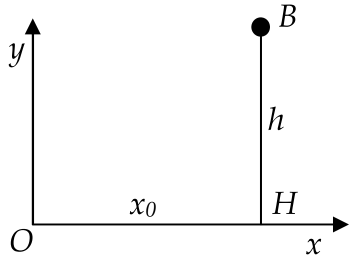
Fisica Generale LA N.1

Prova Scritta del 22 Luglio 2010
Prof. Nicola Semprini Cesari

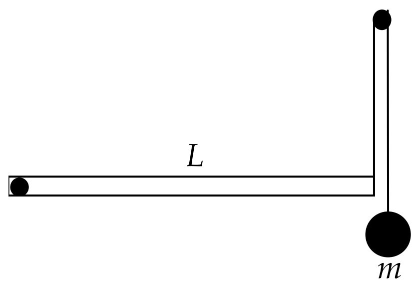
Meccanica: quesiti

1) Dall'origine di un riferimento *OXY* un proiettile viene scagliato con velocità di modulo $\boldsymbol{v}$ nella direzione del bersaglio *B*. A quale distanza dal bersaglio stesso il proiettile colpirà la parete *BH* ?



2) Un punto materiale di massa *m*, libero di muoversi nello spazio, è soggetto all'azione della forza $\vec{f} = \alpha \vec{\imath}$. Determinare le equazioni orarie del moto.

3) Un'asta rigida e omogenea di lunghezza *L* e massa *M*, incernierata ad un estremo, è sostenuta in posizione orizzontale da un filo inestensibile e da un peso come mostrato in figura. Determinare il valore della massa *m* e della reazione vincolare fornita dalla cerniera (mostrare i calcoli in dettaglio).



4) Un sistema meccanico, in quiete su un piano orizzontale liscio, è composto da un disco omogeneo di spessore trascurabile, massa $\boldsymbol{2M}$ e raggio $\boldsymbol{R}$, e da un punto materiale di massa $\boldsymbol{M}$, posto a distanza $\boldsymbol{2R}$ dal centro del disco. Calcolare le espressioni: a) della distanza $\boldsymbol{D}$ del centro di massa del sistema dal centro del disco; b) del momento d'inerzia $\boldsymbol{I_{CM}}$ del sistema rispetto ad un asse baricentrico perpendicolare al piano orizzontale.

5) Mostrare e commentare i passaggi che conducono alla espressione delle forze inerziali.

6) Enunciare e dimostrare il teorema di Konig per la quantità di moto.

Meccanica: problema

Un punto materiale $\boldsymbol{P}$ di massa $\boldsymbol{2M}$ si trova nell'origine d'un sistema di riferimento cartesiano con velocità $\overline{\boldsymbol{v}} = v_0\, \boldsymbol{i} + v_0\, \boldsymbol{j}$ ed è soggetto a un campo di forza conservativo la cui energia potenziale è data dall'espressione $\boldsymbol{V}(x,y,z) = Ay^2z + Bx - C$, dove *A*, *B* e *C* sono costanti aventi opportune dimensioni.

Determinare le espressioni

a) del modulo dell' accelerazione tangenziale del punto **P.**
b) del raggio di curvatura $\boldsymbol{\rho}$ della traiettoria.

Q1

$$\begin{cases} y = v\dfrac{h}{\sqrt{h^2+x_0^2}}t - \dfrac{1}{2}gt^2 \\ x = v\dfrac{x_0}{\sqrt{h^2+x_0^2}}t \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ x_0 = v\dfrac{x_0}{\sqrt{h^2+x_0^2}}t \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ t = \dfrac{\sqrt{h^2+x_0^2}}{v} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = v\dfrac{h}{\sqrt{h^2+x_0^2}}\dfrac{\sqrt{h^2+x_0^2}}{v} - \dfrac{1}{2}g\dfrac{(h^2+x_0^2)}{v^2} \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} y = h - \dfrac{1}{2}g\dfrac{(h^2+x_0^2)}{v^2} \\ - \end{cases}$$

$$\Delta y = h - y = \frac{1}{2}g\frac{(h^2+x_0^2)}{v^2}$$

Q2

$$\begin{cases} \alpha = m\ddot{x} \\ 0 = m\ddot{y} \\ 0 = m\ddot{z} \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{\alpha}{m} \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x_0 + \dot{x}_0 t + \dfrac{1}{2}\dfrac{\alpha}{m}t^2 \\ y = y_0 + \dot{y}_0 t \\ z = z_0 + \dot{z}_0 t \end{cases}$$

Q3

$a)$ $(\dfrac{L}{2}\vec{j}) \wedge (-Mg\,\vec{k}) + (L\vec{j}) \wedge (mg\,\vec{k}) = \vec{0}$ $\qquad -\dfrac{L}{2}Mg + mgL = 0$ $\qquad m = \dfrac{M}{2}$

$b)$ $R\,\vec{k} - Mg\vec{k} + \dfrac{M}{2}g\vec{k} = \vec{0}$ $\qquad \vec{R} = \dfrac{M}{2}g\vec{k}$

Q4

a) La distanza del CM dal centro del disco sulla retta che unisce i due oggetti vale: $D = \dfrac{2M\cdot 0 + M\cdot 2R}{2M+M} = \dfrac{2}{3}R$.

b)

$$I_s = I_{disco} + I_{punto};$$

$$I_{disco}^{CM} = I_{disco}^{centro} + 2MD^2 = \frac{1}{2}2MR^2 + 2M\frac{4}{9}R^2 = \frac{17}{9}MR^2$$

$$I_{punto} = M\left(2R - \frac{2}{3}R\right)^2 = \frac{16}{9}MR^2$$

$$I_s^{CM} = \left(\frac{17}{9} + \frac{16}{9}\right)MR^2 = \frac{11}{3}MR^2$$

Soluzione problema

La forza F cui è soggetto il punto materiale vale: $\vec{F}(x,y,z) = -\left(B\vec{\imath} + 2Ayz\vec{\jmath} + Ay^2\vec{k}\right)$

a) Nel punto P=(0,0,0) $\vec{F}(P) = -B\vec{\imath}$ che posso scrivere in componenti intrinseche come:

$$\vec{t} = \frac{\vec{v}}{|v|} = \frac{v_0\vec{\imath} + v_0\vec{\jmath}}{\sqrt{2}v_0} = \frac{\vec{\imath} + \vec{\jmath}}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{n} \perp \vec{t} \Rightarrow \vec{n} = \frac{\vec{\imath} - \vec{\jmath}}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{F}(P) = -B\vec{\imath} = -\frac{1}{\sqrt{2}}B\frac{\vec{\imath} + \vec{\jmath}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}B\frac{\vec{\imath} - \vec{\jmath}}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}B\vec{t} - \frac{1}{\sqrt{2}}B\vec{n} = 2Ma_t\vec{t} + 2Ma_n\vec{n}$$

$$a_t = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{B}{2M}$$

b) Il raggio di curvatura si ricava dalla componente normale dell'accelerazione.

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{B}{2M} = \frac{|\vec{v}|^2}{\rho} = \frac{2v_0^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{4\sqrt{2}Mv_0^2}{B}$$