Fisica Generale LA N.2

Prova Scritta del 17 Luglio 2008
Prof. Nicola Semprini Cesari

Quesiti

1) Un punto materiale di massa m si muove su di un piano orizzontale liscio con le seguenti equazioni orarie: $x(t) = A\cos(\omega\, t)$ e $y(t) = Bsen(\omega\, t)$ dove A, B ed ω sono costanti positive. Determinare:
   a) l'equazione della traiettoria;
   b) l'espressione dei vettori velocità ed accelerazione all'istante $t=\pi/\omega$;
   c) il raggio di curvatura ρ della traiettoria allo stesso istante.

2) Stabilire se il campo di forze $\vec{F} = -3\alpha x^2 \cdot \vec{i} - \beta z^3 \cdot \vec{j} - 3\beta y z^2 \vec{k}$ è conservativo e calcolarne, eventualmente, la funzione energia potenziale. Quali sono le dimensioni e le unità di misura delle costanti α e β ?

3) Dimostrare la relazione di Poisson $\dfrac{d\hat{i}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{i}$

4) Spiegare e commentare le equazioni cardinali della meccanica.

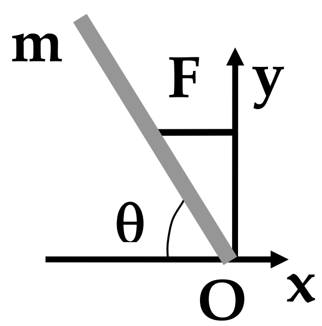
Problema

Un'asta omogenea di massa m e lunghezza $2L$ è incernierata nel punto O su di un piano orizzontale ed è libera di ruotare nel piano verticale. L'asta è inizialmente fissata nel suo baricentro con una fune F inestensibile come mostrato in figura, e forma con il piano orizzontale un angolo θ=60°. Determinare l'espressione delle seguenti quantità:

a. La tensione T della fune e le componenti orizzontale R_x e verticale R_y della reazione vincolare in O.

Supponendo che ad un certo istante la fune F venga tagliata:

b. il modulo dell'accelerazione angolare della sbarra;
c. la velocità v_0 del baricentro della sbarra quando questa tocca il pavimento.



Soluzioni

Q1

a) Mettendo a sistema le leggi orarie, quadrando e sommando membro a membro si ottiene l'equazione di un'ellisse di semiassi A e B $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$

b) derivando una volta o due volte le leggi orarie, e sostituendo al tempo generico quello richiesto: $\vec{v}(\pi/\omega)=-\omega B\cdot\vec{j}$ $\quad\quad$ $\vec{a}(\pi/\omega)=\omega^2 A\cdot\vec{i}$

c) poiché l'accelerazione è perpendicolare alla velocità, ha solo componente normale alla traiettoria e si ha $\frac{\omega^2 B^2}{\rho}=\omega^2 A$ da cui $\rho=\frac{B^2}{A^2}$

Q2

Il rotore del campo è nullo, dunque il campo è conservativo. Calcolando il lavoro su un cammino rettilineo a tratti tra l'origine e il punto generico C(*x,y,z*) si ottiene l'energia potenziale $V=\alpha x^3+\beta yz^3$. La costante □ ha dimensioni [M $L^{-2}T^{-2}$]e unità di misura N/m^3 oppure Kg/m^2s^2, mentre □ ha dimensioni [$ML^{-1}T^{-2}$] e si misura in N/m^2

Problema

Le forze presenti sono: la forza peso $\vec{P}$ dell'asta, la Tensione $\vec{T}$ della fune e la reazione $\vec{R}$ del vincolo in O. Il sistema è inizialmente in equilibrio statico, quindi devono essere soddisfatte le equazioni cardinali della statica: $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i=0$ e $\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i=0$. Rispetto al sistema di riferimento della figura ricaviamo l'espressione della tensione T dalla seconda equazione (si è scelto il polo per il calcolo dei momenti nell'origine), e l'espressione delle componenti della reazione vincolare dalla prima:

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i=0 \rightarrow LT\sin\theta-Lmg\cos\theta=0 \quad \text{da cui} \quad \vec{T}=\frac{mg}{\sqrt{3}}\cdot\vec{i}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i=0 \rightarrow \begin{cases}T+R_x=0\\P+R_y=0\end{cases} \text{da cui} \begin{cases}R_x=-T=-\frac{mg}{\sqrt{3}}\\R_y=mg\end{cases}$$

b) $\vec{M}\cdot\hat{\omega}=I_\omega\ddot{\phi}$ dove $I=m\frac{4L^2}{3}$ e $\vec{M}\cdot\hat{\omega}=-mgL\cos\theta \rightarrow \ddot{\phi}=\frac{3g}{8L}$

c) cons. dell'energia $\frac{1}{2}I\omega^2=2mg\frac{L}{2}\sin\theta \rightarrow \omega=\sqrt{\frac{3\sqrt{3}g}{4L}} \rightarrow v_o=L\sqrt{\frac{3\sqrt{3}g}{4L}}=\sqrt{\frac{3\sqrt{3}gL}{4}}$