Fisica Generale LA **N.1**

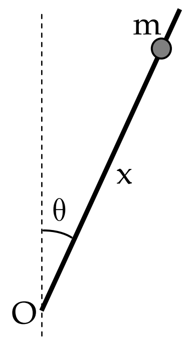
Prova Scritta del 9 Settembre 2010
Prof. Nicola Semprini Cesari

Meccanica: quesiti

1) Al tempo $t=0$ una carrozza ferroviaria comincia a muoversi di moto rettilineo uniformemente accelerato (a). Al tempo $t=t_0$, da un certo punto P un osservatore a bordo della carrozza lancia lungo la verticale verso l'alto un punto materiale di massa m con velocità $v=v_0$. Determinare a quale distanza da P il punto materiale cadrà sul pavimento della carrozza (si trascuri l'attrito dell'aria e si supponga la carrozza sufficientemente alta).

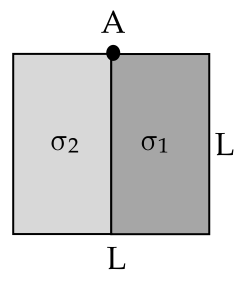
2) Due punti materiali $\boldsymbol{P_1}$ e $\boldsymbol{P_2}$ aventi la stessa massa inerziale $\boldsymbol{m = 1\ g}$ sono lanciati verso l'alto, in assenza di attrito, con velocità avente lo stesso modulo $\boldsymbol{v = 100\ m\ s^{-1}}$, ma rispettivamente lungo la verticale ($\boldsymbol{P_1}$) e lungo una direzione che forma un angolo di $\boldsymbol{\pi/3}$ con l'orizzontale ($\boldsymbol{P_2}$). Determinare i valori delle massime quote $\boldsymbol{h_1}$ *e* $\boldsymbol{h_2}$ raggiunte dai due punti materiali.

3) Una massa m è libera di scorrere senza attrito lungo un'asta liscia posta in rotazione con velocità angolare ω attorno all'asse verticale tratteggiato nella figura. Determinare a quale distanza x da O si deve posizionare la massa affinché si trovi in equilibrio.



4) Un campo di forza è definito in tutto lo spazio dall'espressione $\boldsymbol{\bar{F} = (2k_1y^2z^3 + k_2)\ \bar{i} + 4k_1x\ yz^3\ \bar{j} + 6k_1x\ y^2z^2\ \bar{k}}$, con $\boldsymbol{k_1}$ e $\boldsymbol{k_2}$ costanti note aventi le opportune dimensioni. Verificare se il campo è conservativo, e in tal caso determinarne l'energia potenziale $\boldsymbol{V}$.

5) Una lastra quadrata di lato L è costituita da due materiali di densità superficiale σ_1 e σ_2 rispettivamente. Determinare l'angolo all'equilibrio (rispetto alla verticale) formato dalla linea di separazione dei due materiali qualora la lastra venga sospesa ad un asse normale al foglio e passante per il punto A.



6) Commentare e mostrare i passaggi che conducono alla formulazione della prima equazione cardinale della meccanica.

7) Formulare e dimostrare il teorema di Konig per il momento angolare.

Esercizio 1

$$\textit{posizione e velocità del punto P della carrozza rispetto a terra}$$

$$X(t) = \frac{1}{2} a t^2$$

$$\dot{X}(t) = a t$$

$$\textit{posizione del punto materiale rispetto a terra}$$

$$x(t) = x_0 + \dot{x}_0 t \qquad x_0 = \frac{1}{2} a t_0^2 \qquad \dot{x}_0 = a t_0$$

$$y(t) = \dot{y}_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad \dot{y}_0 = v_0$$

$$\textit{durata del volo del punto materiale}$$

$$v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \qquad \Delta t = \frac{2v_0}{g}$$

$$\textit{spazio percorso in direzione arizzontale dal punto materiale}$$

$$\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0) = a t_0 \frac{2v_0}{g}$$

$$\textit{spazio percorso in direzione orizzontale dal punto P della carrozza}$$

$$\Delta X = X(t_0 + \Delta t) - X(t_0) = \frac{1}{2} a \Delta t^2 + a t_0 \Delta t = \frac{1}{2} a (\frac{2v_0}{g})^2 + a t_0 \frac{2v_0}{g}$$

$$\textit{differenza dei percorsi}$$

$$d = \Delta X - \Delta x = \frac{1}{2} a (\frac{2v_0}{g})^2 + a t_0 \frac{2v_0}{g} - a t_0 \frac{2v_0}{g} = \frac{2 a v_0^2}{g^2}$$

Esercizio 2

La quota massima si raggiunge a $h = \frac{1}{2}\frac{v_y^2}{g} \Rightarrow h_1 = \frac{1}{2}\frac{v_1^2}{g} = \frac{1}{2}\frac{(100)^2}{9.81}$; $510m$ mentre

$$h_2 = \frac{1}{2}\frac{\left(v_2 \sin\frac{\pi}{3}\right)^2}{g} = \frac{1}{2}\frac{\left(100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{9.81} \; ; \; 382m$$

Esercizio 3

Assumiamo un riferimento xy con l'asse y lungo l'asse di rotazione. Le forze agenti sul punto materiale valgono

$$\vec{R} = R\ \sin\vartheta\ \vec{j} - R\cos\vartheta\ \vec{i}$$

$$\vec{P} = -mg\ \vec{j}$$

All'equilibrio si deve avere

$$\vec{R} + \vec{P} = -m\,\omega^2\,(x\sin\vartheta)\,\vec{i}$$

otteniamo allora

$$R\ \sin\vartheta\ \vec{j} - R\cos\vartheta\ \vec{i} - mg\ \vec{j} = -m\,\omega^2\,(x\sin\vartheta)\,\vec{i}$$

$$\begin{cases} R\ \sin\vartheta = mg \\ R\cos\vartheta = m\,\omega^2\,(x\sin\vartheta) \end{cases} \qquad \begin{cases} R = mg/\sin\vartheta \\ (mg/\sin\vartheta)\cos\vartheta = m\,\omega^2\,(x\sin\vartheta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} - \\ x = \dfrac{g}{\omega^2}\dfrac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta^2} \end{cases}$$

Esercizio 4

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = 4k_1 yz^3 = \frac{\partial F_y}{\partial x};\quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = 6k_1 y^2 z^2 = \frac{\partial F_z}{\partial x};\quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = 12k_1 xyz^2 = \frac{\partial F_z}{\partial y};\ \text{=> campo conservativo}$$

$$-V = \int_{(0,0,0)}^{(x,0,0)} \left(2k_1 y^2 z^3 + k_2\right)dx + \int_{(x,0,0)}^{(x,y,0)} 4k_1 xyz^3\, dy + \int_{(x,y,0)}^{(x,y,z)} 6k_1 xy^2 z^2\, dz = k_2 x + 2k_1 xy^2 z^3$$

Esercizio 5

Assumiamo un riferimento xy con l'origine in A e l'asse Y lungo la linea di separazione dei due mezzi.

Il centro di massa della lastra è posizionato in

$$Y = -L/2$$

$$X = \frac{\sigma_1 L^2 \frac{L}{4} + \sigma_2 L^2 (-\frac{L}{4})}{\sigma_1 L^2 + \sigma_2 L^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}\frac{L}{4}$$

L'angolo cercato altro non è che l'angolo formato dalla congiungente il centro di massa con l'origine e la direzione verticale

$$\vartheta = arctg\left|\frac{X}{Y}\right| = arctg\left(\frac{1}{2}\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}\right)$$