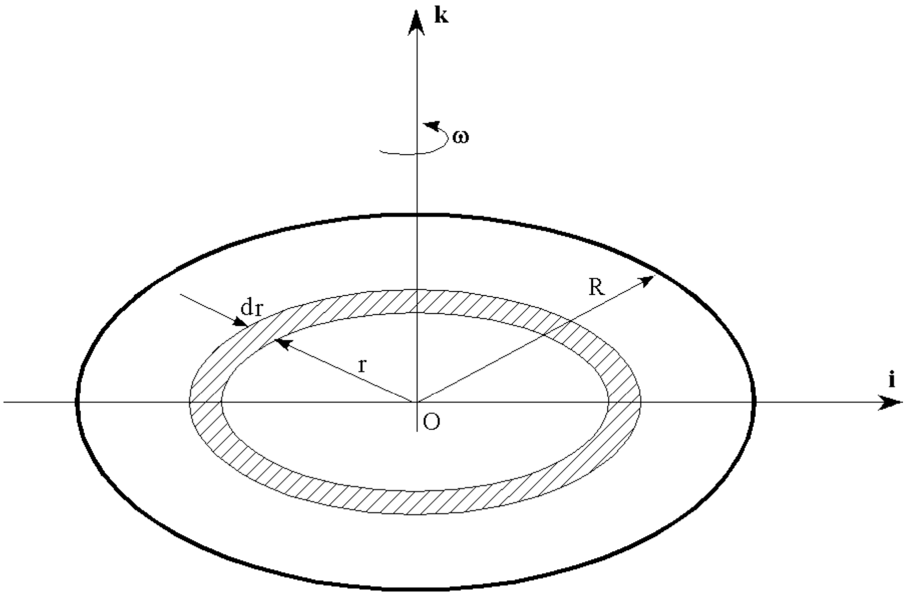
Problema N°. 34

Un disco di raggio R ruota con velocità angolare costante ω attorno ad un suo asse ad esso perpendicolare e passante per il suo centro O. Sopra il disco si trova, distribuita uniformemente, una carica q. Si calcoli:

a) l'intensità del campo di induzione magnetica nel centro O ed in un punto P generico dell'asse **k**, a distanza z da O;
b) il momento di dipolo magnetico del disco.

Soluzione



a) Sulla corona circolare infinitesima compresa tra r e $r+dr$ si trova una carica $dq = \sigma dS = \sigma(2\pi r\, dr) = \frac{2q\, r\, dr}{R^2}$

Ogni carica elementare che si trova su tale dS si muove (ruota) con velocità $v = \omega r = \frac{2\pi}{T} r$ dove T è il periodo di rotazione $\left(T = \frac{2\pi r}{v}\right)$. La carica dq compie una rotazione in un tempo T. Essa quindi equivale ad una corrente $di = \frac{dq}{T} = \frac{v}{2\pi r} dq = \frac{v}{\cancel{\pi r}} \frac{2q\cancel{r}\, dr}{R^2} = \frac{v q\, dr}{\pi R^2} = \frac{\omega q}{\pi R^2} r\, dr$

Pertanto tale corona infinitesima equivale ad una spira circolare, di raggio r, che porta una corrente di.

Essa genera un campo diretto lungo l'asse della spira secondo la relazione $\bar{B} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}} \bar{k}$ con $\begin{cases} a = \text{raggio spira} \\ z = \text{distanza da } O. \end{cases}$

Nel caso in esame tale $\bar{B}$ ha una intensità infinitesima che vale, in un punto dell'asse passante per O e distante z da O:

$$dB = \frac{\mu_0}{2(r^2+z^2)^{3/2}} \left(\frac{\omega q}{\pi R^2} r\, dr \right) r^2 = \frac{\mu_0 \omega q}{2\pi R^2} \frac{r^3\, dr}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

Considerando l'intero disco di raggio R, avrò (pensando di scomporlo in infinite coronache circolari infinitesime)

$$B \equiv \int dB = \frac{\mu_0 \omega q}{2\pi R^2} \int_0^R \frac{r^3\, dr}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

Risolvo l'integrale ponendo, ad esempio $r^2+z^2 = t \Rightarrow$

$$r^2 = t - z^2 \Rightarrow 2r\, dr = dt \Rightarrow (2r\, dr) r^2 = (t - z^2) dt \Rightarrow$$

$$r^3\, dr = \frac{1}{2}(t - z^2) dt \quad e \quad (r^2+z^2)^{3/2} = t^{3/2}$$

$$\begin{cases} r = 0 \Rightarrow t = z^2 \\ r = R \Rightarrow t = R^2 + z^2 \end{cases}$$

$$\int_0^R \frac{r^3\, dr}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{1}{2} \int_{z^2}^{R^2+z^2} \frac{t}{t^{3/2}} dt - \frac{1}{2} \int_{z^2}^{R^2+z^2} \frac{z^2}{t^{3/2}} dt =$$

$$= \left[\frac{R^2 + 2z^2}{(R^2+z^2)^{1/2}} - 2z \right]$$

Pertanto $$B = \frac{\mu_0 \omega q}{2\pi R^2}\left[\frac{R^2+2z^2}{(R^2+z^2)^{1/2}} - 2z\right]$$ campo in un punto dell'asse $\bar{k}$

per $z=0$ si ha il punto O : $$B(0) = \frac{\mu_0 \omega q}{2\pi R}$$

b) Il momento di dipolo magnetico di una spira percorsa da corrente I è $\bar{m} = I S \bar{u}_n$ (dove $\bar{u}_n$ è il versore normale ad S)
Nel nostro caso, la corona infinitesima di raggio r e spessore dr è equivalente ad una corrente di.
L'area delimitata dalla spira (equivalente alla coroncina) è $S = \pi r^2$. Il momento di dipolo di tale coroncina è :

$$d\bar{m} = S\,di\,\bar{k} = \left(\pi r^2 \frac{\omega q}{\pi R^2} r\,dr\right)\bar{k} = \left(\frac{\omega q}{R^2} r^3 dr\right)\bar{k}$$

Il momento di dipolo dell'intero disco è la somma (vettoriale) di tali $d\bar{m}$. Poiché essi sono tutti paralleli ed equiversi si avrà :

$$|\bar{m}| = \int_0^R |d\bar{m}| = \int_0^R \frac{\omega q}{R^2} r^3 dr = \frac{\omega q R^2}{4}$$