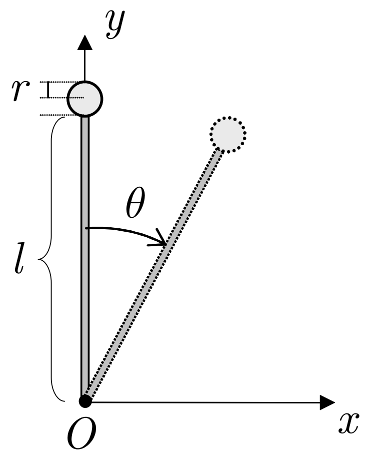
ESAME SCRITTO DI FISICA GENERALE LA

INGEGNERIA GESTIONALE E DEI PROCESSI GESTIONALI A-K,
INFORMATICA E DELL'AUTOMAZIONE, MECCANICA, DELL'AMBIENTE E DEL TERRITORIO E CHIMICA

(Proff. A. Bertin, N. Semprini Cesari, A. Vitale e A. Zoccoli)

28/6/2003



Si consideri un'asta omogenea di lunghezza l, spessore trascurabile e massa m_{a}. Ad un'estremità dell'asta è fissato come in figura un disco omogeneo di raggio r e massa m_{d}; l'altra estremità dell'asta è vincolata con una cerniera cilindrica ideale ad un asse ortogonale al piano (verticale) della figura e passante per il punto O. L'asta, posta inizialmente nella condizione di equilibrio instabile, in seguito ad una lieve perturbazione inizia a cadere. Determinare le espressioni delle seguenti grandezze:

a) il momento d'inerzia totale del sistema rispetto all'asse passante per O;

b) la coordinata y_{G} del baricentro del sistema nell'iniziale condizione di equilibrio instabile;

c) la massima velocità angolare del sistema.

* * *

1) Verificare se il campo di forze $\vec{F}(x,y,z) = -\alpha\left\{(2xz + z^2)\,\vec{i} + 3y^2\,\vec{j} + (x^2 + 2xz)\,\vec{k}\right\}$ è conservativo e calcolarne, eventualmente, l'espressione dell'energia potenziale.

2) Enunciare e dimostrare il teorema delle forze vive.

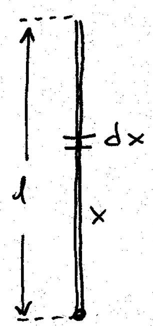
3) Si considerino due masse puntiformi m_1 e m_2 inizialmente in quiete alla distanza r_0 l'una dall'altra e soggette esclusivamente alla reciproca interazione gravitazionale. Calcolare le espressioni delle velocità assunte delle due particelle in funzione dell'istantanea distanza reciproca r.

Soluzioni 2A

PROBLEMA

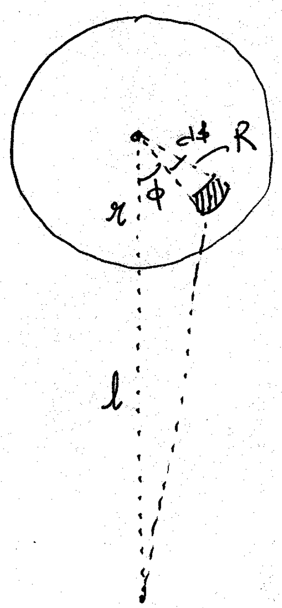
a) $I = \int\limits_{\text{aste + disco}} r^2\, dm = \int\limits_{\text{aste}} r^2\, dm + \int\limits_{\text{disco}} r^2\, dm$

Calcolo $\int\limits_{\text{aste}} r^2\, dm$: Si ha $dm = \lambda\, dx$ da cui $m_a = \lambda \ell$.



$$\int\limits_{\text{aste}} r^2\, dm = \int_0^{\ell} x^2 \lambda\, dx = \lambda \frac{\ell^3}{3} = \frac{m_a \ell^2}{3}$$

Calcolo $\int\limits_{\text{disco}} r^2\, dm$. Si ha $dm = \sigma R\, dR\, d\phi$



$$\int\limits_{\text{disco}} r^2\, dm = \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{r} \left[R^2 + (r+\ell)^2 - 2R(r+\ell)\cos\phi\right] \sigma R\, d\phi\, dR$$

dove si è applicato il teorema di Carnot.

