Fisica Generale LA

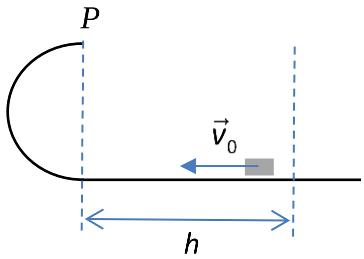
Prof. Nicola Semprini Cesari

Prova Scritta del 11 Settembre 2018

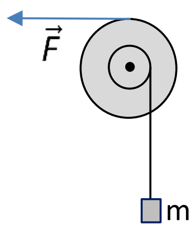
Meccanica

Q1) Determinare l'angolo α, rispetto al piano orizzontale, con il quale è necessario scagliare un proiettile affinché raggiunga il punto *P* di massima quota di coordinate ***(0, y_m, z_m)*** tali che ***z_m/y_m=1/2*** (si indichi con v_0 la velocità iniziale e si scelga l'asse z lungo la direzione verticale).

Q2) Un corpo materiale di massa *m* viene lanciato con velocità v_0 lungo un profilo privo di attrito risultante dal raccordo di un tratto rettilineo con un tratto curvilineo semicircolare di raggio *R*. Determinare il modulo della minima velocità v_0 che permette al corpo di raggiungere il punto sommitale P. Determinare, in tale caso, la distanza *h* del punto di caduta.



Q3) Sia data una puleggia a due gole, formata da due dischi sovrapposti omogenei rispettivamente di massa M_1 ed m_2 e raggio R_1 ed r_2, libera di ruotare attorno ad un asse normale al piano dei dischi passante per il loro centro. Determinare il modulo della forza $\vec{F}$ necessaria per sollevare con velocità costante la massa m appesa al filo.



Q4) Un disco omogeneo di massa M e raggio R, appoggiato su di un piano orizzontale privo di attriti, ruota con velocità angolare costante ω_0 attorno all'asse normale al piano del disco passante per il suo centro. Ad un certo istante, un meccanismo aggancia, fissandolo, un punto perimetrale del disco che così comincia a ruotare attorno all'asse normale al piano del disco passante per tale punto. Spiegando i diversi passi del ragionamento, si determini la velocità angolare finale del disco ω.

Q5) Enunciare e dimostrare il teorema del momento della forza agente su di un punto materiale. Discutere una possibile applicazione del teorema.

Q6) Discutere il significato fisico del Principio di Azione e Reazione e fornire la sua formulazione matematica.

Termodinamica

Q1) Un cilindro con pistone mobile contiene n=2 moli di gas monoatomico. Il gas è inizialmente all'equilibrio nello stato A definito dalla temperatura $T_A = 290\,K$ e dalla pressione P_A data dalla pressione esterna pari a *1.010x10^5 Pa* cui si deve aggiungere la forza peso agente sul pistone di massa *M=3 Kg* e superficie *S=0.002 m^2*. Tenendo il pistone in posizione fissa ed il sistema in contatto termico con un serbatoio di calore alla temperatura $T_B = 450\,K$, viene raggiunto lo stato B di equilibrio. Sempre in contatto con il serbatoio di calore alla temperatura $T_B = 450\,K$, il pistone viene sbloccato dando luogo ad una espansione del gas contro la pressione esterna P_A fino a raggiungere lo stato C di equilibrio. Determinare: i) la pressione del gas nello stato A; ii) la pressione del gas nello stato B; iii) il calore assorbito nella trasformazione A->B; iv) il sollevamento h del pistone nella trasformazione B->C; v) il lavoro compiuto nella trasformazione A->C.

Q2) Si discuta il primo principio della termodinamica.

SOLUZIONI

Q1

$$y = v_0 \cos\alpha\, t$$

$$z = v_0 \sin\alpha\, t - \frac{1}{2} g t^2 \;\rightarrow\; \dot{z} = v_0 \sin\alpha - g t \quad \dot{z} = 0 \qquad t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

$$y_M = v_0 \cos\alpha \frac{v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin\alpha \cos\alpha$$

$$z_M = v_0 \sin\alpha \frac{v_0 \sin\alpha}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

$$\frac{z_M}{y_M} = \frac{\dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}}{\dfrac{v_0^2}{g} \sin\alpha \cos\alpha} = \frac{1}{2} tg\alpha = \frac{1}{2} \qquad tg\alpha = 1 \qquad \alpha = 45^\circ$$

Q2)

La condizione dinamica affinchè venga raggiunto il punto sommitale P vale

$$R_V \vec{n} + mg\vec{n} = m\frac{v_P^2}{R}\vec{n} \qquad R_V + mg = m\frac{v_P^2}{R} \qquad v_P^2 = \frac{R_V R}{m} + gR$$

