Fisica Generale LA N.1

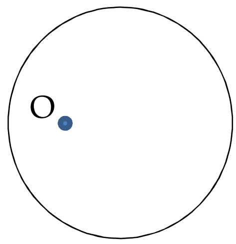
Prova Scritta del 4 Luglio 2012
Prof. Nicola Semprini Cesari

Meccanica

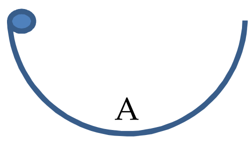
1) Un punto materiale si muove secondo le equazioni orarie $x = A\cos\omega t, y = B\sin\omega t, z = 1$. Determinare l'espressione del coseno dell'angolo tra i vettori velocità ed accelerazione in funzione del tempo.

2) Scrivere le equazioni cartesiane del moto d'un punto materiale di massa m soggetto a un campo di forze la cui energia potenziale è $V(x,y,z) = -\alpha z^2$, sapendo che all'istante $t=0$ il punto si trova nella posizione di coordinate $(0,0,z_0)$ con velocità $\vec{v} = v_0\vec{i}$. [*N.B.*: ricordare che la soluzione generale dell'equazione differenziale $\frac{d^2z}{dt^2} - kz = 0$ è $z = c_1 e^{\sqrt{k}t} + c_2 e^{-\sqrt{k}t}$, con c_1 e c_2 costanti determinate dalle condizioni iniziali].

3) Un disco omogeneo di massa M e raggio R, disposto su di un piano verticale e libero di ruotare attorno ad un asse normale passante per la posizione eccentrica O, è trattenuto nella posizione iniziale indicata in figura con il diametro passante per O in posizione orizzontale. Determinare la distanza di O dal centro affinché l'accelerazione iniziale del centro di massa, qualora il disco venisse liberato, valga g/3.



4) Un punto materiale di massa m, inizialmente in quiete, scivola senza attrito lungo un profilo semicircolare di raggio R disposto su di un piano verticale (vedi figura). Determinare la reazione vincolare fornita dal profilo quando il punto materiale transita nel punto A di minima quota.



5) Scrivere e commentare l'espressione della prima equazione cardinale. Mostrare i passaggi che conducono alla determinazione della sua espressione.

6) Scrivere e commentare l'espressione delle forze inerziali. Mostrare i passaggi che conducono alla determinazione della loro espressione.

Problema

Un disco rigido e omogeneo, di massa M, spessore trascurabile e raggio R, ruota con velocità angolare $\vec{\omega}_0$, mantenuta costante da un motore, nel piano orizzontale attorno all'asse verticale passante per il suo centro C. La superficie del disco è traversata da una scanalatura lungo un diametro. All'istante $t=0$ un punto materiale di massa m si trova sul bordo del disco e si muove lungo la scanalatura dirigendosi verso il centro con velocità mantenuta costante di modulo v_0 nel sistema di riferimento solidale con il disco. Determinare le espressioni delle seguenti quantità:

a) i moduli del momento della quantità di moto del disco (K_C) e del punto materiale (k_C) in funzione del tempo t, scegliendo il centro C come centro di riduzione.

b) il modulo del momento risultante delle forze esterne $\left|\vec{M}_C^e\right|$ rispetto allo stesso centro di riduzione.

c) il lavoro L compiuto sul sistema dalla risultante delle forze applicate dall'istante $t=0$ all'istante $t=t_0$ nel quale il punto materiale passa per il centro del disco.

Termodinamica

1) Trovare la relazione cui soddisfano i valori di volume V e temperatura T di una trasformazione adiabatica reversibile.

2) Due moli di gas perfetto monoatomico compiono un'espansione isoterma reversibile partendo da temperatura e volume iniziali $T_1 = 20°C$ e $V_1 = 23l$ e triplicando il proprio volume. Motivando le risposte ed usando per la costante dei gas il valore $R = 8.314 Jmol^{-1}K^{-1}$ determinare le seguenti quantità:

a) il lavoro L compiuto dal gas;

b) la variazione di energia interna ΔU subita dal gas;

c) la variazione d'entropia ΔS_g subita dal gas.

3) Si commentino i passaggi che conducono alla formulazione del primo principio della termodinamica.

