Fisica Generale L-A

http://ishtar.df.unibo.it

1. Vettori

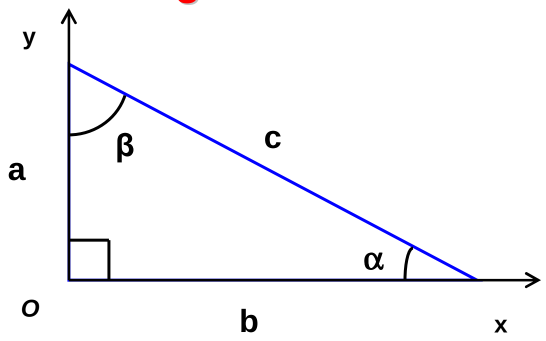
3/02/2003

Infomazioni utili..

- dott. A. Carbone
- ricevimento
  - quando: mercoledì 9.30–11.30, mandare e-mail per conferma.
  - dove: Via Irnerio 46, Dipartimenro di Fisica, stanza 168
- e-mail:
  - carbone@bo.infn.it
- Documentazione
  - esercizi + soluzioni
  - presto su internet….
  - http://ishtr.df.unibo.it/Uni/bo/ingegneria/all/semprini_cesari/stuff/homepage.htm

Richiami trigonometria

$$a = b \cdot tg(\alpha)$$
$$a = c \cdot \sin(\alpha)$$
$$a = c \cdot \cos(\beta)$$
$$b = a \cdot tg(\beta)$$
$$b = c \cdot \sin(\beta)$$
$$b = c \cdot \cos(\alpha)$$



$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) \pm \sin(\beta)\cdot\cos(\alpha) \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$$

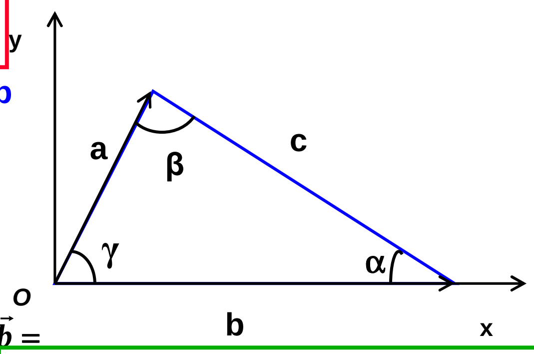
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) \mp \sin(\beta)\cdot\sin(\alpha) \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$$

Teorema di Carnot

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\cos(\gamma)}$$

Consideriamo i vettori a e b

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$$



elevando al quadrato:

$$|\vec{c}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b} =$$
$$= a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\cos(\gamma)$$

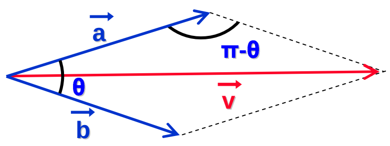
conversione gradi-radianti

$$\frac{\alpha(rad)}{\alpha(grad)} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha(rad) = \dfrac{\pi}{180^\circ}\cdot\alpha(grad) \\ \alpha(grad) = \dfrac{180^\circ}{\pi}\cdot\alpha(rad) \end{array}$$

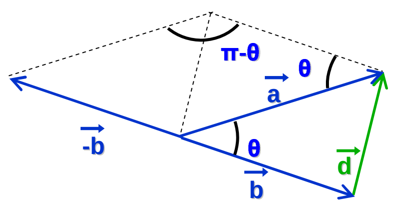
Es. 1

- Dati due vettori $\vec{a}, \vec{b}$ e l'angolo tra essi compreso ϑ , determinare modulo direzione e verso dei vettori $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$.

Somma

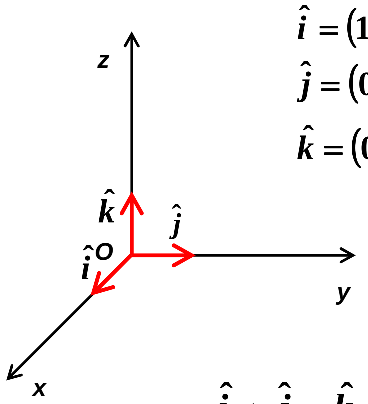


Differenza



Rappresentazione cartesiana di vettori

- **Terna d'assi cartesiana ortogonale**
  - Tre rette cartesiane (o assi) x,y,z, ortogonali a due a due aventi un punto in comune O detta origine.
- **Terna di versori cartesiani**
  - Vettori di modulo unitario indicati con *i,j,k* , corrispondenti rispettivamente agli assi x,y,z