La minima velocità sommitale si ha quando il vincolo esercita una reazione vincolare nulla

$$v_P^2 = gR$$

Dalla conservazione della energia si ha

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_P^2 + 2mgR = \frac{1}{2} mgR + 2mgR = \frac{5}{2} mgR$$

e quindi

$$v_0 = \sqrt{5gR}$$

Dato che nel punto sommitale la velocità è diretta orizzontalmente, il tempo di caduta verticale vale

$$s = \frac{1}{2} g t_P^2 \qquad 2R = \frac{1}{2} g t_P^2 \qquad t_P = \sqrt{\frac{4R}{g}}$$

In tale tempo il corpo materiale percorre orizzontalmente il seguente spazio che è anche la distanza cercata del punto di caduta

$$h = v_0 t_P = \sqrt{5gR}\sqrt{\frac{4R}{g}} = 2\sqrt{5}\,R$$

Q3

Le equazioni del moto del sistema sono le seguenti

$$T\vec{k} - mg\vec{k} = m\ddot{z}\vec{k}$$

$$\vec{i} \cdot \left[R_1 \vec{k} \wedge (-F\vec{j}) + r_2 \vec{j} \wedge (-T\vec{k}) \right] = I\ddot{\varphi}$$

$$r_1 \ddot{\varphi} = \ddot{z}$$

e devono essere risolte con la condizione $\dot{z} = \cos t$ ovvero $\ddot{z} = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$

$T = mg$

$FR_1 - Tr_2 = 0$

da cui il risultato

$F = mg\dfrac{r_2}{R_1}$

il quale mostra che il sistema meccanico riduce la forza necessaria per sollevare il peso.

Q4)

Il momento delle forze esterne agenti inizialmente sul disco è nullo per cui il moto del disco conserva il momento della quantità di moto. Il meccanismo di aggancio introduce una forza esterna che ha però momento nullo qualora si assuma come polo di riduzione il punto di aggancio stesso. Ciò significa che li meccanismo di aggancio non può variare il momento della quantità di moto che così si conserva mantenendo il valore iniziale.

Indicando con P il punto di aggancio abbiamo allora

$$\vec{L}_P^{in} = \vec{L}_P^{fin}$$

Si noti però che il momento della quantità di moto iniziale è più comodo calcolarlo rispetto al polo di riduzione posizionato al centro O del disco. Richiamando il teorema di Konig per il momento della quantità di moto abbiamo

$$\vec{L}_\Omega = \vec{L}_{CM}^* + \vec{r}_{\Omega,\,CM} \wedge M\,\vec{v}_{CM}$$

Tenendo conto che inizialmente il sistema del centro di massa è fermo $(\vec{v}_{CM} = \vec{0}\ \ e\ \ \vec{v}_i = \vec{v}_i^*)$ e che il centro di massa coincide con il centro O del disco $(CM = 0)$, abbiamo

$$\vec{L}_P = \vec{L}_O$$

ovvero che il momento della quantità di moto iniziale non dipende dal polo di riduzione prescelto. Possiamo allora scrivere

$$\vec{L}_O^{in} = \vec{L}_P^{fin}$$

da cui, proiettando su di un'asse normale al piano del disco

$$\hat{\omega}\cdot\vec{L}_O^{in} = \hat{\omega}\cdot\vec{L}_P^{fin} \qquad I_O\dot{\varphi}_0 = I_P\dot{\varphi} \qquad \dot{\varphi} = \frac{I_O}{I_P}\dot{\varphi}_0 = \frac{1/2MR^2}{1/2MR^2 + MR^2}\dot{\varphi}_0$$

e quindi il risultato

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{3}\dot{\varphi}_0$$

Termodinamica

Q1)

$$i)\, P_A = 1.010\times10^5 + \frac{3\times9.81}{2\times10^{-3}} = 115715 Pa$$

$$ii)\, P_A V_A = nRT_A \quad V_A = \frac{nRT_A}{P_A} \quad P_B V_A = nRT_B \quad P_B = \frac{nRT_B}{V_A} = \frac{nRT_B}{nRT_A} P_A = \frac{T_B}{T_A} P_A$$

$$P_B = \frac{450}{290} 115715 = 179558\, Pa$$

$$iii) \quad \not{d}Q = dU + \not{d}L = dU \qquad \int_A^B \not{d}Q = \int_A^B dU$$

$$Q_{AB} = U_B - U_A = \frac{3}{2} nR(T_B - T_A) = \frac{3}{2}\times 2\times 8.31\times(450-290) = 3989\, J$$

$$iv)\, P_A V_C = nRT_B \quad V_C = \frac{nRT_B}{P_A} = \frac{2\times8.31\times450}{115715} = 0.065\, m^3$$

$$V_A = \frac{nRT_A}{P_A} = \frac{2\times8.31\times290}{115715} = 0.042\, m^3$$

$$h = \frac{V_C - V_A}{S} = \frac{0.065-0.042}{0.002} = 11.5\, m$$

$$v)\ \ L_{AC} = L_{BC} = \int_B^C P\, dV = P_A(V_C - V_B) = 1.16\times10^5 (0.065-0.042) = 2661 J$$