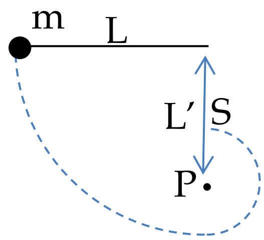
Fisica Generale LA

Prof. Nicola Semprini Cesari

Prova Scritta del 13 Gennaio 2020

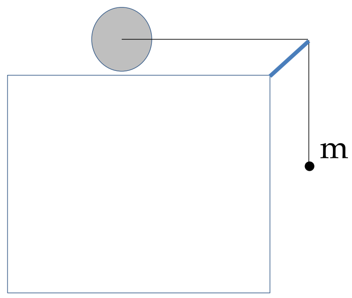
Q1) Un punto materiale di massa m è soggetto alla accelerazione $\vec{a} = \alpha t \vec{i} + \beta \vec{j}$. Determinare l'espressione della legge oraria.

Q2) Un pendolo di massa *m* e lunghezza *L* disposto orizzontalmente viene lasciato libero con velocità iniziale nulla. Giunto in posizione verticale, il filo incontra il piolo *P* di sezione trascurabile ed il pendolo continua il suo moto descrivendo un cerchio di raggio inferiore ad *L*. Determinare il più piccolo valore *L'* che permette alla massa *m* di raggiungere il punto sommitale *S* con filo teso.



Q3) Due punti materiali di massa *m* hanno coordinate (0,0,0) e (L,0,0). Determinare le coordinate di un terzo punto materiale di massa *m* sapendo che il centro di massa dell'intero sistema è equidistante dalle tre masse.

Q4) Un disco omogeneo di massa *M* e raggio *R* rotola senza strisciare trainato da un filo inestensibile di massa trascurabile al cui capo è applicata una massa *m*. Determinare l'accelerazione del centro di massa del disco.



Q5) Scrivere l'espressione delle forze inerziali e commentarne il contenuto fisico specificando il significato dei diversi termini.

Q6) Spiegare e commentare i concetti di massa inerziale e gravitazionale.

Termodinamica

Q1) Tre moli di gas monoatomico subiscono il seguente ciclo di trasformazioni quasi statiche: A-B compressione adiabatica , B-C espansione isobara, C-D espansione adiabatica, D-A compressione isobara. Calcolare: i) il calore scambiato dal sistema in ciascuna delle trasformazioni in funzione delle pressioni e dei volumi; ii) l'efficienza del ciclo espressa in funzione delle pressioni e dei volumi; iii) l'efficienza espressa in funzione delle sole pressioni.

Q2) Un gas monoatomico, in uno stato iniziale con temperatura $T_0 = 300\,^\circ K$ e pressione, si espande attraverso una trasformazione adiabatica quasi statica dimezzando il valore della pressione. Determinare la temperatura finale.

Q3) Si commenti il secondo principio della termodinamica.

SOLUZIONI

Meccanica

Q1)

$$\vec{a} = \alpha t\,\vec{i} + \beta\,\vec{j} = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j}$$

$$\ddot{x} = \alpha t \qquad \dot{x} = \dot{x}_0 + \frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad x = x_0 + \dot{x}_0 t + \frac{1}{6}\alpha t^3$$

$$\ddot{y} = \beta \qquad \dot{y} = \dot{y}_0 + \beta t \qquad y = y_0 + \dot{y}_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2$$

Q2)

Dalla conservazione della energia nel punto iniziale e nel punto P si ha

$$E_{in} = E_{fin} \qquad mgL = mg2(L-L') + \frac{1}{2}mv_S^2 \qquad v_S^2 = 2g(2L'-L)$$

Dal secondo principio della diniamica nel punto S si ha

$$-T\vec{k} - mg\vec{k} = -m\frac{v_S^2}{(L-L')}\vec{k} \qquad T = m(\frac{v_S^2}{(L-L')} - g)$$

Richiedendo la condizione di filo teso si ha

$$T = m(\frac{v_S^2}{L-L'} - g) > 0 \quad v_S^2 > g(L-L') \qquad 2g(2L'-L) > g(L-L') \quad L' > \frac{3}{5}L$$

Q3)

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m(0,0) + m(L,0) + m(x,y)}{3m} = (\frac{L+x}{3}, \frac{y}{3})$$

Affinché sia equidistante dalle prime due masse, l’ascissa deve coincidere con il punto mediano

$$\frac{L+x}{3} = \frac{L}{2} \qquad x = \frac{L}{2}$$

dalla equidistanza della prima e terza massa otteniamo

$$(\frac{L+x}{3})^2 + (\frac{y}{3})^2 = (\frac{L+x}{3} - x)^2 + (\frac{y}{3} - y)^2 \qquad con\ x = L/2 \qquad y = \frac{\sqrt{3}}{2}L$$

Q4)

