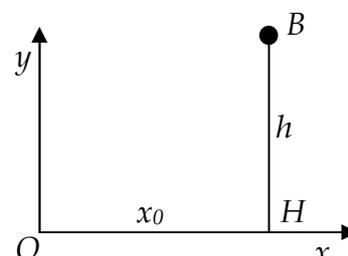


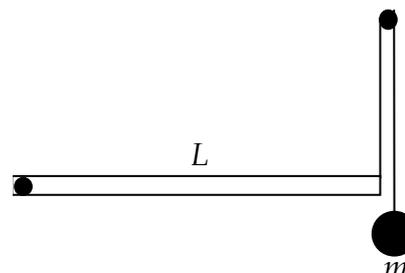
Meccanica: quesiti

1) Dall'origine di un riferimento OXY un proiettile viene scagliato con velocità di modulo v nella direzione del bersaglio B . A quale distanza dal bersaglio stesso il proiettile colpirà la parete BH ?



2) Un punto materiale di massa m , libero di muoversi nello spazio, è soggetto all'azione della forza $\vec{f} = a\vec{r}$. Determinare le equazioni orarie del moto.

3) Un'asta rigida e omogenea di lunghezza L e massa M , incernierata ad un estremo, è sostenuta in posizione orizzontale da un filo inestensibile e da un peso come mostrato in figura. Determinare il valore della massa m e della reazione vincolare fornita dalla cerniera (mostrare i calcoli in dettaglio).



4) Un sistema meccanico, in quiete su un piano orizzontale liscio, è composto da un disco omogeneo di spessore trascurabile, massa $2M$ e raggio R , e da un punto materiale di massa M , posto a distanza $2R$ dal centro del disco. Calcolare le espressioni: a) della distanza D del centro di massa del sistema dal centro del disco; b) del momento d'inerzia I_{CM} del sistema rispetto ad un asse baricentrico perpendicolare al piano orizzontale.

5) Mostrare e commentare i passaggi che conducono alla espressione delle forze inerziali.

6) Enunciare e dimostrare il teorema di König per la quantità di moto.

Meccanica: problema

Un punto materiale P di massa $2M$ si trova nell'origine d'un sistema di riferimento cartesiano con velocità $\vec{v} = v_0 \vec{i} + v_0 \vec{j}$ ed è soggetto a un campo di forza conservativo la cui energia potenziale è data dall'espressione $V(x,y,z) = Ay^2z + Bx - C$, dove A , B e C sono costanti aventi opportune dimensioni.

Determinare le espressioni

- del modulo dell'accelerazione tangenziale del punto P .
- del raggio di curvatura ρ della traiettoria.

Termodinamica: problema

Una mole d'un gas perfetto monoatomico compie una trasformazione reversibile descritta dalla relazione $p = bT^2$ con b costante nota, nella quale la temperatura passa dal valore iniziale T_0 al valore finale $T_f < T_0$. Determinare le espressioni delle seguenti quantità:

- a) il lavoro L compiuto dal gas.
- b) la quantità di calore Q scambiata dal gas.
- c) la variazione di entropia ΔS del gas.

Soluzioni Meccanica

Q1

$$\begin{cases} y = v \frac{h}{\sqrt{h^2 + x_0^2}} t - \frac{1}{2} g t^2 \\ x = v \frac{x_0}{\sqrt{h^2 + x_0^2}} t \end{cases} \begin{cases} - \\ x_0 = v \frac{x_0}{\sqrt{h^2 + x_0^2}} t \end{cases} \begin{cases} - \\ t = \frac{\sqrt{h^2 + x_0^2}}{v} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = v \frac{h}{\sqrt{h^2 + x_0^2}} \frac{\sqrt{h^2 + x_0^2}}{v} - \frac{1}{2} g \frac{(h^2 + x_0^2)}{v^2} \\ - \end{cases} \begin{cases} y = h - \frac{1}{2} g \frac{(h^2 + x_0^2)}{v^2} \\ - \end{cases}$$

