Fisica Generale LA

Prof. Nicola Semprini Cesari

Prova Scritta del 11 Febbraio 2014

Meccanica

1) Un disco omogeneo di massa $M_D = 4\,Kg$ e raggio $R = 20\,cm$ inizialmente fermo, è fissato nel suo centro ad un supporto verticale di massa trascurabile attorno al quale è libero di ruotare. A sua volta, il supporto del disco poggia su una bilancia (vedi figura). Attorno al disco si avvolge senza slittare una corda di massa trascurabile ed inestensibile alle cui estremità sono fissate due masse m_1 e m_2.

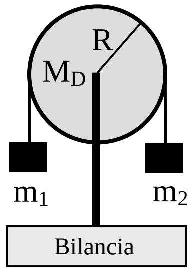
Nell'ipotesi che $m_1 = m_2 = 1\,kg$, determinare:

a) il peso segnato dalla bilancia; b) la reazione vincolare esercitata dal supporto sul disco; c) la tensione del filo; d) l'accelerazione angolare del disco.

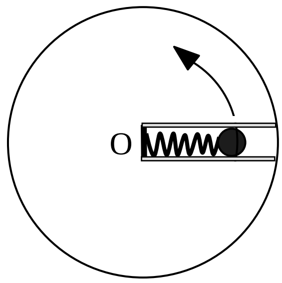
Nell'ipotesi che $m_1 = 1\,kg$ e $m_2 = 2\,kg$ determinare:

e) il peso segnato dalla bilancia; f) la reazione vincolare esercitata dal supporto sul disco; g) la tensione del filo; h) l'accelerazione angolare del disco.

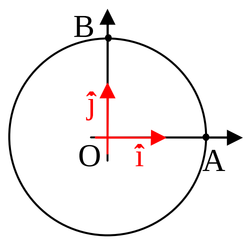
(il momento di inerzia di un disco di massa M e raggio R rispetto a un asse passante per il suo cm é: $I_D = (1/2)MR^2$).



2) Al centro di una piattaforma, che ruota con velocità angolare ω=10rad/s in senso antiorario su un piano orizzontale attorno al suo centro O, è incollata una guida al cui interno é posta una molla fissata da una parte al centro della piattaforma e dall'altra ad una massa m=1kg (vedi figura). La molla ha costante elastica k=200 N/m e lunghezza a riposo L_0=20 cm. Determinare l'allungamento della molla.



3) Data la forza $\vec{F}(x,y,z) = (-2\alpha x + \beta yz)\hat{i} + \beta xz\,\hat{j} + \beta xy\,\hat{k}$ determinare: a) le dimensioni fisiche delle costanti α e β; *b)* se il campo è conservativo e nel caso calcolare l'energia potenziale in un punto P(x,y,z); c) il lavoro compiuto dalla forza quando sposta il punto di applicazione da A(0,-2,1) a B(2,0,1).



4) Un'automobile inizialmente ferma nel punto A, parte e percorre un tratto circolare di raggio R=20 m giungendo nel punto B dopo t=20 s. Utilizzando il sistema di riferimento fisso indicato in figura, determinare, tra l'istante iniziale e quello finale, a) il vettore spostamento; b) la velocità vettoriale media; c) la velocità scalare media.

5) Dimostrare la relazione $\hat{t} = \dfrac{d\vec{r}(s)}{ds}$ e chiarire il suo rapporto con l'espressione della velocità nella rappresentazione intrinseca.

6) Scrivere e commentare le diverse forme della seconda equazione cardinale della meccanica.

Termodinamica

1) Due moli di gas perfetto biatomico inizialmente a temperatura $T_0=300\ K$ e pressione p_0 si espandono, assorbendo una quantità di calore $Q=5590\ J$, fino a raggiungere uno stato finale a temperatura $T_1=400\ K$ e pressione p_0. Assumendo per la costante universale dei gas il valore $R=8.31\ JK^{-1}mol^{-1}$ stabilire se la corrispondente trasformazione può essere un'isobara reversibile.

2) Discutere il concetto di entropia.