$$\hat{i} = (1,0,0)$$
$$\hat{j} = (0,1,0)$$
$$\hat{k} = (0,0,1)$$

$$\hat{i} \wedge \hat{j} = \hat{k}$$

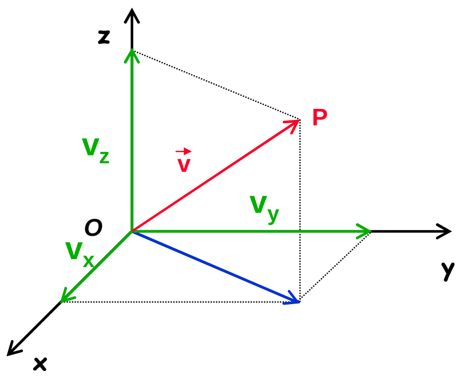
Rappresentazione cartesiana di vettori

Componenti cartesiane del vettore

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

$$\vec{v} = v_x \cdot \hat{i} + v_y \cdot \hat{j} + v_z \cdot \hat{k}$$

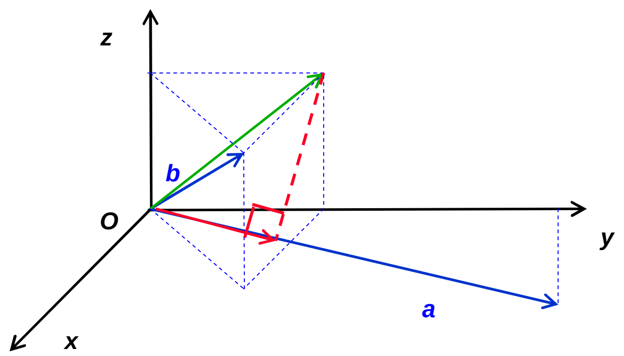
Rappresentazione cartesiana del vettore



Es. 2

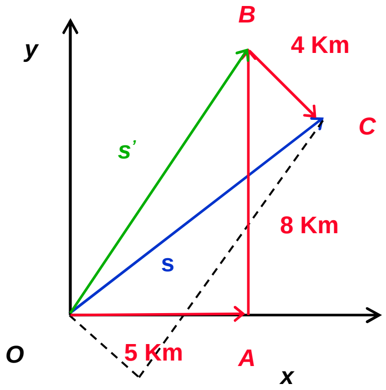
- Trovare le componeti del vettore b proiettato sulla direzione del vettore a dove

1. a = (0,4,-3) b = (1,1,1)
2. a = (-2,3,-1) b = (4,-2,0)
3. a = (8,2,-3) b = (1,0,-1)



Es. 3

- Un automobile viaggia verso est per 5 Km, quindi devia verso nord per 8 Km e prima di fermarsi, torna indietro con direzione sud-est per 4 Km. Calcolare il vettore spostamento.



Coordinate polari

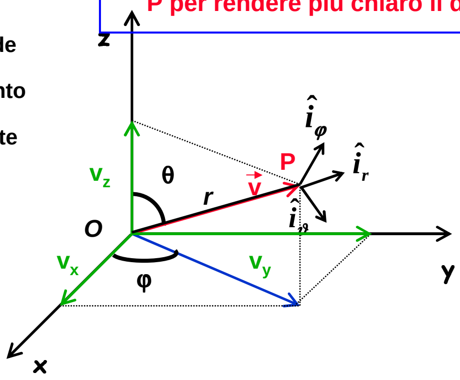
- Terna di versori polari:
  $\hat{i}_r \;\; \hat{i}_\vartheta \;\; \hat{i}_\varphi$
  - La terna così costruita dipende dal punto P, cioè i valori dei versori cambiano punto a punto a differenza della rappresentazione in coordinate cartesiane

I versori sono sempre applicati al vettore in questo caso particolare nell'origine *O.* Sono stati disegnati in P per rendere più chiaro il disegno

Rappresentazione in coordinate polari

$$\vec{v} = (v_r, v_\vartheta, v_\varphi)$$

$$\vec{v} = v_r \cdot \hat{i}_r + v_\vartheta \cdot \hat{i}_\vartheta + v_\varphi \cdot \hat{i}_\varphi$$



Coordinate cilindriche

- **Terna di versori polari:**

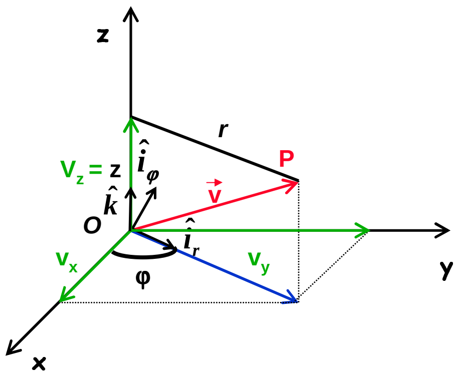
$$\hat{i}_r \quad \hat{i}_z \quad \hat{i}_\varphi$$

  - La terna così costruita dipende dal punto P, cioè i valori dei versori cambiano punto a punto a differenza della rappresentazione in coordinate cartesiane

Rappresentazione in coordinate cilindriche

$$\vec{v} = (v_r, v_z, v_\varphi)$$

$$\vec{v} = v_r \cdot \hat{i}_r + v_\varphi \cdot \hat{i}_\varphi + v_z \cdot \hat{k}$$