$$\Delta y = h - y = \frac{1}{2} g \frac{(h^2 + x_0^2)}{v^2}$$

Q2

$$\begin{cases} \alpha = m\ddot{x} \\ 0 = m\ddot{y} \\ 0 = m\ddot{z} \end{cases} \begin{cases} \ddot{x} = \frac{\alpha}{m} \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} \begin{cases} x = x_0 + \dot{x}_0 t + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{m} t^2 \\ y = y_0 + \dot{y}_0 t \\ z = z_0 + \dot{z}_0 t \end{cases}$$

Q3

$$\begin{aligned} a) \left(\frac{L}{2} \vec{j}\right) \wedge (-Mg \vec{k}) + (L\vec{j}) \wedge (mg \vec{k}) &= \vec{0} & -\frac{L}{2} Mg + mgL &= 0 & m &= \frac{M}{2} \\ b) R \vec{k} - Mg \vec{k} + \frac{M}{2} g \vec{k} &= \vec{0} & \vec{R} &= \frac{M}{2} g \vec{k} \end{aligned}$$

Q4

a) La distanza del CM dal centro del disco sulla retta che unisce i due oggetti vale:

$$D = \frac{2M \cdot 0 + M \cdot 2R}{2M + M} = \frac{2}{3} R.$$

b)

$$I_s = I_{disco} + I_{punto};$$

$$I_{disco}^{CM} = I_{disco}^{centro} + 2MD^2 = \frac{1}{2}2MR^2 + 2M\frac{4}{9}R^2 = \frac{17}{9}MR^2$$

$$I_{punto} = M\left(2R - \frac{2}{3}R\right)^2 = \frac{16}{9}MR^2$$

$$I_s^{CM} = \left(\frac{17}{9} + \frac{16}{9}\right)MR^2 = \frac{11}{3}MR^2$$

Soluzione problema

La forza F cui è soggetto il punto materiale vale: $\vec{F}(x, y, z) = -(B\vec{i} + 2Ayz\vec{j} + Ay^2\vec{k})$

a) Nel punto $P=(0,0,0)$ $\vec{F}(P) = -B\vec{i}$ che posso scrivere in componenti intrinseche come:

$$\vec{t} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{v_0\vec{i} + v_0\vec{j}}{\sqrt{2}v_0} = \frac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{n} \perp \vec{t} \Rightarrow \vec{n} = \frac{\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{F}(P) = -B\vec{i} = -\frac{1}{\sqrt{2}}B\frac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}B\frac{\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}B\vec{t} - \frac{1}{\sqrt{2}}B\vec{n} = 2Ma_t\vec{t} + 2Ma_n\vec{n}$$

$$a_t = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{B}{2M}$$

b) Il raggio di curvatura si ricava dalla componente normale dell'accelerazione.

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{B}{2M} = \frac{|\vec{v}|^2}{\rho} = \frac{2v_0^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{4\sqrt{2}Mv_0^2}{B}$$

Termodinamica

a)

$$L = \int p dV$$

$$pV = nRT \Rightarrow V = \frac{nRT}{p} = \frac{nRT}{bT^2} = \frac{nR}{bT}$$

$$dV = -\frac{nR}{bT^2} dT$$

$$L = \int p dV = \int_{T_f}^{T_0} -bT^2 \frac{nR}{bT^2} dT = \int_{T_0}^{T_f} nR dT = nR(T_0 - T_f)$$

b) $Q = \Delta U + L = nc_v(T_f - T_0) - nR(T_f - T_0) = \frac{1}{2}R(T_f - T_0);$

$$\text{c) } \Delta S = \int_{T_0}^{T_f} \frac{dQ}{T} = \int_{T_0}^{T_f} \frac{nc_v dT - nRdT}{T} = (nc_v - nR) \int_{T_0}^{T_f} \frac{dT}{T} = \frac{1}{2} R \ln \frac{T_f}{T_0}$$