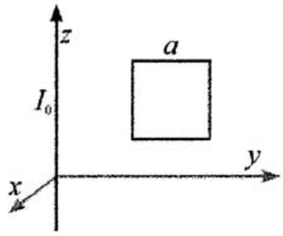
Problema N°. 41

Una corrente di intensità $I_0 = 0,4\,\mathrm{A}$ percorre un filo conduttore, rettilineo e indefinito, coincidente con l'asse z di un sistema di riferimento cartesiano, nel verso positivo dell'asse. Nel piano yz ($y > 0, z > 0$) di tale riferimento si trova una spira conduttrice quadrata di lato $a = 5\,\mathrm{cm}$, che ha due lati paralleli al filo e il centro a distanza $D = 1,5\,a$ dal filo.



1) Calcolare il flusso del campo di induzione magnetica attraverso la spira.

A un certo istante, l'intensità della corrente che circola nel filo inizia a crescere linearmente nel tempo, secondo la legge $I = I_0 + kt$ (dove t è il tempo misurato in secondi e k una grandezza costante *positiva*).

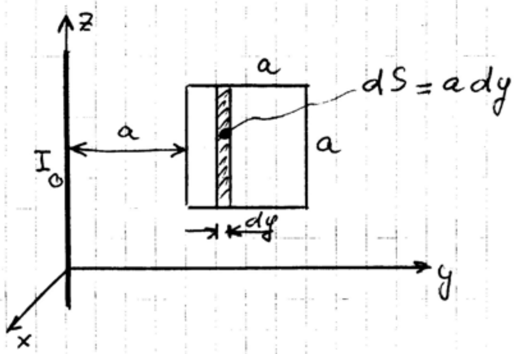
Sapendo che la resistenza ohmica della spira vale $R_0 = 3,5\,\mathrm{m}\Omega$ e che l'intensità della corrente indotta che circola nella spira vale $I^* = 200\,\mu\mathrm{A}$, determinare:

2) il verso in cui circola la corrente indotta nella spira (***giustificare*** la risposta);

3) il valore di k;

4) in quale istante il valore del campo di induzione magnetica ***totale*** al centro della spira è aumentato di un fattore 1,5 rispetto al valore iniziale.
[si ricordi che il campo $\vec{B}$, generato da una corrente i circolante in una spira quadrata di lato a, al centro della spira vale $B = \dfrac{2\mu_0 i}{\pi a\sqrt{2}}$]

Soluzione



1) In un punto del piano yz ($y>0$, $z>0$), a distanza y da z, il campo $\bar{B}$, prodotto dalla corrente I_0, ha intensità:

$B(y) = \dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi y}$ Pertanto il flusso di $\bar{B}$ concatenato con la spira vale

$$\phi_B = \int_a^{2a} \bar{B} \cdot d\bar{S} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \int_a^{2a} \frac{a\,dy}{y} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} a \ln 2$$
$$= 2{,}77 \times 10^{-9}\ Wb$$

2) Quando la corrente diviene $I = I_0 + Kt$ $(K>0)$ si ha un aumento di $I \Longrightarrow$ aumenta $\bar{B}$ (che ha il verso $-\bar{i}$) $\Longrightarrow$ nasce una $i_{indotta}$ che produce un campo $\bar{B}$ indotto che contrasta tale aumento di $\bar{B}$. Poiché $\bar{B}$ aumenta (ed ha verso $-\bar{i}$) ne consegue che il $\bar{B}$ indotto deve avere verso $+\bar{i}$. Quindi la corrente indotta (responsabile del $\bar{B}$ indotto) deve girare in verso antiorario nella spira.

3) Si ha $\phi_B = \left[\dfrac{\mu_0}{2\pi} a \ln 2\right]\left[I_0 + Kt\right]$. Inoltre $V_\varepsilon = -\dfrac{d\phi_B}{dt}$ e

$$i_{indotta} = \frac{V_\varepsilon}{R} = -\frac{1}{R}\left(\frac{\mu_0}{2\pi} a \ln 2\right) K$$

Posto $i_{indotta} = I^*$ si ricava K. Considerando $|i_{indotta}|$:

$$200 \times 10^{-6} = \frac{1}{3{,}5 \times 10^{-3}} \times \left(2 \times 10^{-7} \times 5 \times 10^{-2} \times \ln 2\right) K$$ da cui si ricava

$K \cong 101\ A\,s^{-1}$

4) Si ha, vettorialmente:

$$\overline{B}_{totale} = \overline{B} + \overline{B}_{indotto}$$

L'intensità di $\overline{B}_{totale}$ è (ricordando che i due campi $\overline{B}$ e $\overline{B}_{indotto}$ hanno versi contrari), in modulo:

$$B_{totale} = \frac{\mu_0 I}{2\pi(a+\frac{1}{2}a)} - \underbrace{\frac{2\mu_0 \, i_{indotta}}{\pi a \sqrt{2}}}_{\text{dalla relazione fornita dal testo}}$$

(NEL CENTRO DELLA SPIRA)

Inoltre $I = I_0 + Kt$

Si vuole trovare t^* per il quale $B_{totale}(t^*) = 1.5\, B(t=0)$ (sempre con riferimento al centro della spira

$$\frac{\mu_0(I_0 + Kt^*)}{2\pi \, \frac{3}{2} a} - \frac{2\mu_0 \, i_{indotta}}{\pi a \sqrt{2}} = 1.5 \, \frac{\mu_0 I_0}{2\pi \frac{3}{2} a}$$

$$\cancel{\frac{\mu_0}{2\pi}} \, \frac{2}{3} \, \frac{(I_0 + Kt^*)}{\cancel{a}} = \cancel{\frac{\mu_0}{2\pi}} \, \frac{I_0}{\cancel{a}} + \cancel{\frac{\mu_0}{2\pi}} \, \frac{2\sqrt{2} \, i_{indotta}}{\cancel{a}}$$

Si ottiene $t^* \cong 1.98 \times 10^{-3}$ s