Fisica Generale LA N.1

Prova Scritta del 21 Gennaio 2011
Prof. Nicola Semprini Cesari

Meccanica: quesiti

1) La posizione di un punto materiale è espressa dal vettore $\boldsymbol{r} = R\cos\omega t\, \boldsymbol{i} + R\sin\omega t\, \boldsymbol{j}$. Calcolare le espressioni dei vettori velocità ed accelerazione. Calcolare i loro moduli.

2) Due punti materiali P_1 e P_2, aventi rispettivamente massa m_1 e m_2, sono inizialmente tenuti in quiete a distanza r_0 e soggetti esclusivamente alla reciproca attrazione gravitazionale. Calcolare le espressioni dei moduli delle velocità $\boldsymbol{v_1}$ e $\boldsymbol{v_2}$ assunte dai due punti materiali in funzione della loro distanza istantanea $\boldsymbol{r}$, nel caso in cui i due punti vengano lasciati liberi con velocità iniziale nulla.

3) Verificare se il campo di forze $\bar{F} = -\alpha\,\{\,(2xz + z^2)\ \bar{i}\ + 3\,y^2\,\bar{j}\ + (\,x^2 + 2xz\,)\ \bar{k}\,\}$ è conservativo. In caso affermativo calcolare l'espressione dell'energia potenziale.

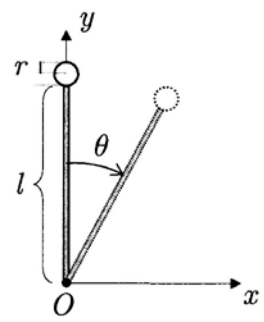
4) Spiegare e commentare in dettaglio la definizione di lavoro meccanico di una forza.

5) Dimostrare il teorema del momento della forza (nel caso di un punto materiale).

Meccanica: problema

Un'asta omogenea ha lunghezza l, spessore trascurabile e massa m_a. Ad una sua estremità è fissato un disco omogeneo di raggio r e massa m_d, mentre l'altra estremità è vincolata ad un asse ortogonale al piano della Figura e passante per il punto O, asse attorno al quale l'asta può ruotare con attrito trascurabile nel piano verticale. L'asta, che si trova inizialmente nella posizione d'equilibrio instabile, ad un dato istante comincia a cadere in seguito a una lieve perturbazione.

Determinare le espressioni delle seguenti grandezze:
a) il momento d'inerzia totale I_O del sistema rispetto all'asse orizzontale passante per O;
b) la coordinata y_G del centro di massa del sistema nella condizione iniziale di equilibrio instabile;
c) la massima velocità angolare ω_{max} assunta dal sistema in funzione di m_a, m_d, I_O, y_G e del modulo dell'accelerazione di gravità g.



SOLUZIONI

Q1

$$\vec{r} = R\cos\omega t\ \vec{i} + R\sin\omega t\ \vec{j}$$
$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = -\omega R\sin\omega t\ \vec{i} + \omega R\cos\omega t\ \vec{j}$$
$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = -\omega^2 R\cos\omega t\ \vec{i} - \omega^2 R\sin\omega t\ \vec{j}$$
$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \omega R$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \omega^2 R$$

Q2

il sistema è isolato e soggetto unicamente a forze conservative, ergo:

$(1/2)\ (m_1\ v^2_1\ +\ m_2\ v^2_2)\ -\gamma\ m_1\ m_2 / r\ = -\gamma\ m_1\ m_2 / r_0$ *(conservazione energia meccanica)*

$m_1\ \bar{v}_1 +\ m_2\ \bar{v}_2\ =\ \bar{0}$ *(conservazione quantità di moto)*

Passando ai moduli (data la centralità della forza), la seconda equazione diventa

$v_2 = (m_1 / m_2)\ v_1$ *da cui*

$$v_1 = m_2 \{\ [2\gamma / (m_1 + m_2)]\ (1/r - 1/r_0)\ \}^{1/2}$$
$$v_2 = m_1 \{\ [2\gamma / (m_1 + m_2)]\ (1/r - 1/r_0)\ \}^{1/2}$$

Q3 $U = \alpha\ (x^2\ z +\ y^3 + z^2 x)$

Soluzione problema

a) $I_0 =\ m_a l^2/3 +\ (1/2)\ m_d r^2 + m_d (l + r)^2$

b) $y_G = 1/(m_a + m_d)\ [m_a l/2 + m_d (l + r)]$

c) ω_{max} *si avrà nella posizione di energia potenziale minima ($\theta = \pi$); applicando la conservazione dell'energia meccanica e la relazione tra energia potenziale della forza peso e quota del centro di massa si ha*

$$(m_a + m_d)\ g\ y_G = (1/2)\ (\omega_{max})^2 - (m_a + m_d) g\ y_G \ \Rightarrow$$

$$\omega_{max} = [\ 4(m_a + m_d) g\ y_G / I_0\ ]^{½}$$