Fisica Generale LA

Prof. Nicola Semprini Cesari

Prova Scritta del 8 Luglio 2013

Meccanica

1) Due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ formano tra loro un angolo θ. Determinare il valore di θ affinché il vettore differenza $\vec{b}-\vec{a}$ abbia lo stesso modulo del vettore $\vec{a}$.

2) Un corpo materiale di massa *m* scorre su di un piano orizzontale in assenza di attrito con velocità $\dot{x}_0$ lungo la direzione $\hat{\imath}$. Ad un certo tempo, assunto come origine, il corpo materiale entra in una regione dove subisce una forza di attrito viscoso $\vec{F}=-\lambda\vec{v}$. Determinare il tempo necessario affinché la velocità iniziale dimezzi il proprio valore.

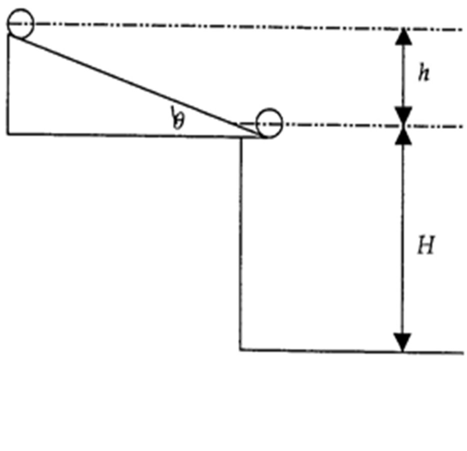
3) Verificare se il campo di forze $\vec{F}(x,y,z)=\alpha\left[(2xz+z^2)\vec{i}+(3y^2)\vec{j}+(2xz+x^2)\vec{k}\right]$, dove α è una costante avente le opportune dimensioni, è conservativo e in caso affermativo calcolarne l'espressione dell'energia potenziale *V(x,y,z)*.

4) Una barra omogenea di massa *M=1Kg* e lunghezza *L=1m* ruota in senso antiorario, compiendo un giro in un tempo *T=1s*, attorno ad un asse normale passante per un suo estremo. Calcolare modulo direzione e verso del momento angolare della barra.

5) Scrivere e commentare le leggi di trasformazione della accelerazione nel passaggio da un riferimento all'altro.

6) Enunciare e commentare il principio di azione e reazione. Esprimere matematicamente le condizioni sulle forze.

Problema) Un sasso piatto - schematizzabile come un disco omogeneo di massa *M*, raggio *R* e spessore trascurabile - inizialmente in quiete, si mette in movimento e rotola senza strisciare lungo il tetto di una casa percorrendo un piano inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale. Dopo che il suo centro ha subito un salto di quota *h* il sasso rotola fuori dal tetto e il suo centro subisce un'altra perdita di quota *H* prima che il sasso giunga al suolo.



Trascurando l'attrito dell'aria, calcolare le espressioni delle seguenti quantità: i) il modulo v_1 della velocità del sasso nell'istante in cui abbandona il tetto; ii) il modulo v_2 della velocità del sasso nell'istante in cui tocca il suolo; iii) il tempo t_2 trascorso tra l'istante in cui il sasso si distacca dal tetto e quello in cui tocca il suolo.

Termodinamica

Due moli di gas monoatomico compiono un ciclo termodinamico reversibile costituito da due isoterme e due isocore (ciclo di Stirling). Calcolare il rendimento del ciclo sapendo che T_2*=405K*, T_1*=293K*, P_D*=2 atm e* V_B*=50 l* (girando in senso orario si chiami A lo stato in alto a sinistra nel diagramma PV).

Si commenti in dettaglio il primo principio della termodinamica

Soluzioni Meccanica:

Esercizio 1:

$\vec{a} = a\hat{\imath} \qquad \vec{b} = b\cos\vartheta\hat{\imath} + b\sin\vartheta\hat{\jmath} \qquad \vec{b} - \vec{a} = (b\cos\vartheta - a)\hat{\imath} + b\sin\vartheta\hat{\jmath}$

$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = (b\cos\vartheta - a)^2 + b^2\sin^2\vartheta = b^2 + a^2 - 2ab\cos\vartheta = a^2 \qquad b^2 - 2ab\cos\vartheta = 0$

$\cos\vartheta = b/2a$

Esercizio 2

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad -\lambda\dot{x}\hat{\imath} = m\ddot{x}\hat{\imath} \qquad \ddot{x} = -\frac{\lambda}{m}\dot{x}$$

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = -\frac{\lambda}{m}\dot{x} \qquad \frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -\frac{\lambda}{m}dt \qquad \int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}}\frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -\int_0^t\frac{\lambda}{m}dt \qquad \ln(\frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}) = -\frac{\lambda}{m}t \qquad \dot{x}(t) = \dot{x}_0 e^{-\frac{\lambda}{m}t} \qquad \frac{1}{2}\dot{x}_0 = \dot{x}_0 e^{-\frac{\lambda}{m}t}$$

$$t = \frac{m}{\lambda}\ln 2$$

Esercizio 3:

Il rotore è nullo, quindi il campo è conservativo. Integrando sul circuito a zig-zag si ha $V(x,y,z) = \alpha(x^2z + y^3 + z^2x)$.