L’equazione del moto del disco è la seguente

$$\vec{M}_{\Omega}^{est} \cdot \hat{\omega} = I_{\hat{\omega}} \ddot{\varphi}$$
$$R\,d\varphi = -dY_{CM} \qquad R\ddot{\varphi} = -\ddot{Y}_{CM}$$
$$I_{\hat{\omega}} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \sigma r\, d\varphi\, dr\, r^2 = \sigma 2\pi \frac{1}{4} R^4 = \frac{1}{2} M R^2$$
$$I_{\hat{\omega}'} = \frac{1}{2} M R^2 + M R^2 = \frac{3}{2} M R^2$$
$$(R\vec{k}) \wedge (T\vec{j}) \cdot \vec{i} = -\frac{3}{2} M R^2 \frac{\ddot{Y}_{CM}}{R}$$
$$\ddot{Y}_{CM} = \frac{2}{3} \frac{T}{M}$$

L’equazione del moto della massa è invece

$$\vec{F} = m\vec{a}$$
$$(T - mg)\vec{k} = m\ddot{z}\vec{k}$$
$$dY_{CM} = -dz \qquad \ddot{Y}_{CM} = -\ddot{z}$$
$$T = -m\ddot{Y}_{CM} + mg$$

Otteniamo infine

$$\ddot{Y}_{CM} = \frac{1}{\frac{3M}{2m} + 1} g$$

Termodinamica

i)
$$đQ = dU + đL = nc_v dT + pdV$$
$$PV = nRT$$

$$adiabatica\ \ AB: \qquad Q_{AB} = 0$$
$$isobara\ \ BC: \qquad PdV = nRdT \qquad đQ = nc_v dT + pdV = \frac{c_v}{R} pdV + pdV = \frac{c_p}{R} pdV$$
$$Q_{BC} = \int_B^C \frac{c_p}{R} pdV = \frac{c_p}{R} P_{BC}(V_C - V_B)$$
$$adiabatica\ \ CD: \qquad Q_{CD} = 0$$

$$isobara\ \ DA: \quad PdV = nRdT \quad đQ = nc_v dT + pdV = \frac{c_v}{R} pdV + pdV = \frac{c_p}{R} pdV$$

$$Q_{DA} = \int_D^A \frac{c_p}{R} pdV = \frac{c_p}{R} P_{DA}(V_A - V_D)$$

ii)

$$\eta = \frac{L}{|Q_{in}|} = \frac{|Q_{in}| - |Q_{out}|}{|Q_{in}|} = 1 - \frac{|Q_{out}|}{|Q_{in}|} = 1 - \frac{|Q_{DA}|}{|Q_{BC}|} = 1 - \frac{\frac{c_p}{R} P_{DA}(V_D - V_A)}{\frac{c_p}{R} P_{BC}(V_C - V_B)} = 1 - \frac{P_{DA}(V_D - V_A)}{P_{BC}(V_C - V_B)}$$

iii)

la relazione pressione volume nelle adiabatiche soddisfa la relazione

$$VP^{\frac{c_V}{c_P}} = K$$

$$V_A P_A^{\frac{c_V}{c_P}} = V_B P_B^{\frac{c_V}{c_P}} \qquad V_A = V_B \left(\frac{P_B}{P_A}\right)^{\frac{c_V}{c_P}}$$

$$V_C P_C^{\frac{c_V}{c_P}} = V_D P_D^{\frac{c_V}{c_P}} \qquad V_D = V_C \left(\frac{P_C}{P_D}\right)^{\frac{c_V}{c_P}}$$

$$\eta = 1 - \frac{P_{DA}(V_D - V_A)}{P_{BC}(V_C - V_B)} = 1 - \frac{P_{DA}[V_C (\frac{P_{BC}}{P_{DA}})^{\frac{c_V}{c_P}} - V_B (\frac{P_{BC}}{P_{DA}})^{\frac{c_V}{c_P}}]}{P_{BC}(V_C - V_B)} = 1 - \frac{P_{DA}}{P_{BC}} \left(\frac{P_{BC}}{P_{DA}}\right)^{\frac{c_V}{c_P}} = 1 - \left(\frac{P_{BC}}{P_{DA}}\right)^{\frac{c_V}{c_P} - 1}$$

Q2)

$$0 = nc_V dT + pdV \qquad pdV + Vdp = nRdT$$

$$pdV = nRdT - Vdp$$

$$0 = nc_V dT + nRdT - Vdp = nc_V dT + nRdT - \frac{nRT}{p} dp$$

$$0 = (c_V + R)\frac{dT}{T} - R\frac{dP}{P} \qquad 0 = \frac{dT}{T} - \frac{R}{(c_V + R)} \frac{dP}{P}$$

$$\ln\frac{T_2}{T_1} = \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{R}{(c_V + R)}} \qquad T_2 = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{R}{(c_V + R)}} = 300\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1+\frac{3}{2}}} = 227.4^\circ K$$