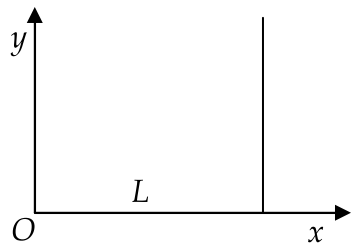
Fisica Generale LA N.2

Prova Scritta del 22 Luglio 2010
Prof. Nicola Semprini Cesari

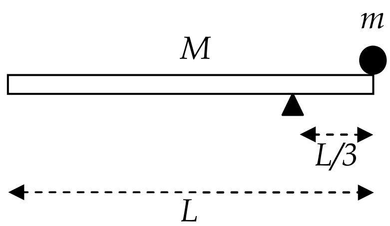
Meccanica: quesiti

1) Dall'origine di un riferimento *OXY* un proiettile viene scagliato con velocità di modulo $\boldsymbol{v}$ lungo una direzione inclinata di un angolo α rispetto all'asse *X*. A quale altezza il proiettile colpirà la parete ?



2) Un punto materiale di massa *m* è vincolato a muoversi su di una circonferenza di raggio *R*. Trascurando gli attriti si determini l'equazione oraria del moto nel caso sia soggetto ad una forza costante tangenziale di modulo *k*.

3) Un'asta rigida e omogenea di lunghezza *L* e massa *M* è appoggiata, in equilibrio, su di un fulcro posto ad una distanza *L/3* da un suo estremo. Determinare il valore della massa puntiforme *m* e della reazione vincolare fornita dal fulcro (mostrare i calcoli in dettaglio).



4) Un sistema meccanico, in quiete su un piano orizzontale liscio, è composto da una sbarra omogenea di dimensioni trasversali trascurabili, massa **2*M*** e lunghezza ***L/2***, e da due punti materiali, ciascuno di massa **2*M***, allineati con la sbarra e situati da una stessa parte rispetto a questa. Il centro ***C*** della sbarra e ciascuno dei due punti materiali sono posti a distanza **2*L*** l'uno dall'altro. Calcolare le espressioni: a) della distanza ***D*** del centro di massa del sistema dal centro della sbarra; b) del momento d'inerzia $\boldsymbol{I_{CM}}$ del sistema rispetto ad un asse baricentrico perpendicolare al piano orizzontale.

5) Mostrare e commentare i passaggi che conducono alla formulazione matematica del principio di azione e reazione.

6) Enunciare e dimostrare il teorema di Konig per l'energia cinetica di un corpo rigido in rotazione attorno ad un asse fisso.

Meccanica: problema

Un punto materiale ***P*** di massa ***M*** si trova nell'origine di un sistema di riferimento cartesiano con velocità $\overline{\boldsymbol{v}} = 2v_0\,\boldsymbol{i} + 2v_0\,\boldsymbol{k}$ ed è soggetto a un campo di forza conservativo la cui energia potenziale è data dall'espressione $\boldsymbol{V}(x,y,z) = Ax^2y + Bz - C$, dove *A*, *B* e *C* sono costanti aventi opportune dimensioni.

Determinare le espressioni

a) del modulo dell' accelerazione tangenziale del punto ***P***.
b) del raggio di curvatura $\boldsymbol{\rho}$ della traiettoria.

Termodinamica: problema

Un gas perfetto monoatomico compie un'espansione reversibile (da un volume iniziale V_i a un volume finale V_f) descritta dalla relazione $p^2V = k$ con k costante nota.

a) si deduca se la temperatura finale è maggiore, minore o uguale a quella iniziale.

Si determinino le espressioni

b) della variazione di energia interna ΔU del gas.

c) della capacità termica del gas in funzione della costante R dei gas.

Soluzioni

Q1

$$\begin{cases} y = v\sin\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2 \\ x = v\cos\alpha\, t \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ L = v\cos\alpha\, t \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ t = \dfrac{L}{v\cos\alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = v\sin\alpha \dfrac{L}{v\cos\alpha} - \dfrac{1}{2}g\,(\dfrac{L}{v\cos\alpha})^2 \\ - \end{cases} \qquad h = L\,tg\alpha - \frac{1}{2}g\,(\frac{L}{v\cos\alpha})^2$$

Q2

$$k = m\ddot{s} \qquad \ddot{s} = \frac{k}{m} \qquad s = s_0 + \dot{s}_0 t + \frac{1}{2}\frac{k}{m}t^2$$

