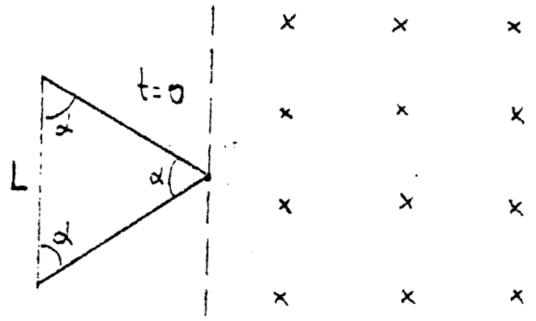
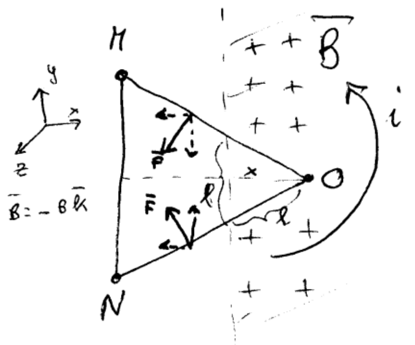
Problema N°. 44

Un circuito (spira) di materiale conduttore a forma di triangolo equilatero di lato L e di resistenza elettrica totale R si muove verso destra (vedi figura) con velocità costante $\bar{v}$. All'istante $t = 0$ essa inizia a penetrare in una regione in cui vi è un campo magnetico uniforme e costante, diretto perpendicolarmente al piano del circuito.
Nella ipotesi che la spira venga mantenuta <u>sempre</u> a velocità costante, calcolare:

i. L'energia dissipata nel circuito per far entrare totalmente la spira nel campo;
ii. Dimostrare che il lavoro fatto dalla forza di Lorentz (nel caso specifico è forza resistente) è uguale all'energia dissipata nel circuito.



Soluzione



$$h \equiv x = vt \qquad H = L\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \ell = 2x\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}vt$$

$$A = \frac{1}{2}LH = \frac{\sqrt{3}}{4}L^2$$

$$s = \frac{1}{2}\ell x = \frac{1}{2}2x\frac{\sqrt{3}}{3}x = \frac{\sqrt{3}}{3}x^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}v^2t^2 \equiv s(t)$$

$$\phi_B(t) = B\,s(t) = \frac{\sqrt{3}}{3}Bv^2t^2$$

$$V_\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}Bv^2t \qquad i = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{Bv^2}{R}t$$

$$W_J = Ri^2 = \frac{4\cdot\cancel{3}}{\cancel{9}_{\,3}}\frac{B^2v^4}{R}t^2 \qquad E_J = \int_0^T Ri^2\,dt \qquad H = Tv \Rightarrow T = \frac{H}{v} = \frac{L\sqrt{3}}{2v}$$

$$E_J = \frac{4}{3}\frac{B^2v^4}{R}\int_0^T t^2\,dt = \frac{4}{9}\frac{B^2v^4}{R}T^3 = \frac{\cancel{4}}{\cancel{9}_{\,3}}\frac{B^2v^{\cancel{4}}}{R}\frac{L^3\,\cancel{3}\sqrt{3}}{\cancel{8}_{\,2}\,\cancel{v^3}}$$

$$E_J = \frac{\sqrt{3}}{6}\frac{B^2L^3v}{R}$$

sul lato $\overline{NO}$

$$F = i\ell B = \frac{\cancel{2\sqrt{3}}}{\cancel{3}}\frac{Bv^2}{R}t\,\frac{\cancel{2\sqrt{3}}}{3}vt\,B = \frac{4}{3}\frac{B^2v^3t^2}{R}$$

$$F_x = \left|-\frac{4}{3}\frac{B^2v^3t^2}{R}\cos 60\right| = \left|-\frac{4}{3}\frac{B^2v^3t^2}{R}\frac{1}{2}\right| = \left|-\frac{2}{3}\frac{B^2v^3t^2}{R}\right|$$

$$|F|_{tot} = \frac{4}{3}\frac{B^2v^3t^2}{R} \Longrightarrow \bar{F}_{totale} = -\frac{4}{3}\frac{B^2v^3t^2}{R}\,\hat{i}$$

(Infatti $F_{tot} = 2F_x$ perché le F_y si annullano)

$$dL = \bar{F}\cdot d\bar{s} = \bar{F}\cdot(\hat{i}\,dx) = F\,dx = F\,v\,dt = \frac{4}{3}\frac{B^2v^4t^2}{R}dt$$

$$L = \int_0^T dL = \frac{4}{9}\frac{B^2v^4}{R}T^3 = \frac{\cancel{4}}{\cancel{9}_{\,3}}\frac{B^2v^{\cancel{4}}}{R}\frac{L^3\,\cancel{3}\sqrt{3}}{\cancel{8}_{\,2}\,\cancel{v^3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}\frac{B^2L^3v}{R}$$