$$\int\limits_{\text{disco}} r^2\, dm = \sigma \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{r} R^3\, d\phi\, dR + \sigma (r+\ell)^2 \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{r} R\, d\phi\, dR$$

$$- 2\sigma(r+\ell) \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{r} R^2\, d\phi\, dR \cos\phi$$

$$= 2\pi\sigma \frac{r^4}{4} + 2\pi\sigma (r+\ell)^2 \frac{r^2}{2}$$

Si noti che il terzo integrale è nullo dato che

$$2\sigma(r+\ell) \int_0^{r} R^2\, dR \int_0^{2\pi} \cos\phi\, d\phi = 2\sigma(r+\ell)\frac{r^3}{3}\left(\sin\phi\right)_0^{2\pi} = 0$$

Tenendo conto che $\pi r^2 \sigma = m_d$ si ottiene

$$\int_{disco} r^2\,dm = \frac{1}{2} m_d r^2 + m_d (r+l)^2$$

Otteniamo allora $I = \frac{1}{3} m_a l^2 + \frac{1}{2} m_d r^2 + m_d (r+l)^2$

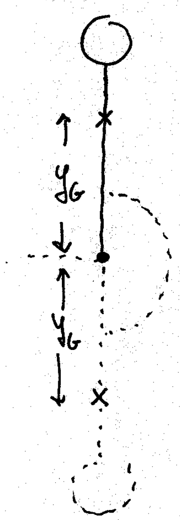
b) la coordinata y del CM è data dalla formula

$$y_G = \frac{\int y\,dm}{\int dm} = \frac{\int_{asta+disco} y\,dm}{\int_{asta+disco} dm} = \frac{\int_{asta} y\,dm + \int_{disco} y\,dm}{m_a + m_d} =$$

$$= \frac{m_a \frac{\int_{asta} y\,dm}{m_a} + m_d \frac{\int_{disco} y\,dm}{m_d}}{m_a + m_d} = \frac{m_a y_{asta} + m_d y_{disco}}{m_a + m_d}$$

$$= \frac{m_a \frac{l}{2} + m_d (l+r)}{m_a + m_d}$$

c) Si ha evidentemente la massima velocità angolare quando il centro di massa del sistema raggiunge il suo punto più basso, ovvero quando l'asta è ruotata di un angolo pari a π.



$$(m_a + m_d) g\, y_G = -(m_a + m_d) g\, y_G + \frac{1}{2} I \omega_{max}^2$$

$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{4 (m_a + m_d) g\, y_G}{I}}$$

Q1

$$\nabla \wedge \vec{F} = (-\alpha) \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xz+z^2 & 3y^2 & x^2+2xz \end{vmatrix} =$$

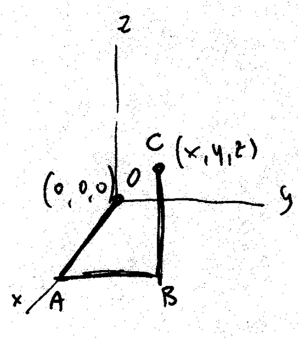
$$= (-\alpha)\left[\hat{i}(0) - \hat{j}(2x+2z-2x-2z) + \hat{k}(0)\right]$$

$= \vec{0}$. Il campo è conservativo.

$$V(x,y,z) = -\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} \alpha\left[(2xz+z^2)\hat{i} + 3y^2\hat{j} + (x^2+2xz)\hat{k}\right] \cdot$$

$$\cdot \left[dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}\right] =$$

$$= \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} \alpha\left[(2xz+z^2)\,dx + 3y^2\,dy + (x^2+2xz)\,dz\right] =$$



$$= \int_A^B \alpha\, 3y^2\,dy + \int_B^C \alpha(x^2+2xz)\,dz =$$

$$= 3\alpha \frac{1}{3} y^3 + \alpha x^2 z + 2\alpha x \frac{1}{2} z^2$$

$$= \alpha y^3 + \alpha x^2 z + \alpha x z^2$$

Q3

$$\begin{cases} \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - G\frac{m_1 m_2}{r} = -G\frac{m_1 m_2}{r_0} \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0 \end{cases}$$

$$v_1 = m_2 \left[\frac{2G}{m_1+m_2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)\right]^{1/2}$$

$$v_2 = m_1 \left[\frac{2G}{m_1+m_2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)\right]^{1/2}$$