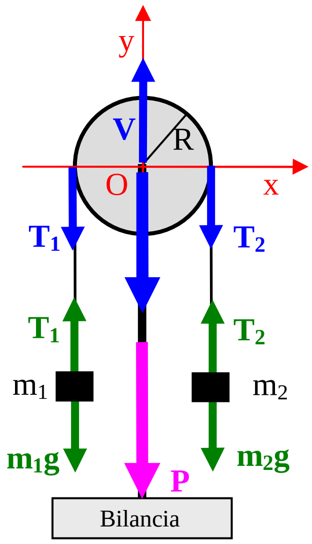
Soluzioni compito:

Esercizio 1:

a,b,c,d)

In generale, il peso $|\vec{P}|$ segnato dalla bilancia é dato da

$$|\vec{P}| = M_D g + T_1 + T_2$$



dove dobbiamo determinare le tensioni T_1 e T_2 .
Fissiamo un sistema di riferimento come in figura, con l'asse z uscente dal foglio e l'origine nel centro del disco.
In generale dobbiamo scrivere la $\vec{F} = m\vec{a}$ per m_1 , m_2 e le due equazioni cardinali della meccanica per il disco poiché é un corpo esteso (le forze sono applicate su di lui in punti differenti).
Essendo le due masse m_1 ed m_2 uguali queste risulteranno ferme; anche il disco di conseguenza risulterà fermo perché, pur essendo libero di ruotare attorno al suo centro, ai suoi capi sono appese due masse uguali che esercitano due momenti della forza uguali e contrari; dobbiamo dunque imporre le condizioni della statica sui 3 corpi:

Massa $m_1 \rightarrow \sum \vec{F} = 0 \rightarrow -m_1 g + T_1 = 0 \rightarrow T_1 = m_1 g$

Massa $m_2 \rightarrow \sum \vec{F} = 0 \rightarrow -m_2 g + T_2 = 0 \rightarrow T_2 = m_2 g$

Questo é già sufficiente per determinare il peso segnato dalla bilancia che risulta:

$$|\vec{P}| = M_D g + T_1 + T_2 = (M_D + m_1 + m_2)\, g = 6g = 58.8\ N$$

Per la reazione vincolare esercitata dal supporto sul disco scriviamo le condizioni di staticità per un corpo rigido:

Disco $M_D \rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F} = 0 \\ \sum \vec{M} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V - M_D g - T_1 - T_2 = 0 \\ T_1 R - T_2 R = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V = M_D g + T_1 + T_2 = (M_D + m_1 + m_2) g \\ T_1 = T_2 \end{cases}$

dove si vede che (come ci si doveva aspettare dal terzo principio della dinamica) la reazione vincolare esercitata dal supporto sul disco é data da:

$$V = (M_D + m_1 + m_2) g = 6g$$

L'altro risultato ottenuto $T_1 = T_2$ mostra che nel caso di corpi fermi la tensione ai capi del filo é la stessa

Ovviamente essendo il disco fermo, l'accelerazione angolare é nulla $\alpha = 0$.

e,f,g,h)

Anche in questo caso, il peso $|\vec{P}|$ segnato dalla bilancia é dato da

$|\vec{P}| = M_D g + T_1 + T_2$

dove come prima dobbiamo determinare le tensioni T_1 e T_2 .

In questo caso le masse m_1 e m_2 non sono uguali pertanto il sistema si muoverà, m_2 che é più pesante scenderà mentre m_1 salirà. Applichiamo la $\vec{F} = m\vec{a}$ per m_1 , m_2 e le due equazioni cardinali della meccanica per il disco.

Massa m_1 $\rightarrow \sum \vec{F} = m_1\vec{a} \rightarrow -m_1 g + T_1 = m_1 a$

Massa m_2 $\rightarrow \sum \vec{F} = m_2\vec{a} \rightarrow -m_2 g + T_2 = -m_2 a$

Disco $M_D \rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F} = M_D a_{cm} = 0 \\ \sum \vec{M} = I_D \vec{\alpha} \end{cases}$

dove a_{cm} del disco é nulla perche é inchiodato al supporto e $I_D = \frac{1}{2} M_D R^2$

$$\rightarrow \begin{cases} V - M_D g - T_1 - T_2 = 0 \\ T_1 R - T_2 R = -I_D \alpha \end{cases}$$

dove il segno negativo del termine $I_D \alpha$ é dovuto al fatto che il disco ruota in senso orario.

