Fisica Generale T-A N.1

Prova scritta del 20 giugno 2011

Prof. Nicola Semprini Cesari

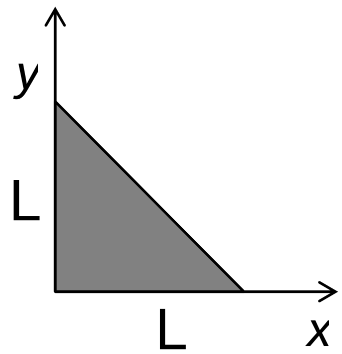
Meccanica

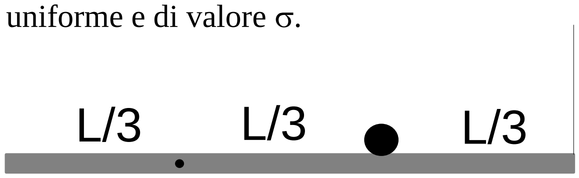
---

1) Un punto materiale si muove su di una traiettoria circolare di raggio $R=4m$ secondo l'equazione oraria $s=2t^2+2$. Trovare l'espressione dell'angolo formato dai vettori velocità ed accelerazione.

2) Un punto materiale di massa m è soggetto all'azione della forza $\vec{f} = -mg\vec{j}$.Esprimere l'equazione della traiettoria nel caso in cui i vettori posizione e velocità iniziali siano$\vec{r_0} = 4\vec{j}$ e $\vec{v_0} = \sqrt{g}\vec{i}$.

3) Assumendo il riferimento indicato in figura calcolare la posizione del centro di massa del triangolo rettangolo nella ipotesi che la densità superficiale di massa sia uniforme e di valore σ.





4) Sia data una sbarra di lunghezza L, massa M e densità lineare uniforme λ incernierata ad un terzo della sua lunghezza. Nella ipotesi che la massa appoggiata valga m determinare: i) la tensione della fune affinché la sbarra sia in equilibrio; ii) il momento d'inerzia della sbarra; iii) l'accelerazione angolare iniziale qualora il filo venga tagliato.

5) Commentare il concetto di massa inerziale.

6) Dimostrare che la prima equazione cardinale è l'equazione del moto del centro di massa (primo teorema del centro di massa).

7) Dimostrare il teorema di Huygens-Steiner.

Soluzioni

Q1

$$\dot{s} = 4t \qquad \ddot{s} = 4 \qquad \vec{v} = 4t\,\vec{t} \qquad \vec{a} = 4\vec{t} + \frac{16t^2}{4}\vec{n} \qquad |\vec{v}| = 4t \qquad |\vec{a}| = \sqrt{16+16t^4} = 4\sqrt{1+t^4}$$

$$\vartheta = arcos\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{a}|}\right) = arcos\left(\frac{16t}{4t\,4\sqrt{1+t^4}}\right) = arcos\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\right)$$

Q2

$$\vec{f} = -mg\,\vec{j} = m\left(\ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j}\right) \qquad \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ -g = \ddot{y} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x_0 + v_{ox}t \\ y = y_0 + v_{oy}t - \frac{1}{2}g\,t^2 \end{cases}$$

$$\vec{r}_0 = 4\,\vec{j} \qquad (x_0, y_0) = (0,4) \qquad \vec{v}_0 = \sqrt{g}\;\vec{i} \qquad (v_{0x}, v_{0y}) = \left(\sqrt{g}, 0\right)$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{g}\,t \\ y = 4 - \frac{1}{2}g\,t^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} t = \frac{x}{\sqrt{g}} \\ y = 4 - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{g} \end{cases} \qquad y = 4 - \frac{x^2}{2}$$

Q3

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{r}_i}{M}$$

$$Y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\,y_i}{M} \qquad Y_{CM} = \frac{\int_0^L \int_0^{L-x} y\,\sigma\,dx\,dy}{M} = \frac{\frac{1}{2}\sigma\frac{1}{3}L^3}{M} = \frac{1}{3}L \qquad inoltre \quad X_{CM} = Y_{CM} = \frac{1}{6}L$$

Q4

$$i)\ \vec{M}^e = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad \frac{L}{6}\vec{j}\wedge(-Mg\,\vec{k}) + \frac{L}{3}\vec{j}\wedge(-mg\,\vec{k}) + \frac{2L}{3}\vec{j}\wedge T\,\vec{k} = \vec{0}$$

$$(-Mg\frac{L}{6} - mg\frac{L}{3} + \frac{2L}{3}T)\,\vec{i} = \vec{0} \qquad T = \frac{M+2m}{4}g$$

$$ii)\ I = \int_{-L/3}^{2/3\,L} x^2\lambda\,dx = \frac{1}{9}ML^2$$

$$iii)\ \hat{\omega}\cdot\vec{M}^e = I_\omega\ddot{\varphi} \qquad \ddot{\varphi} = \frac{\hat{\omega}\cdot\vec{M}^e}{I_\omega}$$

$$\hat{\omega} = \vec{i} \qquad \vec{M}^e = (-Mg\frac{L}{6} - mg\frac{L}{3})\,\vec{i} \qquad \hat{\omega}\cdot\vec{M}^e = \vec{i}\cdot(-Mg\frac{L}{6} - mg\frac{L}{3})\,\vec{i} = -\frac{M+2m}{6}g\,L$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{-\frac{M+2m}{6}g\,L}{\frac{1}{9}ML^2} = -\frac{3}{2}\frac{M+2m}{M}\frac{g}{L}$$