Fisica Generale T-A N.2

Prova scritta del 20 giugno 2011

Prof. Nicola Semprini Cesari

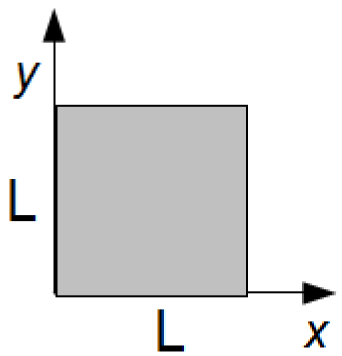
Meccanica

---

1) Un punto materiale si muove secondo l'equazione oraria $x=5t+3$ e $y=4$. Trovare l'espressione dell'angolo formato dai vettori posizione e velocità.

2) Un punto materiale di massa $m=4$ Kg è soggetto all'azione della forza $\vec{f} = -4\dot{x}\vec{i}$. Esprimere la velocità in funzione del tempo nel caso in cui $\dot{x}(0) = 5\,m/s$.

3) Assumendo il riferimento indicato calcolare il momento d'inerzia rispetto ad un asse passante per l'origine e normale al piano della figura nella ipotesi che la densità superficiale di massa sia uniforme e di valore σ.

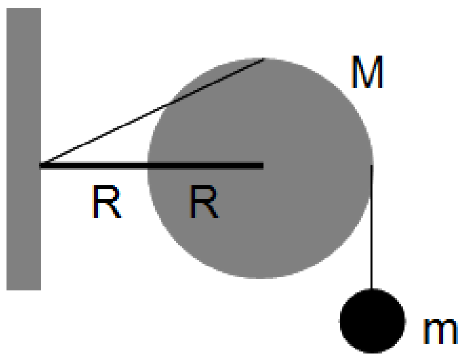


4) Sia data una ruota di raggio R, massa M e densità superficiale di massa uniforme σ sostenuta da un braccio orizzontale fissato al muro. Nella ipotesi che la massa appesa al bordo valga m determinare i) la tensione della fune affinché la ruota sia in equilibrio; ii) il momento d'inerzia della ruota; iii) l'accelerazione angolare qualora il filo venga tagliato.

5) Commentare il concetto di massa gravitazionale.

6) Commentare il principio di azione e reazione.

7) Dimostrare il teorema di Konig per l'energia cinetica.



Soluzioni

Q1

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = (5t+3)\vec{i} + 4\vec{j} \qquad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = 5\vec{i} \qquad |\vec{r}| = \sqrt{(5t+3)^2 + 16} \qquad |\vec{v}| = 5$$

$$\vartheta = \frac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{|\vec{r}||\vec{v}|} = \frac{\left((5t+3)\vec{i} + 4\vec{j}\right)\cdot 5\vec{i}}{5\sqrt{(5t+3)^2+16}} = \frac{5t+3}{\sqrt{5(5t^2+6t+5)}}$$

Q2

$$\vec{f} = -4\dot{x}\vec{i} = m(\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}) \qquad \begin{cases} -4\dot{x} = m\ddot{x} \\ \ddot{y} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -4\dot{x} = m\dfrac{d\dot{x}}{dt} \\ \dot{y} = v_{0y} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{-4}{m}dt = \dfrac{d\dot{x}}{\dot{x}} \\ ------- \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{x}_0 \exp(-\dfrac{4}{m}t) \\ --------- \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = 5\exp(-\dfrac{4}{m}t) \\ --------- \end{cases}$$

Q3 $$I = \iint r^2 dm = \int_0^L\int_0^L (x^2+y^2)\sigma\, dx\, dy = \frac{2}{3}\sigma L^4 = \frac{2}{3}ML^2$$

Q4

$$\hat{\omega}\cdot\vec{M}^e = I_\omega\ddot{\varphi} \qquad \hat{\omega} = \vec{i}$$

$i)$ $$\vec{M}^e = R\vec{j}\wedge(-mg\vec{k}) + R\vec{k}\wedge(-\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{k}) \qquad \hat{\omega}\cdot\vec{M}^e = 0$$

$$\vec{i}\cdot(R\vec{j}\wedge(-mg\vec{k}) + R\vec{k}\wedge(-T\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j} - T\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{k})) = \quad -mgR - TR\frac{2}{\sqrt{5}} = 0 \qquad T = \frac{\sqrt{5}}{2}mg$$

$ii)$ $$I = \int_0^{2\pi}\int_0^R \sigma r^3 d\varphi\, dr = \sigma 2\pi\frac{R^4}{4} = \frac{1}{2}MR^2$$

$iii)$ $$\ddot{\varphi} = \frac{\hat{\omega}\cdot\vec{M}^e}{I_\omega} = \frac{\vec{i}\cdot R\vec{j}\wedge(-mg\vec{k})}{\frac{1}{2}MR^2} = -\frac{2m}{MR}g$$