Esercizio 4:

Dato che il momento della quantità di moto di una barra in rotazione attorno ad un asse normale è diretto lungo l'asse di rotazione si ha $\vec{L} = L\hat{\omega}$. D'altra parte il momento assiale della quantità di moto vale $\hat{\omega}\cdot\vec{L} = I\dot{\varphi}$ da cui si ottiene $\hat{\omega}\cdot L\hat{\omega} = I\dot{\varphi}$ ovvero $L = I\dot{\varphi}$ la quale mostra che il momento assiale della quantità di moto coincide con il modulo del momento della quantità di moto. Abbiamo allora

$$L = I\dot{\varphi} = (\int_0^L x^2\lambda dx)\dot{\varphi} = \lambda\frac{1}{3}L^3\dot{\varphi} = \frac{1}{3}ML^2\dot{\varphi} = \frac{1}{3}\times 1\times 1^2\times\frac{2\pi}{1} = \frac{2}{3}\pi\, kg\, m^2 s^{-1}$$

Problema

i) Applicando il teorema di conservazione dell'energia meccanica al perecorso sul tetto e il teorema di König per un corpo rigido in moto di rototraslazione con velocità angolare di modulo ω e momento d' inerzia I rispetto all'asse di simmetria passante per il suo centro abbiamo:

$$Mgh = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_1^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}MR^2\frac{v_1^2}{R^2} + Mv_1^2) = \frac{3}{4}Mv_1^2 \quad \text{da cui } v_1 = \sqrt{\frac{4}{3}gh}\,.$$

ii) Durante la caduta il corpo si muove come se la forza peso fosse applicata nel suo centro di massa, e quindi essa non interviene a modificare la velocità angolare in quanto ha momento nullo rispetto al centro del disco preso come centro di riduzione. Di nuovo la conservazione dell'energia meccanica stabilisce:

$$\frac{1}{2}I\omega^2+\frac{1}{2}Mv_1^2+MgH=\frac{1}{2}I\omega^2+\frac{1}{2}Mv_2^2 \qquad \frac{1}{2}Mv_1^2+MgH=\frac{1}{2}Mv_2^2 \qquad \frac{1}{2}v_2^2=\frac{2}{3}gh+gH=g(\frac{2}{3}h+H)$$

$$v_2=\sqrt{2g(\frac{2}{3}h+H)}$$

ii) Il centro di massa del disco lascia il tetto con componenti della velocità $v_x=v_1\cos\theta$ e $v_y=v_1\sin\theta$, e per questo motivo prosegue la caduta secondo un moto parabolico; ponendo nel piano di caduta un sistema di riferimento (*x*,*y*) con l'origine nel punto di abbandono del tetto e asse *y* verticale discendente, l'equazione cartesiana relativa alla coordinata *y* del centro di massa, assumendo l'istante iniziale uguale a quello di abbandono del tetto, è $y(t)=\sin\theta\sqrt{\frac{4gh}{3}}\,t+\frac{g}{2}t^2$ e il tempo di caduta lungo la quota H è definito dalla relazione

$$H=\sin\theta\sqrt{\frac{4gh}{3}}\,t+\frac{g}{2}t^2 \qquad t_2=\frac{-\sqrt{\frac{4gh}{3}}\sin\theta\pm\sqrt{\frac{4gh}{3}\sin^2\theta+2gH}}{g}=\sqrt{\frac{4h}{3g}\sin^2\theta+\frac{2H}{g}}-\sqrt{\frac{4h}{3g}}$$

dato che l'altra soluzione dev'essere scartata non avendo senso fisico.

Soluzioni Termodinamica

$$AB: \quad dQ=pdV=nRT\frac{dV}{V} \qquad |Q_{AB}|=nRT_2\ln\frac{V_2}{V_1}$$

$$BC: \quad dQ=dU=nc_V dT \qquad |Q_{BC}|=nc_V(T_2-T_1)$$

$$CD: \quad dQ=pdV=nRT\frac{dV}{V} \qquad |Q_{CD}|=nRT_1\ln\frac{V_2}{V_1}$$

$$DA: \quad dQ=dU=nc_V dT \qquad |Q_{DA}|=nc_V(T_2-T_1)$$

$$P_DV_1=nRT_1 \qquad V_1=\frac{nRT_1}{P_D}$$

$$|Q_{AB}|=nRT_2\ln\frac{V_2}{V_1}=nRT_2\ln\frac{V_2P_D}{nRT_1}=2\times8.31\times405\times\ln\frac{50\times10^{-3}\times2\times101325}{2\times8.31\times293}=4932.0\,J$$

$$|Q_{BC}|=nc_V(T_2-T_1)=2\times\frac{3}{2}\times8.31\times(405-293)=2792.2\,J$$

$$|Q_{CD}|=nRT_1\ln\frac{V_2}{V_1}=nRT_1\ln\frac{V_2P_D}{nRT_1}=2\times8.31\times293\times\ln\frac{50\times10^{-3}\times2\times101325}{2\times8.31\times293}=3568.1\,J$$

$$|Q_{DA}|=nc_V(T_2-T_1)=2\times\frac{3}{2}\times8.31\times(405-293)=2792.2\,J$$

$$\eta=1-\frac{|Q_{BC}|+|Q_{CD}|}{|Q_{DA}|+|Q_{AB}|}=1-\frac{2792.2+3568.1}{2792.2+4932.0}=1-0.89=0.18$$