Q3

$$a)\ -(\frac{L}{2} - \frac{L}{3})\vec{j} \wedge (-Mg\,\vec{k}) + (\frac{L}{3}\vec{j}) \wedge (-mg\,\vec{k}) = \vec{0} \qquad \frac{L}{6}Mg - \frac{L}{3}mg = 0 \qquad m = \frac{M}{2}$$

$$b)\ R\,\vec{k} - Mg\vec{k} - \frac{M}{2}g\vec{k} = \vec{0} \qquad \vec{R} = \frac{3}{2}Mg\,\vec{k}$$

Q4

a) La distanza del CM dal centro della sbarra sulla retta che unisce i tre oggetti vale: $D = \dfrac{2M\cdot 0 + 2M\cdot 2L + 2M\cdot 4L}{2M + 2M + 2M} = \dfrac{12}{6}L = 2L$.

b)

$$I_s = I_{sbarra} + I_{punto1} + I_{punto2};$$

$$I_{sbarra}^{CM} = I_{sbarra}^{centro} + 2MD^2$$

$$I_{sbarra}^{centro} = \int_{-L/4}^{+L/4} \frac{2M}{L/2} x^2\, dx = \frac{4M}{L}\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-L/4}^{L/4} = \frac{4M}{L}\frac{2}{3}\frac{L^3}{4\cdot 16} = \frac{1}{24}ML^2$$

$$2MD^2 = 2M\,4L^2 = 8ML^2$$

$$I_{sbarra}^{CM} = \frac{1}{24}ML^2 + 8ML^2$$

$$I_{punto1} = 0$$

$$I_{punto2} = 2M\,4L^2 = 8ML^2$$

$$I_s^{CM} = \left(\frac{1}{24} + 8 + 8\right)ML^2 = \frac{385}{24}ML^2$$

Soluzione problema

La forza F cui è soggetto il punto materiale vale: $\vec{F}(x,y,z) = -\left(2Axy\vec{\imath} + Ax^2\vec{\jmath} + B\vec{k}\right)$

a) Nel punto P=(0,0,0) $\vec{F}(P) = -B\vec{k}$ che posso scrivere in componenti intrinseche come:

$$\vec{t} = \frac{\vec{v}}{|v|} = \frac{2v_0\vec{\imath} + 2v_0\vec{k}}{2\sqrt{2}v_0} = \frac{\vec{\imath} + \vec{k}}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{n} \perp \vec{t} \Rightarrow \vec{n} = \frac{\vec{\imath} - \vec{k}}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{F}(P) = -B\vec{k} = -\frac{1}{\sqrt{2}}B\frac{\vec{\imath} + \vec{k}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}B\frac{\vec{\imath} - \vec{k}}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}B\vec{t} + \frac{1}{\sqrt{2}}B\vec{n} = Ma_t\vec{t} + Ma_n\vec{n}$$

$$a_t = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{B}{M}$$

b) Il raggio di curvatura si ricava dalla componente normale dell'accelerazione.

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{B}{M} = \frac{|\vec{v}|^2}{\rho} = \frac{8v_0^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{8\sqrt{2}Mv_0^2}{B}$$

Termodinamica

a)

$$\begin{cases} p^2V = k \\ pV = nRT \end{cases} \Rightarrow p^2V = \frac{(pV)^2}{V} = \frac{(nRT)^2}{V} = k \Rightarrow T^2 \propto V$$

Se $V_f > V_i$ allora la $T_f > T_i$

b)

$$T_f = \frac{\sqrt{kV_f}}{nR}; \quad T_0 = \frac{\sqrt{kV_0}}{nR};$$

$$\Delta U = nc_v\left(T_f - T_0\right) = \frac{3}{2}nR\frac{\sqrt{k}}{nR}\left(\sqrt{V_f} - \sqrt{V_0}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{k}\left(\sqrt{V_f} - \sqrt{V_0}\right)$$

c)

$$C = \frac{dQ}{dT} = \frac{dU + pdV}{dT}$$

$$p = \sqrt{\frac{k}{V}} \quad \Rightarrow \quad pdV = \sqrt{\frac{k}{V}}dV$$

$$dT = \frac{\sqrt{k}}{nR}\frac{1}{2\sqrt{V}}dV = \frac{1}{2nR}\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{V}}dV$$

$$C = \frac{dU + pdV}{dT} = \frac{3}{2}nR + \frac{\sqrt{\frac{k}{V}}dV}{\frac{1}{2nR}\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{V}}dV} = \frac{3}{2}nR + 2nR = \frac{7}{2}R$$