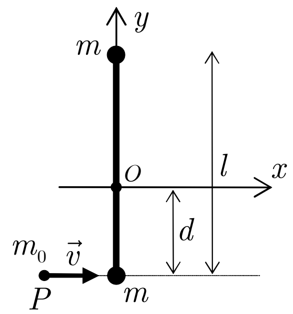
ESAME SCRITTO DI FISICA GENERALE LA

INGEGNERIA GESTIONALE e DEI PROCESSI GESTIONALI A-K, MECCANICA, ENERGETICA, INFORMATICA A-F e DELL'AUTOMAZIONE, PER L'AMBIENTE E IL TERRITORIO, PER L'INDUSTRIA ALIMENTARE e CHIMICA

(Proff. A. Bertin, D. Galli, N. Semprini Cesari, A. Vitale e A. Zoccoli)

25/3/2004

(4)



Su un piano orizzontale e liscio sono collocate due particelle uguali di massa $m = 0.5$ Kg, tra di loro collegate da un'asta rigida di massa trascurabile e lunghezza $l = 50$ cm. L'asta è vincolata da una cerniera ideale a ruotare nel piano attorno ad un asse passante per un punto distante $d = 20$ cm da una sua estremità. Il sistema è inizialmente in quiete. Un proiettile di massa $m_0 = 2m$ si muove sul piano con velocità $\vec{v}$ (di modulo $v = 2$ m/s) ortogonale all'asta e urta quest'ultima istantaneamente ed elasticamente nella sua estremità inferiore. La velocità del proiettile dopo l'urto ha la stessa direzione e verso opposto rispetto a quella iniziale $\vec{v}$. Facendo riferimento al sistema cartesiano Oxy in cui l'asse y contiene l'asta nella sua posizione iniziale, l'origine O coincide con la cerniera dell'asta ed il verso dell'asse x è quello di $\vec{v}$ (v. figura), determinare:

a) il momento d'inerzia del sistema asta-particelle rispetto all'asse (z) passante per O e ortogonale al piano del moto,
b) la velocità del proiettile dopo l'urto,
c) la velocità angolare del sistema asta-particelle dopo l'urto,
d) la velocità che il proiettile avrebbe dopo l'urto se d fosse uguale a $l/2$.

QUESITI

1) Un pendolo di lunghezza l passa per il punto di equilibrio con velocità di modulo v_0. Calcolare il modulo della accelerazione.
2) Un telaio di forma circolare di raggio R e massa M ruota con velocità angolare ω attorno ad un asse perpendicolare al piano che lo contiene e passante per il suo centro. Calcolare l'energia cinetica del telaio.
3) Si dimostri il primo teorema del centro di massa (espressione, attraverso il concetto di centro di massa, della prima equazione cardinale della meccanica).

4) Dimostrare che il campo di forze $\vec{F}(x,y,z)=\dfrac{kx}{2(x^2+y^2)^{3/4}}\,\vec{i}+\dfrac{ky}{2(x^2+y^2)^{3/4}}\,\vec{j}$ (dove $k=1\,\mathrm{J}\times\mathrm{m}^{-1/2}$) è conservativo e calcolare il lavoro che esso compie su una particella che si sposta dal punto $A\equiv(-4,0,7)\mathrm{m}$ al punto $B\equiv(0,9,11)\mathrm{m}$.

Soluzioni LA(4)

Q1) L'accelerazione tangenziale è nulla per cui abbiamo $|\vec{a}|=\dfrac{v_0^2}{l}$

Q2) $T=\dfrac{1}{2}I\omega^2$; $I=\sum_i m_i d_i^2=R^2\sum_i m_i=MR^2$; $T=\dfrac{1}{2}MR^2\omega^2$

Q4) $L_{AB}=k\times\mathrm{m}^{1/2}=1\,\mathrm{J}$, calcolato ad esempio lungo i tratti (-4,0,7)m → (0,4,7)m [arco di circonferenza con centro in (0,0,7)m, L = 0], (0,4,7)m → (0,4,11)m [rettilineo, L = 0] e (0,4,11)m → (0,9,11)m [rettilineo, $L=\displaystyle\int_{4\mathrm{m}}^{9\mathrm{m}}\frac{k}{2y^{1/2}}\,dy=k\sqrt{y}\Big|_{4\mathrm{m}}^{9\mathrm{m}}=(3-2)\,k\times\mathrm{m}^{1/2}$].

a) $I_0=md^2+m(l-d)^2=0.065\ \mathrm{Kg\ m^2}$

b) $\begin{cases}\overline{OP}\wedge m_0\vec{v}=\overline{OP}'\wedge m_0\vec{v}'+I_0\vec{\omega}\\ \dfrac{1}{2}m_0v^2=\dfrac{1}{2}m_0v'^2+\dfrac{1}{2}I_0\omega^2\end{cases}$ $\qquad v=|\vec{v}|,\quad v'=|\vec{v}'|$

$\begin{cases}-d\,\vec{j}\wedge m_0v\,\vec{i}=-d\,\vec{j}\wedge(-m_0v'\,\vec{i})+I_0\omega\,\vec{k}\\ m_0(v^2-v'^2)=I_0\omega^2\end{cases}$ $\qquad\begin{cases}m_0d(v+v')=I_0\omega\\ m_0(v+v')(v-v')=I_0\omega^2\end{cases}$

$v'=v\dfrac{I_0-m_0d^2}{I_0+m_0d^2}=0.48\ \mathrm{m/s}\ \vec{i}$; $\quad\vec{v}'=-\,0.48\ \mathrm{m/s}\ \vec{i}$

c) $\omega=\dfrac{v-v'}{d}=7.6\ \mathrm{rad/s}$; $\quad\vec{\omega}=7.6\ \mathrm{rad/s}\ \vec{k}$

d) $I_0-m_0d^2=md^2+m(l-d)^2-2md^2\xrightarrow{d=l/2}0$; $\quad v'=0$