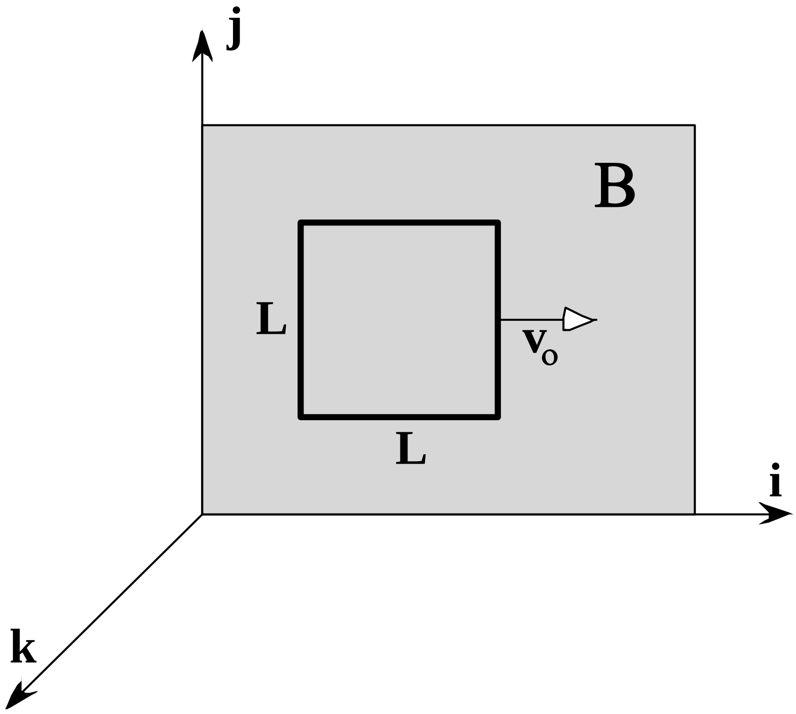
Problema N°. 39

Un circuito rigido quadrato, di lato L = 20 cm, è costituito di un filo di alluminio (resistività $\rho = 2.56\ 10^{-8}\ \Omega$ m) di sezione $S = 4\ mm^2$.

Esso si trova nel piano *xy*, con i lati paralleli ai due assi, ed è immerso (nel vuoto) in un campo di induzione magnetica uniforme $\mathbf{B} = (37.7\ 10^{-2}\ \mathbf{k})$ T, limitato all'area grigia di figura. Il circuito, inizialmente tutto immerso nel campo magnetico, trasla con velocità che viene mantenuta costante $\mathbf{v}_o = (50\ \mathbf{i})$ cm/s.

Calcolare, giustificando:

1) il verso della corrente indotta (orario od antiorario) con riferimento alla figura;
2) l'intensità di tale corrente nel circuito, durante il moto;
3) l'energia totale dissipata nel circuito per effetto Joule;
4) il lavoro effettuato per portare il circuito completamente fuori del campo.



Soluzione

1) Il flusso iniziale concatenato con la spira vale $\phi_0 = L^2 B$. Appena la spira inizia ad uscire dalla zona dove c'è il $\overline{B}$, tale flusso diminuisce. Quando la spira sarà uscita di una quantità x' il flusso concatenato con essa sarà

$$\phi = (L^2 - L x') B \qquad (\text{ovviamente } 0 \le x' \le L)$$

Nella spira nasce una f. e. m. indotta (si noti che $x' = f(t)$):

$$V_\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = B L \frac{dx'}{dt} \qquad \text{Ma } \frac{dx'}{dt} = v_0 \text{ per cui}$$

$V_\varepsilon = B L v_0$ Il circuito (spira) ha una resistenza

$$R = \rho \frac{4L}{S} = 5.12 \times 10^{-3}\ \Omega \qquad \text{Pertanto:}$$

$$I_{indotta} = \frac{V_\varepsilon}{R} \cong 7.36 \ \text{A}$$

2) Tale corrente indotta circola in verso antiorario poiché il campo indotto che essa produce deve contrastare la diminuzione del flusso di $\overline{B}$ concatenato con la spira (il flusso di $\overline{B}$ è uscente dal foglio, cioè $\overline{B}$ ha la direzione ed il verso di $\overline{k}$ in figura)

3) La potenza dissipata per effetto Joule è $W_d = R I_{ind}^2 = \dfrac{B^2 L^2 v_0^2}{R}$

e l'energia dissipata nel tempo Δt impiegato dalla spira ad uscire completamente dalla zona dove c'è $\overline{B}$ vale

$$E_{diss.} = \int_0^{\Delta t} W_d \, dt = \frac{B^2 L^2 v_0^2}{R} \Delta t \qquad \text{Ma } \Delta t = \frac{L}{v_0} \text{ per cui}$$

$$E_{diss.} = \frac{B^2 L^3 v_0}{R} \cong 0.11 \ \text{J}$$

4) L'unica forza che si oppone al moto della spira è

quella agente sul lato sinistro (parallelo all'asse $\bar{j}$) della spira (le forze agenti sui lati orizzontali si annullano reciprocamente). Tale forza agisce fin quando la spira non esce completamente dalla zona dove c'è $\bar{B}$, è dovuta all'interazione tra $I_{indotta}$ e $\bar{B}$ e vale $\bar{F}_B = I_{ind}\, \bar{L} \times \bar{B}$ La direzione ed il verso di $\bar{F}_B$ sono $-\bar{i}$.

Il suo modulo è costante e vale $I_{ind}\, L\, B$

Il lavoro compiuto da tale forza è pertanto

$$L_B = F_B\, L = I_{ind}\, L^2 B = \frac{B L v_0}{R} L^2 B = \frac{B^2 L^3 v_0}{R}$$

Dall'esterno occorre pertanto applicare una forza uguale e contraria ad $\bar{F}_B$ per poter mantenere la spira in moto (verso destra in figura) con velocità costante v_0. Occorre quindi compiere un lavoro dall'esterno pari ad $L_B \left(= \frac{B^2 L^3 v_0}{R}\right) = E_{diss.}$