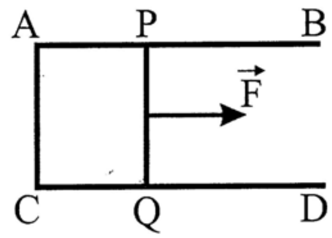
Problema N°. 37



Il circuito di figura è costituito di due conduttori paralleli di resistività trascurabile AB e CD, distanti $D = 10$ cm l'uno dall'altro, collegati da un conduttore fisso AC (anch'esso di resistività trascurabile) e da uno mobile (senza attrito) PQ di resistenza $R = 0{,}5 \cdot 10^{-3}\,\Omega$.
Il circuito è immerso in un campo di induzione magnetica costante, di intensità $B_0 = 10^{-2}$ T, perpendicolare al piano del circuito e diretto verso chi guarda.
Il ramo mobile PQ, inizialmente in posizione coincidente con quella di AC, a cominciare dall'istante $t_0 = 0$ s viene allontano da AC da una forza $\vec{F}$ (parallela ad AB); si osserva che PQ si muove con accelerazione costante, di modulo $a_0 = 1$ cm/s^2.
Si trascuri ogni fenomeno di autoinduzione.

Determinare:

1. il verso in cui circola la corrente nel circuito (giustificare la risposta);
2. l'intensità F_1 della forza applicata a PQ, nell'istante $t_1 = 2$ s, supponendo che la massa del conduttore PQ sia $m = 2$ g.
3. in quanto tempo (iniziando da t_0) nel circuito è stata dissipata, per effetto Joule, un'energia $E_d = 14{,}4 \cdot 10^{-6}$ J.

Soluzione

1) Il flusso concatenato con la linea (chiusa, conduttrice) APQCA cresce per effetto del moto di $\overline{PQ}$ (verso destra in figura). La corrente indotta che nasce produce un campo $\overline{B}$ (indotto) che, per la legge di Lenz, deve tendere a contrastare tale aumento del flusso. Pertanto tale B indotto deve essere orientato nel verso entrante nel foglio (si osservi che il $\overline{B}$ preesistente è uscente dal foglio). Ne consegue che la corrente indotta, che genera il $\overline{B}$ indotto, gira in verso orario in APQCA.

2) Indicando con x la lunghezza CQ (variabile nel tempo), il flusso di $\overline{B}$ concatenato con APQCA è:

$$\phi_B = B\,D\,x(t) \quad \text{Ma} \quad x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 \Rightarrow \phi_B = \frac{1}{2} B D a_0 t^2$$

Per la legge di Faraday $V_\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -BDa_0 t$

Tale f.e.m. produce una corrente

$$I = \frac{V_\varepsilon}{R} = -\frac{BDa_0}{R} t$$

Sul conduttore $\overline{PQ}$, in moto verso destra, agisce una forza (dovuta all'interazione di I con $\bar{B}$) data dalla $\bar{F}_B = i\bar{l}\times\bar{B}$. (Anche su $\overline{AP}$, $\overline{QC}$, $\overline{CA}$ agisce una forza analoga, ma tali conduttori sono fissi). Tale forza ($\bar{B}$ è perpendicolare ad $\bar{l}$) vale

$$F_B = I D B \quad (\text{poiché } |\bar{l}| = D)$$

$$= -\frac{B^2 D^2 a_0}{R} t$$

La forza complessiva agente sul conduttore mobile $\overline{PQ}$ vale $\bar{F} + \bar{F}_B$. Per il II° principio della dinamica:

$\bar{F} = m\bar{a} \implies F_x = m a_x = F + F_B$; poiché $a_x = a_0$ si ha:

$$F = m a_0 - F_B = m a_0 + \frac{B^2 D^2 a_0}{R} t$$

$$F = 2\times10^{-3} \times 1\times10^{-2} + \frac{(10^{-2})^2 \times (0{,}1)^2 \times 10^{-2}}{0.5\times10^{-3}} \times 2 \cong 6\times10^{-5}\ N$$

3) La potenza dissipata per effetto Joule su una resistenza R vale $W_J = R I^2$ e, in questo caso

$$W_J = R\left(-\frac{B D a_0 t}{R}\right)^2 = \frac{B^2 D^2 a_0^2 t^2}{R} \qquad (\text{funzione di } t\,!)$$

L'energia dissipata al tempo t^* è data da (poiché la potenza dipende dal tempo)

$$E_J = \int_0^{t^*} W_J(t)\,dt \implies E_J = \frac{B^2 D^2 a_0^2}{R}\int_0^{t^*} t^2\,dt = \frac{B^2 D^2 a_0^2}{3R} t^{*3}$$

Si ottiene quindi il valore cercato per t^* ponendo $E_J \equiv E_d$

$$t^* = \sqrt[3]{\frac{3 R E_d}{B^2 D^2 a_0^2}} = \sqrt{216} = 6\ s$$