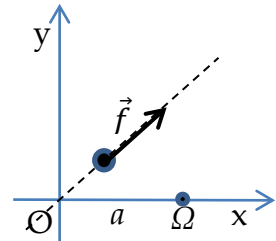
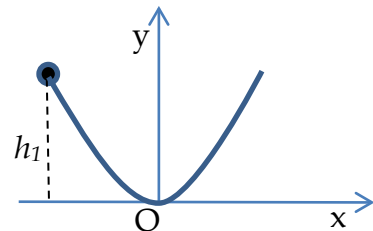


Meccanica: quesiti

1) Esprimere il momento della forza applicata al punto materiale nel riferimento indicato in figura, assumendo il punto Ω come polo di riduzione e nella ipotesi che la traiettoria sia inclinata di un angolo $\alpha=45^\circ$.



2) Un corpo di massa m scivola, senza attrito, lungo un profilo parabolico di equazione $y = a x^2$ partendo da una quota h_1 . Determinare il vettore velocità nell'istante in cui la sua direzione risulta inclinata di un angolo $\alpha=45^\circ$ (esprimere la condizione su h_1 affinché il problema ammetta soluzione).



3) Verificare se il campo di forza $\vec{F} = \alpha [yz(4x^3 + y^3 + z^3)\vec{i} + xz(x^3 + 4y^3 + z^3)\vec{j} + xy(x^3 + y^3 + 4z^3)\vec{k}]$ è conservativo e in tal caso determinarne l'espressione dell'energia potenziale (α costante).

4) Commentare il concetto di momento di un vettore. Enunciare e dimostrare il teorema del momento della forza nel caso di un punto materiale.

5) Commentare il concetto di massa gravitazionale, illustrare le sue proprietà, indicarne l'unità di misura.

Meccanica: problema

Un satellite artificiale di massa m viene lanciato verticalmente verso l'alto dalla superficie della Terra (che assumiamo di raggio R_T e massa M_T). Trascurando il moto della Terra stessa, determinare le espressioni delle seguenti quantità:

- il modulo v_T della velocità che il satellite deve possedere al momento del lancio per potersi inserire in un'orbita circolare con centro nel centro della terra e raggio $R_o = 2 R_T$.
- il modulo della velocità che il satellite deve possedere al momento del lancio per poter uscire con velocità trascurabile dal campo gravitazionale terrestre.

MECCANICA

1)

Il momento può essere calcolato in un qualunque istante, scegliamo allora quello in cui la traiettoria interseca la verticale passante per Ω . Si ha

$$\vec{r} = a \operatorname{tg} \alpha \vec{j} \quad \vec{f} = f \cos \alpha \vec{i} + f \sin \alpha \vec{j} \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\vec{m} = \vec{r} \wedge \vec{f} = a \operatorname{tg} \alpha \vec{j} \wedge (f \cos \alpha \vec{i} + f \sin \alpha \vec{j}) = -a f \sin \alpha \vec{k} = -\frac{\sqrt{2}}{2} a f \vec{k}$$

2)

La tangente dell'angolo della direzione del vettore velocità è data da $\frac{dy}{dx} = 2ax$ ed ha

valore unitario nel punto $2ax=1$ da cui $x = \frac{1}{2a}$.

In tale punto la quota vale $y = ax^2 = a \frac{1}{4a^2} = \frac{1}{4a}$ da cui si ottiene la velocità

$$v = \sqrt{2g \left(h_1 - \frac{1}{4a} \right)} \quad \text{con la condizione } h_1 \geq \frac{1}{4a}.$$

3)

Il rotazionale è nullo, e quindi il campo è conservativo. Se si integra sul percorso a zig-zag che porta prima dall'origine a $(x,0,0)$ poi a $(x,y,0)$ tutti e tre gli addendi del prodotto $\vec{F} \cdot dx\vec{i} + \vec{F} \cdot dy\vec{j} + \vec{F} \cdot dz\vec{k}$ si annullano o perché hanno a fattor comune una coordinata $z=0$ o per annullamento del prodotto scalare tra versori ortogonali. Resta solamente l'integrale della componente z della forza da $(x,y,0)$ a (x,y,z) , cioè

$$\int_0^z \alpha xy (x^3 + y^3 + 4z^3) dz = \alpha xyz (x^3 + y^3 + z^3) = -V$$

Problema

- a) L'equilibrio dinamico nell'orbita di raggio R_o è regolato dalla formulazione matematica del II principio della dinamica, cioè dalla relazione $\gamma \frac{mM_T}{R_o^2} = m \frac{v_o^2}{R_o}$ che dà $v_o = \sqrt{\frac{\gamma M_T}{R_o}}$ e $\frac{1}{4} \gamma \frac{mM_T}{R_T} - \frac{\gamma mM_T}{R_o} = \frac{1}{2mv_T^2} - \frac{\gamma mM_T}{R_T} T_o = \frac{1}{2} \gamma \frac{mM_T}{R_o} = \frac{1}{4} \gamma \frac{mM_T}{R_T}$ per la corrispondente energia cinetica.

D'altra parte, la proprietà di conservazione dell'energia meccanica tra la situazione in orbita e il momento del lancio è sancita dalla relazione $T_o + V_o = T_{lancio} + V_{R_T}$, cioè

$$\frac{1}{2} mv_T^2 = \frac{1}{4} \gamma \frac{mM_T}{R_T} - \frac{\gamma mM_T}{2R_T} + \frac{\gamma mM_T}{R_T} \quad \text{da cui} \quad \frac{1}{2} mv_T^2 = \frac{1}{4} \gamma \frac{mM_T}{R_T} - \frac{\gamma mM_T}{2R_T} + \frac{\gamma mM_T}{R_T} \quad \text{e}$$

$$v_T = \sqrt{\frac{3\gamma M_T}{2R_T}}.$$

- b) La domanda equivale a chiedere qual' è la velocità al lancio per raggiungere distanza infinita con energia cinetica nulla. Si tratta in sostanza della velocità di fuga, definita dalla relazione $\frac{1}{2}mv_T^2 - \frac{\gamma m M_T}{R_T} = 0$ che dà appunto $v_T = \sqrt{\frac{2\gamma M_T}{R_T}}$.