SOLUZIONI

Meccanica

1)

$$x = A\cos\omega t \qquad y = B\sin\omega t \qquad z = 1$$

$$\dot{x} = -A\omega\sin\omega t \qquad \dot{y} = B\omega\cos\omega t \qquad \dot{z} = 0$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2\cos\omega t \qquad \ddot{y} = -B\omega^2\sin\omega t \qquad \ddot{z} = 0$$

$$\cos\vartheta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{va} = \frac{(-A\omega\sin\omega t, B\omega\cos\omega t, 0)\cdot(-A\omega^2\cos\omega t, -B\omega^2\sin\omega t, 0)}{\omega\sqrt{A^2+B^2}\ \omega^2\sqrt{A^2+B^2}} =$$

$$= \frac{(A^2-B^2)\,\omega^3}{\omega^3(A^2+B^2)}\sin\omega t\cos\omega t = \frac{(A^2-B^2)}{(A^2+B^2)}\sin\omega t\cos\omega t$$

2)

Dalle derivate parziali di V rispetto alle coordinate si ricava che le componenti del campo di forza $\vec{F}$ lungo gli assi x e y sono nulle, mentre $F_z = 2\alpha z$; proiettando sugli assi coordinati l'equazione che specifica il secondo principio della dinamica, abbiamo quindi che sono nulle le componenti dell'accelerazione lungo gli assi x e y, mentre $\frac{d^2z}{dz^2} = \frac{2\alpha}{m}z$. Come da suggerimento, la soluzione generale di questa Equazione è $z = c_1 e^{\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}t} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}t}$. Le condizioni iniziali del problema sono $z(t=0) = z_0 = c_1 + c_2$ e $\frac{dz}{dt}(t=0) = \sqrt{\frac{2\alpha}{m}}(c_1 - c_2) = 0$, cioè $c_1 = c_2 = \frac{z_0}{2}$. Abbiamo dunque che le equazioni cartesiane del moto sono *x(t)=y(t)=0* e $z = \frac{z_0}{2}(e^{\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}t} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}t})$.

3)

$$\hat{\omega}\cdot\vec{M}^e = I_\omega\ddot{\phi}$$

$$\vec{i}\cdot[(y\,\vec{j})\wedge(-Mg\vec{k})] = (\frac{1}{2}MR^2 + My^2)\ddot{\phi}$$

$$-Mg\,y = \frac{1}{2}M(R^2+2y^2)\ddot{\phi} \qquad dZ_{CM} = y\,d\phi \qquad \dot{Z}_{CM} = y\dot{\phi} \qquad \ddot{Z}_{CM} = y\ddot{\phi}$$

$$-Mg\,y = \frac{1}{2}M(R^2+2y^2)\frac{\ddot{Z}_{CM}}{y} = -\frac{1}{2}M(R^2+2y^2)\frac{g}{3y}$$

$$y^2 = (R^2+2y^2)\frac{1}{6} \qquad y = R/2$$

4)

$$mgR = \frac{1}{2}mv^2 \qquad v = \sqrt{2gR}$$

$$R_V - mg = ma = m\frac{v^2}{R} = 2mg$$

$$R_V = 3mg$$

Esercizio

a) In questo caso sussistono le condizioni di parallelismo tra momento della quantità di moto rispetto a C e velocità di rotazione $\vec{\omega}_0$, per cui $K_C = I_C^{disco}\omega_0 = \frac{1}{2}MR^2\omega_0$ e $k_C = I_C^{punto}\omega_0 = mr^2(t)\omega_0 = m(R - v_0t)^2\omega_0$.

b)Dalla seconda equazione cadinale della dinamica $\vec{M}_C^e = \frac{d}{dt}\vec{K}_C^{tot} = \frac{d}{dt}(\vec{K}_C + \vec{k}_C) \equiv \frac{d}{dt}\vec{k}_C$ dato che $\vec{K}_C$ è costante. Si ha pertanto $M_C^e = m\omega_0\frac{d}{dt}(R - v_0t)^2 = 2m\omega_0(R - v_0t)|v_0|$.

c) Basta applicare all'insieme di disco e punto materiale il teorema delle forze vive combinato con il teorema di Koenig, ricordando che nella posizione iniziale il punto materiale ha energia cinetica dovuta sia al suo movimento nella scanalatura che a quello di rotazione del disco, mentre in quella finale ha solo energia legata al moto nella scanalatura. Cioè

$$L = T_f - T_i = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}MR^2)\omega_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 - \left(\frac{1}{2}(\frac{1}{2}MR^2)\omega_0^2 + \frac{1}{2}m(v_0^2 + \omega_0^2R^2)\right) = -\frac{1}{2}mR^2\omega_0^2$$

il che corrisponde appunto a una diminuzione dell'energia cinetica complessiva.

Termodinamica

a) Trattandosi di una trasformazione reversibile, quindi quasi statica, e isoterma

$$L = \int_{V_1}^{3V_1} pdV = \int_{V_1}^{3V_1} nRT_1\frac{dV}{V} = nRT_1\int_{V_1}^{3V_1}\frac{dV}{V} = nRT_1\ln 3 = 2\times 8.314\times 293\times\ln 3 = 5352J.$$

b) Trattandosi dell' isoterma di un gas perfetto, $\Delta U = 0$ dato che l' energia interna per tale sistema dipende solo dalla temperatura.

c) Ricordando la formula che riguarda la variazione d' entropia d'un gas perfetto in funzione delle variabili T e V, questa si riduce a

$$\Delta S_g = nR\ln\frac{3V_1}{V_1} = nR\ln 3 = 2\times 8.314\times\ln 3 = 18.27J/K.$$