Operatori vettoriali su R^3

Sui campi scalari e vettoriali tridimensionali è possibile definire degli **operatori vettoriali** che giocano un ruolo importantissimo anche per le applicazioni nel campo fisico. Si pensi che le **equazioni di Maxwell** che descrivono tutti i fenomeni elettromagnetici classici (non quantistici) sono espresse tramite questi operatori.

01 - Vettore simbolico ∇

Gli operatori vettoriali possono essere definiti a partire dal cosiddetto **vettore simbolico** detto anche "**nabla**" o "**del**". Esso è indicato dal simbolo ∇ ed è definito come :

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}.$$

Si tratta di un vettore le cui componenti sono gli operatori di derivazione parziale prima secondo gli assi coordinati.
Ovviamente non si tratta di un vettore vero e proprio di R^3 , ma esso rappresenta un operatore vettoriale il cui utilizzo sarà chiarito in seguito.

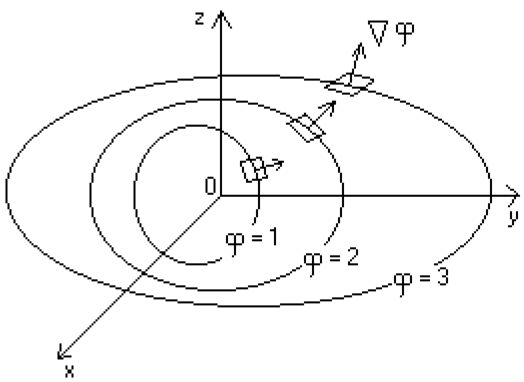
02 - Gradiente.

Dato un campo scalare ϕ in R^3 si definisce l'operatore **gradiente** applicando il nabla allo scalare suddetto :

$$grad\,\varphi = \nabla\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right).$$

Il gradiente di uno scalare è quindi un vettore che ha per componenti le derivate parziali prime rispetto agli assi coordinati. Esso è indicabile con la sigla "grad" o semplicemente col nabla.

Il gradiente ha la importantissima proprietà di essere perpendicolare alla superficie $\phi = k$ in ogni suo punto (dove k è una costante qualunque) :



03 - Divergenza.

Dato un campo vettoriale V in R^3 si definisce l'operatore **divergenza** facendo il prodotto scalare fra il nabla e il vettore suddetto :

$$divV = \nabla \cdot V = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}.$$

La divergenza di un vettore è quindi uno scalare formato dalla somma delle derivate parziali prime delle componenti del vettore rispetto agli assi coordinati nell'ordine e si indica con la sigla "div".

04 - Rotore.

Dato un campo vettoriale V in R^3 si definisce l'operatore **rotore** facendo il prodotto vettoriale fra il nabla e il vettore suddetto :

$$rotV = \nabla \times V = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right)k.$$

Il rotore di un vettore è quindi un vettore che si indica con la sigla "rot".

05 - Laplaciano.

L'operatore **laplaciano** si applica ai campi scalari ed è indicato col simbolo Δ oppure ∇^2. Tenendo conto che l'applicazione dell'operatore derivata parziale prima $\frac{\partial}{\partial x}$ su se stesso produce l'operatore derivata parziale seconda $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, il laplaciano è definito come :

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

per cui si ha :

$$\Delta \varphi = div \quad grad \quad \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Il laplaciano di uno scalare è quindi uno scalare. Esso occupa un ruolo molto importante nelle applicazioni fisiche.

06 - Teorema di Gauss.

Consideriamo un campo vettoriale A su R^3 ed una superficie chiusa S contenuta in esso. Supponiamo che la superficie sia suddivisa in infiniti elementi infinitesimi di area dS ciascuno dei quali dotato di un versore unitario n perpendicolare ad esso con verso orientato dall'interno all'esterno della superficie stessa.