Es. 4

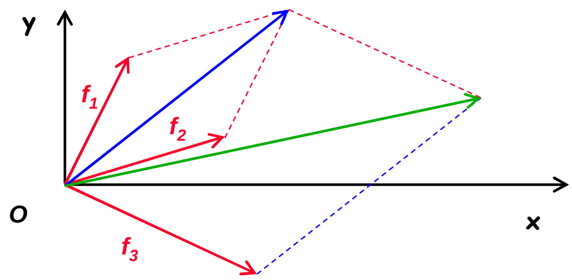
- **Nell'origine di un sistema cartesiano di coordinate sono applicate le forze**

$$f_1 = 5 \cdot \hat{i} - \hat{j} + 4 \cdot \hat{k} \qquad f_2 = -2 \cdot \hat{j} + 3 \cdot \hat{k}$$

$$f_3 = 3 \cdot \hat{i} - 2 \cdot \hat{j} + 5 \cdot \hat{k} \qquad f_4 = -\hat{i} + 7 \cdot \hat{j} - 3 \cdot \hat{k}$$

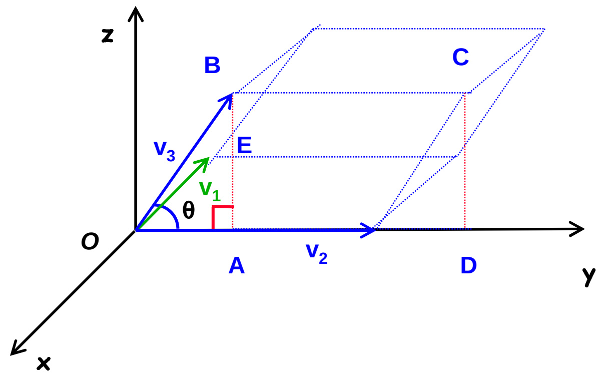
calcolare modulo e direzione della risultante delle forze in coordinate cartesiane e polari.

Per la rappresentazione grafica supponiamo di trovarci sul piano (x,y)



Es. 5

u Calcolare l'area del parallelogrammo definito dai tre vettori $\vec{v}_1 = -6 \cdot \hat{i}$, $\vec{v}_2 = 9 \cdot \hat{j}$, $\vec{v}_3 = 4 \cdot \hat{j} + 6 \cdot \hat{k}$



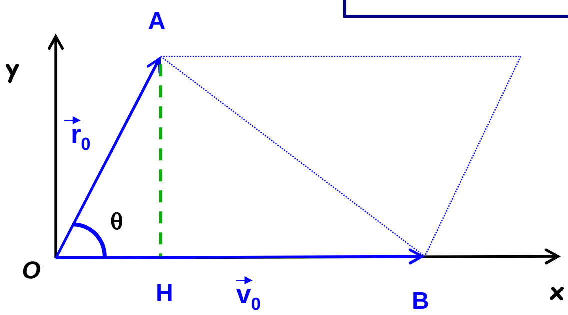
Es. 6

u Calcolare l'area del triangolo determinato dai vettori

$$\vec{v}_1 = 2 \cdot \hat{i} + 7 \cdot \hat{j}$$

$$\vec{v}_2 = 4 \cdot \hat{i} - 3 \cdot \hat{j} - 7 \cdot \hat{k}$$

La figura è un esempio di una rappresentazione generica in due dimensioni, non corrispondente ai vettori dell'esercizio.



Es. 7

- Dati i vettori $\vec{v}_1=2\cdot\hat{i}+7\cdot\hat{j}$, $\vec{v}_2=4\cdot\hat{i}+-3\cdot\hat{j}-7\cdot\hat{k}$ in rappresentazione cartesiana passare alla rappresentazione in coordinate polari e cilindriche. Calcolare il prodotto scalare nella rappresentazione cartesiana e quella cilindrica.

Trasformazioni componenti di un vettore cartesiane-polari

$$v_r=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$$

$$v_\vartheta=\cos^{-1}\left(\frac{v_z}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}\right)$$

$$v_\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$$

Trasformazioni componenti di un vettore cartesiane-cilindriche

$$v_r=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$$

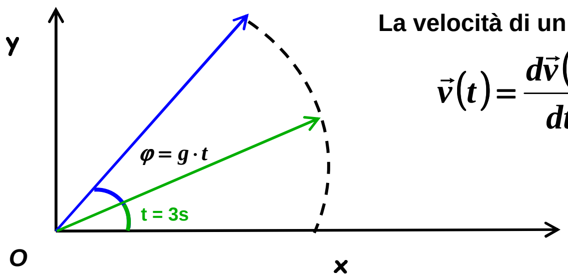
$$v_z=v_z$$

$$v_\varphi=tg^{-1}\left(\frac{v_y}{v_z}\right)$$

Es. 8

- Sia un vettore $\vec{a}=\left(\frac{1}{1+c\cdot t},\quad g\cdot t\right)$ in coordinate polari

disposto su un piano. Determinare il modulo della velocità all'istante $t=3\,s$ sapendo che $g=5\,rad/s$ e $c=2\,s^{-1}$.



La velocità di un vettore è definita :

$$\vec{v}(t)=\frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$