

1 Esercizi di Algebra Vettoriale

1. Siano \mathbf{a} e \mathbf{b} vettori di modulo rispettivamente 3 e 5. Le rette direttrici dei due vettori formano un angolo di $\frac{\pi}{4}$. Calcolare il p.s. (prodotto scalare) di $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.
2. Siano \mathbf{a} e \mathbf{b} vettori di componenti cartesiane (3,7,1) e (-1,6,0). Calcolare il seno dell'angolo compreso tra loro.
3. Dimostrare il teorema di Carnot.
4. Determinare il valore del parametro y per cui i due vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} sono ortogonali. $\mathbf{a}=30\mathbf{i}+2y\mathbf{j}-\mathbf{k}$ e $\mathbf{b}=\mathbf{i}+7\mathbf{j}+y\mathbf{k}$
5. Dimostrare che i vettori $(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ e $(\mathbf{a} - \mathbf{b})$ sono ortogonali solo se \mathbf{a} e \mathbf{b} hanno lo stesso modulo.
6. Siano r una retta nello spazio, \mathbf{b} un vettore orientato lungo r e \mathbf{a} un vettore qualunque. Esprimere la proiezione di \mathbf{a} sulla retta r .
7. Siano $\mathbf{a}=12\mathbf{i}+4\mathbf{k}$ e $\mathbf{b}=5\mathbf{j}-8\mathbf{k}$. Calcolare $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ e rappresentarlo graficamente nel sistema di riferimento $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.
8. Trovare un versore contemporaneamente ortogonale ai 2 vettori \mathbf{a}, \mathbf{b} precedenti.
9. Siano $\mathbf{a}=3\mathbf{i}+3\mathbf{j}-2\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}+7\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=5\mathbf{i}-\mathbf{k}$. Sono complanari? Motivare la risposta.
10. Il segno del prodotto misto di 3 vettori come cambia se si esegue uno scambio di due vettori? E con due scambi?
11. Calcolare $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$ e $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \mathbf{i} + 7\mathbf{j} + \mathbf{k} \\ \vec{B} &= -5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} \\ \vec{C} &= 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}\end{aligned}$$

12. Ricavare i valori di $(\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B}$, $(\vec{B} \times \vec{C}) \cdot \vec{A}$ e $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$ impiegando i vettori precedenti.
13. Dati i tre vettori \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OC} , tracciati sul piano cartesiano (fig.1), determinare:
il valore dell'angolo θ , angolo intercettato dal segmento \overline{CA} e dal segmento \overline{OB} ;
di nuovo il valore di θ dopo aver spostato il punto C nelle coordinate (1,5).
14. Supponendo di conoscere due vettori \mathbf{b}, \mathbf{c} giacenti sul piano π , si calcoli la proiezione di un vettore \mathbf{a} su di una retta ortogonale al piano stesso.

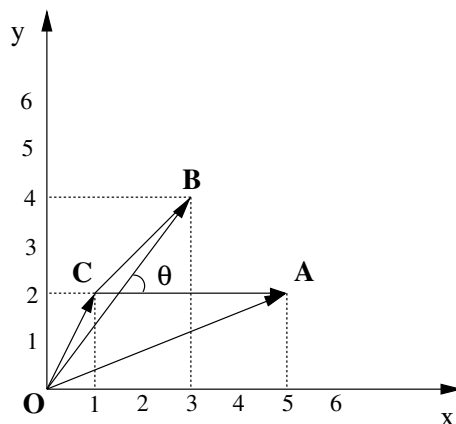


Figure 1: Esercizio 1.1

15. Dati i seguenti tre vettori, con $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ base ortonormale in R^3 :

$$\begin{aligned}\vec{A} &= 4\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 5\mathbf{k} \\ \vec{B} &= -5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 9\mathbf{k} \\ \vec{C} &= \mathbf{i} - 2\mathbf{k}\end{aligned}$$

calcolare il vettore risultante \vec{F} ed esprimerlo in forma cartesiana ed in coordinate polari;

calcolare il volume del parallelepipedo avente per spigoli i tre vettori \vec{A} , \vec{B} , \vec{F} ;

determinare il prodotto scalare di \vec{F} con il vettore \vec{L} definito in coordinate cilindriche: $L_r=3$; $L_\theta = 1$ radiante; $L_h = -1$.

16. Nello spazio euclideo sono dati tre punti $Q(5,10,1)$ $W(1,0,6)$ $E(-4,-5,2)$. Determinare l'area del triangolo di cui Q , W ed E rappresentano i vertici.

17. Prendiamo un cubo di lato l e sia \vec{A} la diagonale di una faccia. Calcolare l'angolo compreso tra il vettore \vec{A} e la diagonale principale del solido.

18. Dimostrare che una qualunque rotazione di un vettore \vec{A} intorno all'asse z si ottiene $\vec{A}' = R(\alpha)\vec{A}$ con $R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

19. Data la relazione $\mathbf{a}^2 + 4\mathbf{b}^2 + 5\mathbf{c}^2 = 0$ determinare la risultante dei tre vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

20. Siano quattro vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$, tali che:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c} + \mathbf{d}$$

con moduli rispettivamente $a=18$, $b=23$, $c=27$, $d=11$. Si determini i valori massimo e minimo che può assumere θ angolo compreso tra \mathbf{a} e \mathbf{b} .

21. Sia \mathbf{L} un vettore di componenti cartesiane parametriche:

$$\mathbf{L} = (a \cos \omega t, bt^2 \sin \omega t, ct \cos 5\omega t)$$

calcolarne la derivata parziale prima rispetto al parametro c e al parametro t . Determinare inoltre il valore dell'integrale di \mathbf{L} calcolato in funzione di t .

22. Sia un vettore \mathbf{a} disposto in un piano. Il vettore presenta un modulo a

$$a = \frac{1}{1 + ct}$$

ed un angolo φ compreso tra la direttrice di \vec{a} e l'asse delle ascisse pari a

$$\varphi = gt$$

Determinare il modulo della velocità all'istante $t=3s$ sapendo che $g=5rad/s$ e $c=2s^{-1}$

23. *Premessa:* Siano \mathbf{F} un vettore e P il suo punto d'applicazione. Si definisce momento di \mathbf{F} rispetto al punto O il vettore \mathbf{M} tale che:

$$\mathbf{M} = (P - O) \times \mathbf{F} \quad (1)$$

Si può pure definire la proiezione del momento \mathbf{M} su di una qualunque retta orientata passante per il punto O come momento assiale di \mathbf{F} :

$$\mathbf{M}_u = (P - O) \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} \quad (2)$$

Due sistemi di vettori si dicono equivalenti se hanno uguali sia la risultante sia il momento risultante¹.

Esercizio: Siano tre vettori

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 &= -5\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 16\mathbf{k} \\ \mathbf{T}_2 &= 19\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 6\mathbf{k} \\ \mathbf{T}_3 &= 10\mathbf{i} - 8\mathbf{j} - 7\mathbf{k} \end{aligned}$$

applicati rispettivamente nei punti $A_1 = (5, -4, 7)$, $A_2 = (0, -7, -3)$, $A_3 = (3, 3, 1)$. Determinare la risultante e il momento risultante calcolato scegliendo O nell'origine degli assi. In seguito prendere O nel punto $(3, 3, 1)$.

¹Queste definizioni torneranno utili nella statica e nei sistemi rotanti, argomenti che verranno descritti successivamente.