Fisica Generale LA

Prof. Nicola Semprini Cesari

Prova Scritta del 16 Giugno 2014

Meccanica

Q1) Un moto di caduta è dato dalle equazioni orarie cartesiane $x = v_0 t\ ;\ y = y_0 - \frac{1}{2} g t^2$. Calcolare le derivate $\dot{s}$ ed $\ddot{s}$. Calcolare infine l'andamento temporale della curvature della traiettoria (si calcoli il modulo della accelerazione nella rappresentazione intrinseca).

Q2) Verificare se il campo di forze $\vec{F}(x,y,z) = -\alpha(2x - \beta y)\vec{i} + -\alpha(2y - \beta x)\vec{j} + \alpha\beta z\vec{k}$, dove α è una costante,
a) è conservativo; b) in caso affermativo calcolarne l'espressione dell'energia potenziale $V(x,y,z)$; c) determinare inoltre le dimensioni e le unità di misura delle costanti α e β.

Q3) Un corpo materiale assimilabile ad un superficie rettangolare di lati *a* e *b* e densità superficiale di massa σ uniforme, ruota attorno ad un asse disposto lungo il lato *a*. Determinare il momento d'inerzia del corpo materiale.

Q4) Mostrare i passaggi che conducono alla espressione generale della energia meccanica di un punto materiale.

Q5) Commentare e dedurre la prima equazione cardinale della meccanica.

Problema) In un riferimento cartesiano, nel quale l'asse *z* è verticale ascendente, un'asta omogenea di massa *M* e lunghezza *L* può ruotare nel piano verticale (*y*,*z*) attorno a un asse orizzontale passante per un suo estremo *A*. Inizialmente l'asta è tenuta in posizione orizzontale da una fune, perpendicolare all'asta stessa e collegata all'altro estremo *B* di questa. Nel punto *C*, situato alla distanza *L/3* dall'estremo *A* è applicata una forza $\vec{F} = -\frac{3}{2} Mg\vec{k}$ diretta verso il basso. Determinare l'espressione del modulo, nonché direzione e verso: a) della reazione vincolare $\vec{R}$ nel punto *A*; b) della tensione $\vec{T}$ della fune. Se a un certo istante la fune si spezza, determinare l'espressione c) del modulo $\frac{d\omega}{dt}$ dell' accelerazione angolare dell'asta.

Termodinamica

1) Enunciare e dimostrare il teorema di Clausius.

2) Fornire l'espressione della variazione di entropia di un gas perfetto nelle variabili T e V. Trovare l'equazione soddisfatta dagli stati di equilibrio di eguale entropia.

Soluzioni compito:

Meccanica

Quesito 1

$\vec{v} = v_0\hat{\imath} - gt\hat{\jmath} \qquad |\vec{v}| = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2} \qquad |\vec{v}| = \dot{s} \qquad \dot{s} = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2} \qquad \ddot{s} = \frac{d}{dt}\sqrt{v_0^2 + g^2t^2} = \frac{g^2t}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}$

$\vec{a} = -g\hat{\jmath} \qquad \vec{a} = \ddot{s}\hat{t} + \frac{1}{R}\dot{s}^2\hat{n} \qquad |\vec{a}|^2 = \ddot{s}^2 + \frac{\dot{s}^4}{R^2} \qquad g^2 = \frac{g^4t^2}{(v_0^2 + g^2t^2)} + \frac{(v_0^2 + g^2t^2)^2}{R^2} \qquad R = \frac{(v_0^2 + g^2t^2)^{3/2}}{gv_0}$

Quesito 2

Il rotore è nullo, quindi il campo è conservativo; integrando sul circuito a zig-zag si ha

$V(x,y,z) = \alpha(x^2 + y^2 - \beta xy - \beta\frac{z^2}{2}).$

Le dimensioni : $[\alpha] = [mt^{-2}] \Rightarrow N/m$
$\beta \Rightarrow$ adimensionale

Quesito 3

$I = \iint_\Sigma \sigma r^2 dS = \int_0^b\int_0^a \sigma x^2 dxdy = \sigma\int_0^b x^2dx\int_0^a dy = \sigma\frac{1}{3}b^3a = \frac{1}{3}Mb^2$

Problema

a), b) Applichiamo le due equazioni cardinali della statica, assumendo per la seconda come centro di riduzione l'estremo *A*. Abbiamo così:

$R\vec{k} - \frac{3}{2}Mg\vec{k} - Mg\vec{k} + T\vec{k} = \vec{0} \qquad T = \frac{5}{2}Mg - R$

$\frac{L}{3}\vec{j} \wedge (-\frac{3}{2}Mg\vec{k}) + \frac{L}{2}\vec{j} \wedge (-Mg\vec{k}) + L\vec{j} \wedge (T\vec{k}) = \vec{0} \qquad -\frac{1}{2}MgL\,\hat{\imath} - \frac{1}{2}MgL\,\hat{\imath} + TL\hat{\imath} = 0 \qquad -MgL + TL = 0$

da cui

$R = \frac{5}{2}Mg - T \qquad R = \frac{3}{2}Mg$

$T = Mg \qquad T = Mg$

(il valore positivo delle componenti informa che reazione del vincolo e tensione della fune sono ambedue rivolte verso l'alto).

c) Ragionando come sopra, tenendo presente che la tensione della fune viene a mancare, $I_A = \int_0^L \lambda\, l^2 dl = \lambda\int_0^L l^2dl = \frac{M}{L}\frac{L^3}{3} = \frac{1}{3}ML^2$, che le due rimanenti forze esterne hanno momento rispetto all'estremo *A* ciascuna di modulo $Mg\frac{L}{2}$ per un totale di MgL, la seconda equazione cardinale della dinamica

$\hat{\omega}\cdot\vec{M}_\Omega^{(e)} = I_{\hat{\omega}}\ddot{\varphi} \qquad \hat{\imath}\cdot[\frac{L}{3}\hat{\jmath} \wedge (-\frac{3}{2}Mg\hat{k}) + \frac{L}{2}\hat{\jmath} \wedge (-Mg\hat{k})] = \frac{1}{3}ML^2\ddot{\varphi}$

$\hat{\imath}\cdot[-\frac{1}{2}MgL\hat{\imath} - \frac{1}{2}MgL\hat{\imath}] = \frac{1}{3}ML^2\ddot{\varphi} \qquad -MgL = \frac{1}{3}ML^2\ddot{\varphi} \qquad \ddot{\varphi} = -3\frac{g}{L}$

Termodinamica

Q2

$$dS = nc_V \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} dV = nc_V \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V} \qquad dS = 0 \qquad nc_V \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V} = 0 \qquad \frac{dT}{T} + \frac{R}{c_V} \frac{dV}{V} = 0$$

$$d\ln(T) + \frac{R}{c_V} d\ln(V) = 0 \qquad d\ln(T) + d\frac{R}{c_V}\ln(V) = 0 \qquad d\ln(T) + d\ln(V^{\frac{R}{c_V}}) = 0 \qquad d\ln(TV^{\frac{R}{c_V}}) = 0$$

$$TV^{\frac{R}{c_V}} = costante$$