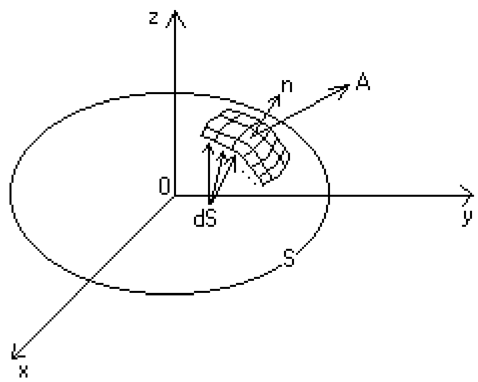
Allora vale il fondamentale **teorema di Gauss** (o della divergenza) (omettiamo la dimostrazione) :

$$\oint A \cdot n dS = \int div A dV \; .$$

L'integrale di sinistra si chiama anche **flusso** del vettore A sulla superficie S ed il cerchietto sul segno di integrale significa che l'integrale va fatto su tutta la superficie chiusa. All'interno del primo integrale $A \cdot n$ rappresenta naturalmente il prodotto scalare fra il vettore A ed il versore n . L'integrale di destra va fatto sull'intero volume contenuto nella superficie chiusa.

L'integrale di destra è semplicemente l'integrale della divergenza di A (che è uno scalare) fatto su tutto il volume racchiuso nella superficie chiusa S .

Il flusso del vettore A sulla superficie chiusa S può essere così rappresentato geometricamente :



dove la superficie chiusa S va completamente ricoperta di elementi infinitesimi di superficie dS e l'integrale (il flusso) va inteso come la somma di infiniti termini ciascuno dei quali è costituito dal prodotto scalare fra il campo A ed il versore n di ogni elemento dS moltiplicato a sua volta per l'elemento stesso.

Il teorema di Gauss è di fondamentale importanza perché permette di trasformare in certi casi una equazione differenziale in una equazione integrale. Questo è un fatto molto importante perché le tecniche numeriche di risoluzione approssimata degli integrali sono molto più precise e stabili di quelle di approssimazione delle derivate. Ciò si intuisce dal fatto che un integrale è una somma di prodotti mentre la derivata è un rapporto di termini di cui il denominatore deve essere il più piccolo possibile e dividendo per numeri piccoli si ha una propagazione degli errori di approssimazione molto alta.

Nei casi concreti è quindi spesso preferibile avere una equazione integrale piuttosto che una equazione differenziale.

Come esempio di applicazione del teorema di Gauss mostriamo come si esprime la prima equazione differenziale di Maxwell in forma integrale.

La prima equazione di Maxwell è (a meno di costanti moltiplicative non essenziali) è :

$$div E = \rho$$

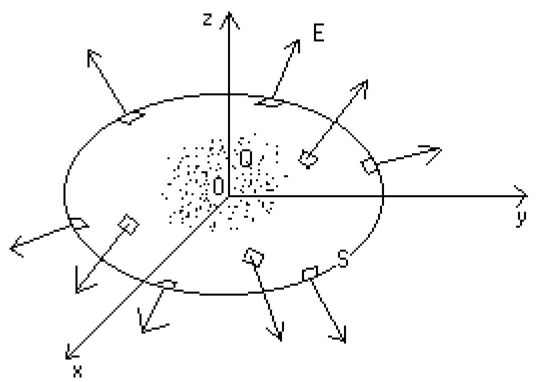
dove E è il vettore campo elettrico le cui componenti sono funzioni delle coordinate (e del tempo che a noi qui non interessa) e ρ è la densità di carica, ovvero è uno scalare che esprime come la carica elettrica è distribuita nei punti dello spazio.

Consideriamo ora una superficie chiusa S qualunque immersa nel campo elettrico E .
Se applichiamo il teorema di Gauss otteniamo :

$$\oint E \cdot n dS = \int div E dV = \int \rho dV = Q$$

dove Q è la carica elettrica contenuta nel volume racchiuso nella superficie chiusa S poiché la densità ρ è appunto la carica fratto il volume.

La formula ottenuta afferma quindi che il flusso del campo elettrico E sulla superficie chiusa S eguaglia la carica contenuta in S .



Questa è la formulazione integrale della prima equazione di Maxwell.

07 - Teorema di Stokes.

