Fisica Generale LA N.1

Prova Scritta del 1 Luglio 2009
Prof. Nicola Semprini Cesari

Quesiti

---

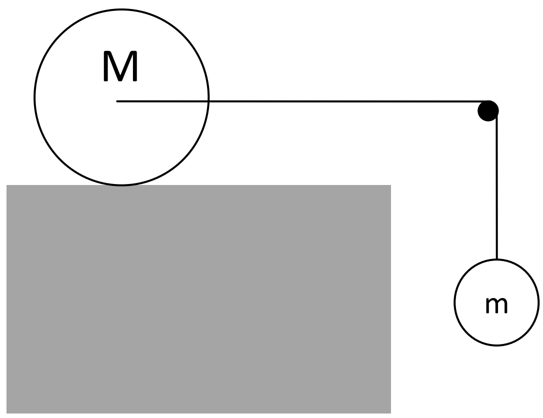
1) Un punto materiale si muove nel piano verticale secondo le equazioni orarie $x = v_{0x}t$, $y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$. Calcolare, nella posizione di massima quota, la curvatura della traiettoria.

2) Un punto materiale di massa *m* si muove lungo una guida ideale circolare di raggio *R* disposta su di un piano verticale. Nel momento in cui il punto materiale raggiunge la massima quota la reazione vincolare eguaglia in modulo direzione e verso la forza peso. Calcolare modulo direzione e verso della reazione vincolare nel punto di minima quota.

3) Un punto materiale di massa *m=16 Kg*, soggetto alla sola azione della forza posizionale $\vec{f} = a\,xy\vec{i} + b\,xy^2\vec{j} + c\,xy^3\vec{k}$ ($a = 1N/m^2;\ b = 1N/m^3;\ c = 1N/m^4$), si muove lungo una guida rettilinea priva di attrito dal punto *(0,4,0)* al punto *(x_f,4,0)*. Calcolare x_f sapendo che la velocità iniziale del punto materiale è nulla mentre quella finale vale *v=4 m/s*,

4) Ai capi di una asticella inestensibile di massa trascurabile e lunghezza *L* sono fissate due masse puntiformi di valore m_1 ed m_2. Appoggiata su di un piano orizzontale privo di attrito l'asticella ruota con velocità angolare costante. Determinare il rapporto m_1/m_2 affinchè la massa m_1 descriva un cerchio di raggio *L/5*.

5) Calcolare l'accelerazione della massa *m* nella ipotesi che il disco omogeneo di massa *M* e raggio *R* rotoli senza strisciare e che lo scorrimento del filo sul piolo sia privo di attrito.



6) Dimostrare che in coordinate intrinseche l'accelerazione è espressa dalla formula $\vec{a} = \ddot{s}\,\vec{t} + \frac{\dot{s}^2}{R}\vec{n}$.

7) Dimostrare che in un sistema rigido di punti materiali vale la relazione $T = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$.

8) Enunciare e commentare le leggi di Keplero.

Soluzioni

1)

$$x = v_{0x} t, \quad y = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2, \qquad z = 0 \qquad massima\ quota \qquad \dot{y} = v_{0y} - gt = 0 \qquad t = \frac{v_{0y}}{g}$$

$$\dot{x} = v_{0x}\,;\ \dot{y} = 0;\ \dot{z} = 0 \qquad \vec{v} = v_{0x}\vec{i}$$

$$\ddot{x} = 0; \quad \ddot{y} = -g; \quad \ddot{z} = 0 \qquad \vec{a} = -g\,\vec{j}$$

$$ma \qquad \vec{a} = \ddot{s}\,\vec{t} + \frac{v^2}{R}\vec{n} = \ddot{s}\,\vec{i} - \frac{v^2}{R}\,\vec{j} = -g\,\vec{j} \qquad da\,cui \quad R = \frac{v^2}{g} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{g} = \frac{v_{0x}^2}{g}$$

2)

$$Posizione\ di\ massima\ quota \quad R_1 - mg = -m\frac{v_1^2}{R} = -mg \qquad v_1^2 = g\,R$$

$$Posizione\ di\ minima\ quota \quad R_2 - mg = m\frac{v_2^2}{R} \quad ma \quad \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = mg\,2R \quad da\,cui \quad v_2^2 = v_1^2 + 4gR = 5gR$$

$$si\ ottiene\ allora \quad R_2 = mg + m\frac{v_2^2}{R} = mg + \frac{m}{R}5gR = 6\,mg$$

3)

$$\vec{f} = x\,y\,\vec{i} + x\,y^2\vec{j} + x\,y^3\vec{k}$$

$$\int_A^B \vec{f}\cdot d\,\vec{s} = T_B - T_A \qquad \int_{(x_i,y_i,z_i)}^{(x_f,y_f,z_f)} (x\,y\,\vec{i} + x\,y^2\vec{j} + x\,y^3\vec{k})\cdot(d\,x\,\vec{i}) = \int_{(x_i,y_i,z_i)}^{(x_f,y_f,z_f)} x\,y\,d\,x = \frac{1}{2}(y_f\,x_f^2 - y_i\,x_i^2) = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2)$$

$$da\ cui \qquad x_f = \sqrt{\frac{y_i\,x_i^2 + m(v_f^2 - v_i^2)}{y_f}} = \sqrt{\frac{16\times16}{4}} = 8\,m$$

4)

Essendo nulla la risultante delle forze esterne agenti sul sistema il suo centro di massa deve essere in quiete. D'altra parte il sistema è posto in rotazione per cui non può che ruotare attorno ad un asse passante per il centro di massa. Questo significa che le masse descrivono cerchi di raggio pari alle loro distanze dal centro di massa:

$$scegliendo\ un\ asse\,con\ l'origine\ sulla\ prima\ massa\ si\,ha \quad \vec{r}_1 = \vec{0}\ e\ \vec{r}_2 = L\,\vec{i}$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2\,L}{m_1 + m_2}\vec{i} \qquad r_1^* = |\vec{r}_1 - \vec{r}_{cm}| = \frac{m_2\,L}{m_1 + m_2} = \frac{L}{5} \qquad da\ cui \quad \frac{m_1}{m_2} = 4$$

5)

Dalle equazioni cardinali valide per il disco e dalla equazione di Newton valida per il punto materiale si ha il sistema

$T + T_a = M\,\ddot{x}$

$se \quad \vec{\omega} = \vec{k} \quad allora \quad (-R\vec{j}) \wedge (T_a\,\vec{i}\,) \cdot \vec{k} = I\,\ddot{\phi} \qquad da\ cui$

$R\ T_a = I\,\ddot{\phi}$

$T - mg = m\ddot{y}$

$\ddot{x} = -\ddot{y}$

$\ddot{\phi}R = -\ddot{x}$

dopo qualche semplice sostituzione si ha $\ddot{y} = -\dfrac{m}{\dfrac{I}{R^2} + M + m}\,g = -\dfrac{m}{\dfrac{3}{2}M + m}\,g$