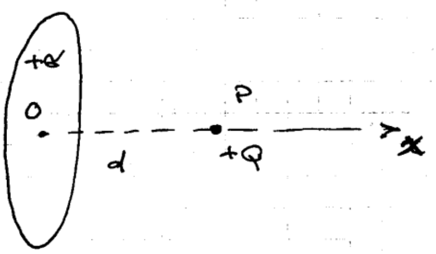
Problema N°. 5

Determinare la forza elettrica che si esercita su una carica puntiforme $Q = 1\ \mu\text{C}$ posta ad una distanza $d = 20$ cm sull'asse di un disco circolare piano, di raggio $R = 10$ cm, caricato uniformemente con una densità di carica $\sigma = 5\cdot 10^{-9}$ C m^{-2}.

Soluzione



La forza agente su +Q sarà data da $\bar{F}_Q = Q\,\bar{E}_P$

Si tratta quindi di determinare il campo elettrico in P dovuto al disco recante la carica $\pi R^2 \sigma$ distribuita in modo uniforme. Per trovare tale campo parto dalla conoscenza del campo elettrico prodotto da un anello circolare piano (di raggio r) recante una carica q distribuita uniformemente con densità lineare λ.

Si ha, per tale anello, in un punto P del suo asse, a distanza generica x:

$$\bar{E}(P) = \frac{q x}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+r^2)^{3/2}}\,\bar{u}_x = \frac{\lambda r x}{2\varepsilon_0 (x^2+r^2)^{3/2}}\,\bar{u}_x$$

Suddivido il disco in tante corone circolari di spessore infinitesimo dr. Ciascuna corona è assimilabile ad un anello di raggio, generico, r e recante una carica infinitesima $dq = \sigma\, dS = \sigma\, 2\pi r\, dr$, essendo $dS = 2\pi r\, dr$ la superficie della corona infinitesima compresa tra le circonferenze di raggio r e $r + dr$

Il contributo al campo totale in P dovuto alla carica dq presente su tale corona infinitesima vale (è sempre diretto lungo l'asse x per cui uso la notazione scalare):

$$dE_p = \frac{x\,\sigma\,2\pi r\,dr}{4\pi\varepsilon_0\,(x^2+r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\,\frac{r\,dr}{(x^2+r^2)^{3/2}}$$

e, vettorialmente $d\overline{E}_p = dE_p\,\overline{u}_x$

Per trovare il campo risultante $\overline{E}_p$ integro su r tra 0 e R

$$E = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r\,dr}{(x^2+r^2)^{3/2}}$$ Debbo risolvere $\displaystyle\int_0^R \frac{r\,dr}{(x^2+r^2)^{3/2}}$

Pongo $x^2+r^2 = t$ $\qquad 2r\,dr = dt \qquad (x^2+r^2)^{3/2} = t^{3/2}$

$$\int_0^R \frac{r\,dr}{(x^2+r^2)^{3/2}} = \int_{x^2}^{x^2+R^2} \frac{1}{2}\,t^{-\frac{3}{2}}\,dt = -\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}} - \frac{1}{x}\right)$$

Si ha allora $\quad \overline{E} = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} - 1\right)\overline{u}_x$

$\left(\text{Poiché } \dfrac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} < 1 \implies \overline{E} \text{ ha la direzione di } \overline{u}_x\right)$

Con i dati numerici del problema si ottiene:

$E_p \cong 179.34\ \dfrac{V}{m} \qquad \overline{E}_p = E_p\,\overline{u}_x$

e $\qquad F_Q = 10^{-6} \times 179.34 \cong 1.79 \times 10^{-4}\ N$

$\qquad \overline{F}_Q = F_Q\,\overline{u}_x$