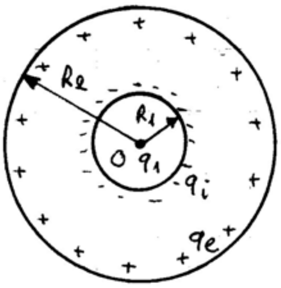
Problema N°. 9

Si abbia un conduttore sferico di raggio R_2, avente una concavità sferica concentrica di raggio R_1.
Al centro O della cavità è presente una carica, puntiforme e fissa, q_1.
Da una distanza molto grande (praticamente infinita) viene successivamente trasferita sul conduttore una carica q_2. Calcolare, dopo tale trasferimento:

1) il campo elettrostatico nelle tre regioni: $r<R_1$, $R_1<r<R_2$, $r>R_2$;
2) la densità di carica sulla superficie esterna del conduttore.

Soluzione

Sia prima di portare q_2 sul conduttore che successivamente, all'equilibrio, il campo $\bar{E}$ interno al conduttore è nullo.



Indichiamo con q_i la carica presente sulla superficie interna del conduttore e con q_e quella presente sulla superficie esterna

1a) Esaminiamo la situazione nel conduttore prima di trasportarvi la carica q_2.

Consideriamo una superficie sferica Σ concentrica al conduttore, con raggio $R_1 < r < R_2$.

Dalla legge di Gauss per tale Σ si ha

$$\oint_{\Sigma} \bar{E} \cdot d\bar{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} = 0 \quad \text{perché } \bar{E} = 0 \text{ in ogni punto di } \Sigma$$

Pertanto $\Rightarrow q(\text{interna a } \Sigma) = 0 \Rightarrow q_1 + q_i' = 0$

essendo q_i' la carica q_i in questa prima situazione (senza q_2)

Quindi $q_i' = -q_1$

Inoltre, essendo (per ora) assente la q_2, la carica netta del conduttore sarà nulla $\Rightarrow$

$$q_i' + q_e' = 0 \Rightarrow q_e' = -q_i' = +q_1$$

Quindi $\sigma_i' = \dfrac{q_i'}{4\pi R_1^2} = -\dfrac{q_1}{4\pi R_1^2}$

$$\sigma_e' = \frac{q_1}{4\pi R_2^2}$$

1b) Esaminiamo ora la situazione dopo aver portato la carica q_2 sul conduttore

Poiché nei punti interni al conduttore si avrà sempre, all'equilibrio, $\bar{E}=0$ se si considera ancora la superficie Σ già presa in esame precedentemente si ha:

$$\oint_{\Sigma} \bar{E} \cdot d\bar{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} = 0 \quad \Longrightarrow q(\text{interna a } \Sigma) = 0$$

Allora, come nel caso precedente:

$q_1 + q_i'' = 0 \quad \Longrightarrow q_i''$ = carica sulla superficie interna del conduttore in questa nuova situazione (cioè con q_2) =

$= -q_1 \equiv q_i'$

Poiché la q_2 non può essere all'interno del conduttore essa si sarà disposta sulla superficie esterna.

Si avrà pertanto

$$q_e'' = q_e' + q_2 = q_1 + q_2$$

Pertanto $\quad \sigma_i'' = -\dfrac{q_1}{4\pi R_1^2} \qquad (\equiv \sigma_i')$

$$\sigma_e'' = \frac{q_e''}{4\pi R_2^2} = \frac{q_1 + q_2}{4\pi R_2^2} \qquad (\neq \sigma_e')$$

2) $\quad r < R_1 \qquad \oint_{\Sigma_1} \bar{E}_1 \cdot d\bar{S} = \dfrac{q}{\varepsilon_0} \qquad E_1 4\pi r^2 = \dfrac{q_1}{\varepsilon_0} \qquad \bar{E}_1 = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\bar{u}_r$

$R_1 < r < R_2 \qquad \oint_{\Sigma_2} \bar{E}_2 \cdot d\bar{S} = \dfrac{q}{\varepsilon_0} \qquad E_2 4\pi r^2 = 0 \qquad \bar{E}_2 = 0$

$r > R_2 \qquad \oint_{\Sigma_3} \bar{E}_3 \cdot d\bar{S} = \dfrac{q}{\varepsilon_0} \qquad E_3 4\pi r^2 = \dfrac{q_1 + q_2}{\varepsilon_0} \qquad \bar{E}_3 = \dfrac{q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\bar{u}_r$