Riassumendo:

$$\begin{cases} -m_1 g + T_1 = m_1 a \\ -m_2 g + T_2 = -m_2 a \\ V - M_D g - T_1 - T_2 = 0 \\ T_1 R - T_2 R = -I_D \alpha \end{cases}$$

Il sistema é formato da 4 equazioni e 5 incognite sono T_1, T_2, a, V e α dove però l'accelerazione angolare α é legata all'accelerazione delle masse m_1 e m_2 (che é anche l'accelerazione del filo)

$$\alpha = \frac{a}{R}$$

sostituendo nel sistema

$$\begin{cases} -m_1 g + T_1 = m_1 a \\ -m_2 g + T_2 = -m_2 a \\ V - M_D g - T_1 - T_2 = 0 \\ T_1 R - T_2 R = -\frac{1}{2} M_D R^2 \frac{a}{R} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T_1 = m_1 a + m_1 g \\ T_2 = m_2 g - m_2 a \\ V - M_D g - T_1 - T_2 = 0 \\ T_1 - T_2 = -\frac{1}{2} M_D a \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene:

$$\begin{cases} a = \dfrac{2(m_2 - m_1)}{M_D + 2m_1 + 2m_2} g \\ \alpha = \left[\dfrac{2(m_2 - m_1)}{M_D + 2m_1 + 2m_2}\right] \dfrac{g}{R} \\ T_1 = \dfrac{m_1(M_D + 4m_2)}{M_D + 2m_1 + 2m_2} g \\ T_2 = \dfrac{m_2(M_D + 4m_1)}{M_D + 2m_1 + 2m_2} g \\ V = \dfrac{M_D^2 + 3m_1 M_D + 3m_2 M_D + 8m_1 m_2}{M_D + 2m_1 + 2m_2} g \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{5} g \\ \alpha = \dfrac{1}{5}\dfrac{g}{R} \\ T_1 = \dfrac{6}{5} g \\ T_2 = \dfrac{8}{5} g \\ V = \dfrac{34}{5} g \end{cases}$$

Come detto il peso segnato dalla bilancia é dato da

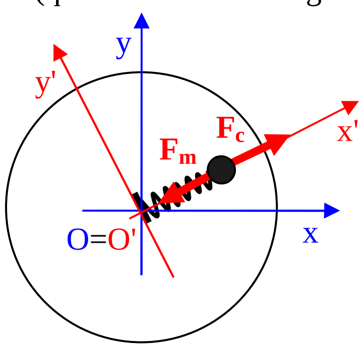
$$|\vec{P}| = M_D g + T_1 + T_2 = \frac{M_D^2 + 3m_1 M_D + 3m_2 M_D + 8m_1 m_2}{M_D + 2m_1 + 2m_2} g = \frac{34}{5} g$$

che come prima risulta uguale (in modulo) alla reazione vincolare V del supporto sul disco.

Esercizio 2:

a)

Per risolvere questo problema scegliamo un sistema di riferimento non inerziale (quello rosso nella figura) con origine nel centro del disco, l'asse x' che ruota seguendo la massa m, l'asse y' sempre nel piano orizzontale ma perpendicolare all'asse x' e l'asse z' uscente dal foglio. Sulla massa m agiscono 2 forze: la forza della molla (F_m) e l'unica forza apparente presente che é la forza centrifuga (F_c) dirette lungo l'asse x' . In realtà sulla massa agiscono anche delle forze lungo la direzione y' dovute alla guida che però non entrano nel calcolo dell'allungamento della molla in quanto tali forze non hanno componente lungo l'asse x' (per una trattazione completa del problema si veda la soluzione del compito 3 del 27 aprile 2012).



