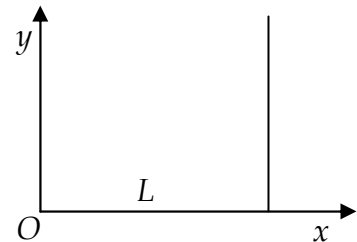


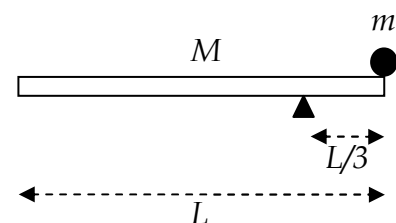
Quesiti

1) Dall'origine di un riferimento OXY un proiettile viene scagliato con velocità di modulo v lungo una direzione inclinata di un angolo α rispetto all'asse X . A quale altezza il proiettile colpirà la parete ?



2) Un punto materiale di massa m è vincolato a muoversi su di una circonferenza di raggio R . Trascurando gli attriti si determini l'equazione oraria del moto nel caso sia soggetto ad una forza costante tangenziale di modulo k .

3) Un'asta rigida e omogenea di lunghezza L e massa M è appoggiata, in equilibrio, su di un fulcro posto ad una distanza $L/3$ da un suo estremo. Determinare il valore della massa puntiforme m e della reazione vincolare fornita dal fulcro (mostrare i calcoli in dettaglio).



4) Un sistema meccanico, in quiete su un piano orizzontale liscio, è composto da una sbarra omogenea di dimensioni trasversali trascurabili, massa $2M$ e lunghezza $L/2$, e da due punti materiali, ciascuno di massa $2M$, allineati con la sbarra e situati da una stessa parte rispetto a questa. Il centro C della sbarra e ciascuno dei due punti materiali sono posti a distanza $2L$ l'uno dall'altro. Calcolare le espressioni: a) della distanza D del centro di massa del sistema dal centro della sbarra; b) del momento d'inerzia I_{CM} del sistema rispetto ad un asse baricentrico perpendicolare al piano orizzontale.

5) Mostrare e commentare i passaggi che conducono alla formulazione matematica del principio di azione e reazione.

6) Enunciare e dimostrare il teorema di König per l'energia cinetica di un corpo rigido in rotazione attorno ad un asse fisso.

Problema

Un punto materiale P di massa M si trova nell'origine di un sistema di riferimento cartesiano con velocità $\vec{v} = 2v_0 \mathbf{i} + 2v_0 \mathbf{k}$ ed è soggetto a un campo di forza conservativo la cui energia potenziale è data dall'espressione $V(x,y,z) = Ax^2y + Bz - C$, dove A , B e C sono costanti aventi opportune dimensioni.

Determinare le espressioni

- del modulo dell'accelerazione tangenziale del punto P .
- del raggio di curvatura ρ della traiettoria.

Soluzioni

Q1

$$\begin{cases} y = v \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2 \\ x = v \cos \alpha t \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ L = v \cos \alpha t \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ t = \frac{L}{v \cos \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = v \sin \alpha \frac{L}{v \cos \alpha} - \frac{1}{2} g \left(\frac{L}{v \cos \alpha} \right)^2 \\ - \end{cases} \quad h = L t g \alpha - \frac{1}{2} g \left(\frac{L}{v \cos \alpha} \right)^2$$

Q2

$$k = m \ddot{s} \quad \ddot{s} = \frac{k}{m} \quad s = s_0 + \dot{s}_0 t + \frac{1}{2} \frac{k}{m} t^2$$

Q3

$$a) -\left(\frac{L}{2} - \frac{L}{3}\right) \vec{j} \wedge (-Mg \vec{k}) + \left(\frac{L}{3} \vec{j}\right) \wedge (-mg \vec{k}) = \vec{0} \quad \frac{L}{6} Mg - \frac{L}{3} mg = 0 \quad m = \frac{M}{2}$$

$$b) R \vec{k} - Mg \vec{k} - \frac{M}{2} g \vec{k} = \vec{0} \quad \vec{R} = \frac{3}{2} Mg \vec{k}$$

Q4

a) La distanza del CM dal centro della sbarra sulla retta che unisce i tre oggetti vale:

$$D = \frac{2M \cdot 0 + 2M \cdot 2L + 2M \cdot 4L}{2M + 2M + 2M} = \frac{12}{6} L = 2L.$$

b)

$$I_s = I_{sbarra} + I_{punto1} + I_{punto2};$$

$$I_{sbarra}^{CM} = I_{sbarra}^{centro} + 2MD^2$$

$$I_{sbarra}^{centro} = \int_{-L/4}^{+L/4} \frac{2M}{L/2} x^2 dx = \frac{4M}{L} \frac{x^3}{3} \Big|_{-L/4}^{L/4} = \frac{4M}{L} \frac{2}{3} \frac{L^3}{4 \cdot 16} = \frac{1}{24} ML^2$$

$$2MD^2 = 2M \cdot 4L^2 = 8ML^2$$

$$I_{sbarra}^{CM} = \frac{1}{24} ML^2 + 8ML^2$$

$$I_{punto1} = 0$$

$$I_{punto2} = 2M \cdot 4L^2 = 8ML^2$$

$$I_s^{CM} = \left(\frac{1}{24} + 8 + 8 \right) ML^2 = \frac{385}{24} ML^2$$

Soluzione problema

La forza F cui è soggetto il punto materiale vale: $\vec{F}(x, y, z) = -(2Axy\vec{i} + Ax^2\vec{j} + B\vec{k})$

a) Nel punto $P=(0,0,0)$ $\vec{F}(P) = -B\vec{k}$ che posso scrivere in componenti intrinseche come:

$$\vec{t} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{2v_0\vec{i} + 2v_0\vec{k}}{2\sqrt{2}v_0} = \frac{\vec{i} + \vec{k}}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{n} \perp \vec{t} \Rightarrow \vec{n} = \frac{\vec{i} - \vec{k}}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{F}(P) = -B\vec{k} = -\frac{1}{\sqrt{2}}B\frac{\vec{i} + \vec{k}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}B\frac{\vec{i} - \vec{k}}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}B\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}B\vec{n} = Ma_t\vec{t} + Ma_n\vec{n}$$

$$a_t = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{B}{M}$$

b) Il raggio di curvatura si ricava dalla componente normale dell'accelerazione.

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{B}{M} = \frac{|\vec{v}|^2}{\rho} = \frac{8v_0^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{8\sqrt{2}Mv_0^2}{B}$$