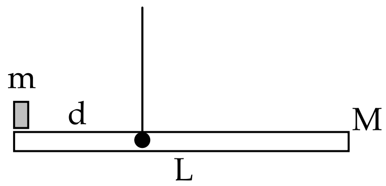
Fisica Generale LA N.1

Prova Scritta del 12 Setembre 2007

Proff. A.Bertin, A.Vitale, M.Villa. A.Zoccoli, N. Semprini Cesari.

Quesiti

1) Un'asta di lunghezza L e massa M è sospesa attraverso una funicella applicata ad una distanza d da un suo estremo. Calcolare il valore di m affinché l'asta si disponga orizzontalmente una volta raggiunto l'equilibrio.



2) Verificare se il campo di forze:

$$\vec{F}(x,y,z) = \alpha\left(yz^2\left(2xy+z^2\right)\vec{i} + xz^2\left(2xy+z^2\right)\vec{j} + 2xyz\left(xy+2z^2\right)\vec{k}\right)$$

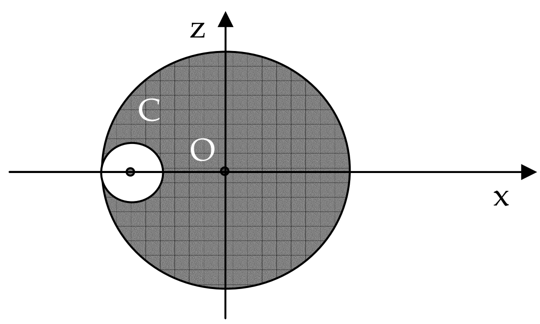
è conservativo e calcolarne, eventualmente, l'espressione dell'energia potenziale. Trovare il lavoro fatto dal campo di forze su una traiettoria rettilinea che congiunge il punto A(L,0,-L) con il punto B(L,L,2L).

3) Descrivere le proprietà dei sistemi di riferimento inerziali e non inerziali

4) Dimostrare il teorema del momento della forza.

Problema

Sia dato il sistema rappresentato in figura e schematizzabile come un disco di spessore trascurabile, centro O e raggio R, dotato di un foro, anch'esso circolare, di raggio $R/4$, il cui centro C disti $(3/4)R$ dal punto O. Supponendo che il sistema abbia una distribuzione di massa omogenea di densità superficiale σ, calcolare le espressioni delle seguenti grandezze fisiche:



1) la posizione del centro di massa del sistema rispetto ad una terna di assi cartesiani coordinati Oxyz, aventi origine in O e con l'asse delle ascisse individuato dal vettore (O-C);

Supponendo che il sistema sia posto in un piano verticale e vincolato da un perno nel punto O calcolare le espressioni:

2) del momento rispetto al punto O della forza peso agente sul sistema;

3) della posizione del centro di massa una volta raggiunto l'equilibrio statico.

Soluzioni

Quesiti

1)
$$mgd + M\frac{d}{L}g\frac{d}{2} - M\frac{L-d}{L}g\frac{L-d}{2} = 0$$
$$m = M\left(\frac{L}{2d} - 1\right)$$

2)
$$U = \alpha\left(x^2y^2z^2 + xyz^4\right)$$
$$L = U(B) - U(A) = \alpha\left(4L^6 + 16L^6 - 0\right) = 20\alpha L^6$$

Problema

Per motivi di simmetria il centro di massa deve trovarsi sull'asse x.

a) Si può pensare il sistema come la sovrapposizione di due dischi omogenei, uno di densità superficiale di massa positiva e l'altro negativa. Così facendo il centro di massa si calcola facilmente con la seguente somma:

$$x_{CM} = \frac{M_{DiscoP}x_O - m_{DiscoV}x_C}{M_{DiscoP} - m_{DiscoV}} = \frac{\sigma\pi R^2 \cdot 0 - \sigma\pi\left(\frac{R}{4}\right)^2 \cdot \left(-\frac{3R}{4}\right)}{\sigma\pi\left(1 - \frac{1}{16}\right)R^2} = \frac{\frac{1}{16}\cdot\frac{3R}{4}}{\frac{15}{16}} = \frac{1}{20}R$$

oppure

b) Se il disco fosse pieno il centro di massa sarebbe individuato dal punto O. Il disco pieno è dato dalla somma del sistema (disco bucato) più il disco piccolo e quindi il centro di massa è dato dalla seguente espressione:

$$x_{DiscoP} = \frac{M_{Sistema}x_{Sistema} + m_{DiscoV}x_C}{M_{Sistema} + m_{DiscoV}} = 0$$

$$x_{Sistema} = \frac{(M_{Sistema} + m_{DiscoV})x_{DiscoP} - m_{DiscoV}x_C}{M_{Sistema}} = \frac{\sigma\pi R^2 \cdot 0 - \sigma\pi\left(\frac{R}{4}\right)^2 \cdot \left(-\frac{3R}{4}\right)}{\sigma\pi\left(1 - \frac{1}{16}\right)R^2} = \frac{\frac{1}{16}\cdot\frac{3R}{4}}{\frac{15}{16}} = \frac{1}{20}R$$

2) La forza gravitazionale è applicata nel CM
$$\Rightarrow \vec{M} = x_{CM}\vec{i} \wedge (M - m)\vec{g} = \frac{1}{20}R\left(\frac{15}{16}\sigma\pi R^2\right)g\vec{j} = \frac{3}{64}\sigma\pi R^3 g\vec{j}$$

3) La posizione di equilibrio si raggiunge quando il momento delle forze è nullo, cioè quando il CM si trova sull'asse z: $CM = \left(0, 0, -\frac{1}{20}R\right)$