Consideriamo ora una superficie aperta S immersa in un campo vettoriale A . Chiamiamo C la linea orientata di contorno che delimita la superficie S .

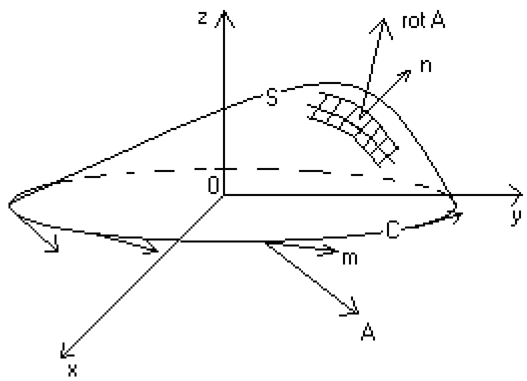
Supponiamo che la linea C sia suddivisa in infiniti elementi infinitesimi dl ciascuno dei quali è dotato di un versore m tangente ad esso e con un verso corrispondente all'orientazione del contorno C .

Supponiamo anche che la superficie S sia suddivisa in infiniti elementi infinitesimi di area dS e che ogni elemento dS sia dotato di un versore unitario n perpendicolare all'elemento stesso e dotato di un verso corrispondente al verso di avanzamento di una vite destrorsa che segue l'orientazione del contorno C .

Allora vale il fondamentale **teorema di Stokes** (omettiamo la dimostrazione) :

$$\int rotA \cdot ndS = \oint A \cdot mdl$$

L'integrale di sinistra è il flusso del rotore di A sulla superficie aperta A e l'integrale di destra è la **circuitazione** (il cerchietto nell'integrale significa appunto che si integra su un percorso chiuso) del vettore A lungo il contorno C della superficie. Graficamente :



Il teorema di Stokes, così come il teorema di Gauss, è molto utile per trasformare, in certi casi, le equazioni differenziali in equazioni integrali.

Come esempio di questo mostriamo come si esprime la quarta equazione di Maxwell il forma integrale. Essa è (a meno di costanti moltiplicative) :

$$rotE = -\frac{\partial H}{\partial t}$$

dove E è il vettore campo elettrico ed H è il vettore campo magnetico. In questa equazione è evidenziata la dipendenza dal tempo dei vettori, ma questo non introduce nessuna ulteriore complicazione.

Applicando il teorema di Stokes si ottiene :

$$\int rotE \cdot ndS = \oint E \cdot mdl$$

da cui, sostituendo nel primo integrale il secondo membro dell'equazione di Maxwell e portando fuori il segno di derivata rispetto al tempo (perché l'integrazione non avviene rispetto ad esso), si perviene al risultato finale :

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int H \cdot ndS = \oint E \cdot mdl$$

Questa equazione esprime il fatto che l'antivariazione (variazione cambiata di segno) rispetto al tempo del flusso del campo magnetico su di una superficie aperta eguaglia la circuitazione del campo elettrico sul contorno della superficie stessa : questa è la cosiddetta legge di Faraday dell'**induzione elettromagnetica**.

08 - Formule.

Riportiamo qui (senza dimostrazione) alcune formule importanti che sussistono per gli operatori vettoriali :

$$\begin{aligned}
&rotgrad\,\varphi = 0\\
&divrot V = 0\\
&divgrad\,\varphi = \Delta\varphi\\
&rotrot V = \nabla\times(\nabla\times V) = \nabla(\nabla\cdot V) - \Delta V\\
&rot(\varphi V) = \varphi rot V + (grad\,\varphi)\times V\\
&V\cdot grad\,\varphi = div(V\varphi) - \varphi div V\\
&grad(A\cdot B) = (A\cdot\nabla)B + (B\cdot\nabla)A + A\times rot B + B\times rot A\\
&div(A\times B) = B\cdot rot A - A\cdot rot B
\end{aligned}$$

Si noti che il laplaciano di un vettore è un vettore che ha per componenti i laplaciani delle singole componenti del vettore dato (ciò estende il campo di applicabilità del lapalciano).