Fisica Generale LA N.1

Prova Scritta del 11 Gennaio 2011
Prof. Nicola Semprini Cesari

Meccanica: quesiti

1) Dimostrare la validità della seguente relazione: $\vec{r} \wedge \vec{f} = \dfrac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \vec{p}) + \vec{v}_{\Omega} \wedge \vec{p}$.

2) Scrivere le equazioni cartesiane del moto di un punto materiale di massa m posto in un campo di forze che ha per energia potenziale l'espressione $V(x,y,z) = \alpha z^2$, sapendo che al tempo $t=0$ il punto si trova nella posizione definita dalla terna di coordinate $(0,0,z_0)$ con velocità data da $\vec{v} = v_0 \vec{i}$.

3) Discutere le proprietà delle forze inerziali.

Meccanica: problema

Un'asta omogenea di sezione trascurabile, lunghezza l e massa $M = 3m$ può ruotare senza attrito attorno ad un asse orizzontale fisso che passa per il suo centro ed è ortogonale ad essa. L'asta inizialmente è in quiete in posizione orizzontale. Un punto materiale di massa m cade (partendo da fermo) da una quota h e si fissa istantaneamente a un'estremità dell'asta, ponendola in rotazione. Determinare le espressioni delle seguenti quantità:
a) il momento d' inerzia I_{tot} del sistema (dopo l'urto) rispetto all' asse di rotazione;
b) il modulo v della velocità che il punto materiale possiede quando colpisce l'asta;
c) il modulo ω della velocità angolare assunta dal sistema nell'istante immediatamente successivo all'urto, trascurando la forza peso agente sul punto materiale dato il carattere istantaneo dell'urto;
d) l'altezza minima dalla quale deve cadere il punto materiale perché il sistema compia un giro completo attorno all'asse orizzontale.

Quesiti

2) Le derivate parziali dell'energia potenziale con il segno cambiato danno componenti nulle della forza agente lungo gli assi x e y, e $F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -2\alpha z$; applicando il secondo principio della dinamica si ha $\vec{F} = m\vec{a} \equiv ma_z\vec{k} = -2\alpha z\vec{k}$ cioè, passando ai moduli, $\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{2\alpha z}{m} = 0$ equazione di oscillazioni armoniche nella coordinata z che ha soluzione $\boxed{z(t) = z_0 \cos\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}t}$, che soddisfa la condizione iniziale $z(t=0)=z_0$. Inoltre si ha evidentemente, dato che non vi son componenti di forza sugli altri due assi, $y(t)=y(0)=0$ e $x(t)=v_0t$.

Problema

a) Il momento d' inerzia I_{tot} del sistema è dato dalla somma di quello dell'asta I_a e di quello del punto materiale I_m rispetto all'asse di rotazione

$I_a = 2\int_0^{l/2} \frac{M}{l}x^2dx = 2\frac{M}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{l/2} = 2\frac{M}{l}\frac{l^3}{24} = \frac{1}{12}3ml^2 = \frac{1}{4}ml^2$ e

$I_m = m\left[\frac{l}{2}\right]^2 = \frac{ml^2}{4}$ per cui $I_{tot} = \frac{ml^2}{2}$.

b) $v = \sqrt{2gh}$

c) Potendo trascurare la forza peso del punto materiale ed essendo quella dell'asta compensata dalla reazione del vincolo, il sistema può essere trattato come isolato, e pertanto si può applicare la conservazione del momento della quantità di moto calcolato rispetto al centro dell'asta tra l'istante immediatamente precedente e quello immediatamente successivo all'urto, cioè riferendosi ai moduli $mv\frac{l}{2} = I_{tot}\omega$ ovvero

$\omega = \frac{mv\, l/2}{ml^2/2} = \frac{v}{l} = \frac{\sqrt{2gh}}{l}$.

d) L'energia cinetica all'inizio del movimento di rotazione dev'essere maggiore del guadagno in energia potenziale dell'intero sistema (rispetto alla posizione iniziale) quando l'estremo nel quale è fissato il punto materiale si trova nella posizione più alta. La corrispondente disequazione è $\frac{1}{2}I_{tot}\omega^2 \geq mg\frac{l}{2}$, vale a dire $\frac{1}{2}\frac{ml^2}{2}\frac{2gh}{l^2} = \frac{1}{2}mgh \geq \frac{1}{2}mgl$ cioè $h \geq l$.