Nel sistema di riferimento O'x'y'z' la massa m é ferma dunque la sommatoria delle forze é nulla; tuttle le forze sono lungo l'asse x' dunque ometto la notazione vettoriale:

$$-k\Delta x + m\omega^2(l + \Delta x) = 0$$

dove l é la lunghezza a riposo della molla e Δx é l'allungamento. Risolvendo si ottiene:

$$\Delta x = \frac{m\omega^2 l}{k - m\omega^2} = 0.2\, m$$

Esercizio 3:

a)

Le costanti α e β hanno d□imensioni fisiche fondamentali

$$[\alpha]=\frac{[F]}{[L]}=\frac{[M][L][T]^{-2}}{[L]}=[M][T]^{-2}$$ e unità di misura *N/m* oppure $Kg\,/\,s^2$

$$[\beta]=\frac{[F]}{[L]^2}=\frac{[M][L][T]^{-2}}{[L]^2}=[M][L]^{-1}[T]^{-2}$$ e unità di misura N/m^2 oppure $Kg\,/\,m\,s^2$

b)

Il rotore del campo è nullo, dunque il campo è conservativo. Calcolando il lavoro su un cammino rettilineo a tratti tra l'origine O(0,0,0) ed un punto generico C(*x*,*y*,*z*)

$$L_{OP}=\int_{000}^{x00}F_x\,dx+\int_{x00}^{xy0}F_y\,dy+\int_{xy0}^{xyz}F_z\,dz=\int_{000}^{x00}(-2\alpha x+\beta yz)dx+\int_{x00}^{xy0}\beta xz\,dy+\int_{xy0}^{xyz}\beta\,x\,y\,dz=-\alpha x^2+\beta xyz$$

dunque $L_{OP}=V(0,0,0)-V(x,y,z)=-\alpha x^2+\beta xyz$

da cui segue l'energia potenziale $V(x,y,z)=+\alpha x^2-\beta xyz$.

c)

Visto che il campo è conservativo, il lavoro tra i punti A(0,-2,1) e B(2,0,1) si ottiene dalla relazione:

$$L_{AB}=V(A)-V(B)=V(0,-2,1)-V(2,0,1)=-4\alpha$$

Esercizio 4:

a)

Utilizzando il sistema di riferimento in figura, le posizioni dell'auto nell'istante iniziale t_i e finale t_f sono rispettivamente:

$\vec{r}(t_i)=R\hat{i}=20\hat{i}\ m$ e $\vec{r}(t_f)=R\hat{j}=20\hat{j}\ m$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_f) - \vec{r}(t_i) = R\hat{j} - R\hat{i} = R(-\hat{i} + \hat{j}) = 20(-\hat{i} + \hat{j})\, m$$

b)

La velocità vettoriale media é data da:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

dove $\Delta\vec{r}$ é il vettore spostamento precedentemente calcolato, dunque

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t_f) - \vec{r}(t_i)}{\Delta t} = \frac{R(-\hat{i} + \hat{j})}{\Delta t} = (-\hat{i} + \hat{j})\, m/s$$

c)

La velocità scalare media é data da

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

dove Δs é lo spazio percorso che risulta ovviamente:

$$\Delta s = \frac{2\pi R}{4} = \frac{\pi R}{2} = 31.4\, m$$

dunque la velocità scalare media risulta:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\pi R}{2\Delta t} = \frac{\pi}{2} = 1.57\, m/s$$

Soluzione Termodinamica

$$\Delta U = nc_V(T_1 - T_0) = n\frac{5}{2}R(T_1 - T_0) = 4155J$$
$$W = Q - \Delta U = (5590 - 4155)J = 1435J$$
$$W_{isobara}^{reversibile} = p_0(V_1 - V_0);$$
$$p_0 = \cos t \Rightarrow \frac{T}{V} = \cos t \Rightarrow \frac{T_0}{V_0} = \frac{T_1}{V_1} \Rightarrow \frac{V_1}{V_0} = \frac{T_1}{T_0} = \frac{4}{3} \Downarrow$$
$$W_{isobara}^{reversibile} = p_0(\frac{4}{3} - 1)V_0 = \frac{1}{3}p_0V_0 = \frac{1}{3}nRT_0 = 1662J$$

che risulta diverso da W; quindi è impossibile che la corrispondente trasformazione sia isobara e reversibile.