Esercizi di Calcolo vettoriale

Esercizio 1

Dato il vettore **a** = (1, 3, 2), ricavare l'espressione più generale possibile di:

- un vettore **v** parallelo ad **a**;
- un vettore **w** perpendicolare ad **a**.

Soluzione:

v // **a** ←→ **v** ^ **a** = **0** ←→ **v** $(v_x, 3v_x, 2v_x)$
Il vettore **v** è parallelo ad **a** se le sue componenti rispetto agli assi sono proporzionali alle componenti di **a** (rispetto agli assi).

w ⊥ **a** ←→ **w** · **a** = **0** ←→ **w** $(w_x, w_y, -\frac{1}{2}w_x - \frac{3}{2}w_y)$
Nota: in questo caso abbiamo 2 variabili libere, la componente w_x e la componente w_y perché tutti i vettori del piano perpendicolare ad **a** sono perpendicolari ad **a**.

Esercizio 2

Dato il vettore **a** = 10**i**+**j**-3**k**, calcolare la sua proiezione sulla direzione individuata dal vettore **v = i**-2**j**+2**k**.

Soluzione 2/3

Esercizio 3

Siano **a** = 3**i**+4**j** e **b** = 2k. Determinare:

- il prodotto vettoriale **a**^**b**;
- il vettore **c**, perpendicolare ad **a** e **b**, per il quale c = 5 e **c•j** > 0;
- il volume del parallelepipedo formato dai tre vettori **a**, **b** e **c**.

Soluzione
a^**b**=8**i**-6**j**
c=-4**i**+3**j**
V=-50

Esercizio 4

Dati i vettori $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i}+7\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = -5\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ e $\mathbf{v}_3 = 3\mathbf{i}-4\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ applicati rispettivamente nei punti $P_1 = (0, 1, 0)$, $P_2 = (1, 1, 1)$, $P_3 = (0, 0, -1)$, determinare la risultante dei tre vettori ed il momento risultante calcolato scegliendo come centro di riduzione (o polo):

- il punto (0, 1, 0);
- l'origine O.

Soluzione

La risultante è la somma delle componenti lungo ciascun asse:

$\mathbf{V}=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3=-\mathbf{i}+6\mathbf{j}+3\mathbf{k}$

Il momento risultante rispetto a un punto è la somma dei momenti rispetto al punto stesso:

$M_{P1}= -9\mathbf{i}-8\mathbf{j}+6\mathbf{k}$

$M_O=-6\mathbf{i}-8\mathbf{j}+7\mathbf{k}$

Esercizio 5

Determinare la componente del vettore $\mathbf{a} = \mathbf{i}+5\mathbf{k}$, perpendicolare al piano individuato dai vettori $\mathbf{b} = -\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$ e $\mathbf{c} = \mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$.

Soluzione:

Bisogna individuare la direzione perpendicolare ad entrambi i vettori b e c, che è data dal prodotto vettoriale dei due normalizzato.

$\mathbf{u}= (\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})/|\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}|$

La proiezione di a lungo questa direzione è data dal prodotto scalare di **a** per **u:**

$\mathbf{a_u}= \mathbf{a}\bullet\mathbf{u}=-1/(18)^{1/2}$

Esercizio 6

Dati i vettori $\mathbf{a} = \mathbf{i}+7\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -5\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ e $c = 3\mathbf{i}-4\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, calcolare: $\mathbf{c}\wedge\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}$; $\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}\bullet\mathbf{a}$; $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\bullet\mathbf{c}$; $\mathbf{b}\wedge\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}$.

Soluzione

$\mathbf{c}\wedge\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}=87= \mathbf{b}\wedge\mathbf{c}\bullet\mathbf{a}= \mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\bullet\mathbf{c}$

$\mathbf{b}\wedge\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}=0$

Esercizio 7

Con riferimento alla usuale terna ortogonale destrorsa, si determinino:

- i vettori **a** e **b** tali che $\mathbf{a}+\mathbf{b} = 2\mathbf{i}-\mathbf{j}$ e $\mathbf{a}-\mathbf{b} = \mathbf{i}+2\mathbf{j}$;

- l'angolo compreso fra **a** e **b**;
- il prodotto vettoriale **a**^**b**.

Soluzione

a=3/2**i**+1/2**j** e **b**=1/2**i**-3/2**j**

$\theta=\pi/2$

a^**b=-**5/2**k**

Esercizio 8

Dati i vettori **a** = 5**i+**3α**j-**2**k** e **b = -**4**i**+2**j-**3**k**, di determini il valore del parametro α per cui i vettori **a** e **b** risultano ortogonali fra loro.

Soluzione

a e **b** sono ortogonali tra loro se il loro prodotto scalare è nullo: α=7/3