frac{C_1}{(C_0 + C_1)^2} \right] = \frac{1}{2} C_0^2 (\Delta V)^2 \left[\frac{1}{(C_0 + C_1)^2} - 2 \frac{C_1}{(C_0 + C_1)^3} \right] = 0$$

$$\frac{C_0 + C_1 - 2C_1}{(C_0 + C_1)^3} = 0 \Rightarrow \frac{C_0 - C_1}{(C_0 + C_1)^3} = 0 \Rightarrow C_1 = C_0 = 5 \mu\text{F}$$

Per verificare che tale valore corrisponde ad un max verifico che è $\frac{d^2 U_1}{dC_1^2} < 0$