Fisica Generale LA

Prof. Nicola Semprini Cesari

Prova Scritta del 17 Settembre 2013

Meccanica

1) La posizione di un punto materiale è $\vec{r}(t) = \frac{t^3}{3}\hat{i} + \sqrt{2}\,t^2\hat{j} + 4t\hat{k}$ con r in metri e t in secondi. Calcolare: a) la velocità vettoriale media fra i punti t_1 = 0s e t_2 = 2s; b) la velocità scalare media fra gli stessi istanti di tempo.

2) Dato il campo di forze $\vec{F}(x,y,z) = 2\alpha xy\hat{i} + \beta x^2\hat{j}$ determinare: a) le dimensioni fisiche delle costanti α e β; b) per quale condizione sulle costanti α e β il campo di forze è conservativo e in quel caso calcolarne l'energia potenziale; c) il lavoro fatto dalla forza quando è conservativa per spostare il punto da A(2,-2,-1) a B (0,1,0).

3) All'estremità di una asticella omogenea di lunghezza L e massa M sono fissate due masse puntiformi di valore 2M ciascuna. Calcolare il momento d'inerzia rispetto ad un asse normale passante per il centro dell'asticella.

4) Scrivere l'espressione della forza di gravitazione universale commentando tutti i simboli che vi compaiono.

5) Fornire la definizione di sistema del centro di massa. Enunciare e dimostrare il primo teorema del centro di massa.

Problema)

Due masse m_1=2 kg e m_2=3 kg sono collegate tra loro da una fune inestensibile di massa trascurabile passante sopra una carrucola (vedi figura). La massa m_1 è appoggiata su un piano orizzontale liscio, tenuta inizialmente ferma da una molla di costante elastica k=200 N/m, mentre la massa m_2 è appesa lungo la verticale. In condizioni di equilibrio, determinare: a) l'allungamento della molla nel caso la carrucola sia ideale con massa trascurabile; b) l'allungamento della molla nel caso la carrucola sia reale approssimabile ad un disco di raggio R=20 cm e massa M= 2kg.

Termodinamica

1) Fornire gli enunciati del secondo principio della termodinamica nella forma di Clausius e Kelvin-Plank. Dimostrare la loro equivalenza.

2) Due moli di gas perfetto monoatomico sono contenute in un recipiente a pareti rigide alla temperatura T_G . In seguito il recipiente è posto in contato termico con un serbatoio di calore alla temperatura T_S fino al raggiungimento dell'equilibrio termico. Calcolare i) il calore scambiato; ii) la variazione di entropia del serbatoio, del gas e dell'intero sistema.

Problema)

Un contenitore adiabatico di volume V è diviso in due compartimenti di volume V_1 e V_2 da un setto mobile conduttore di calore. Nei compartimenti si trovano rispettivamente n_1 ed n_2 moli di due differenti gas ideali di tipo aventi la stessa temperatura T ma differenti pressioni P_1 e P_2. Ad un certo istante il setto mobile viene lasciato libero: i) spiegare qualitativamente cosa succede e se il processo che ha luogo è reversibile o irreversibile; ii) calcolare l'espressione della entropia in funzione del volume del primo gas; ii) calcolare il volume del primo gas nella configurazione di equilibrio massimizzando l'entropia; iv) calcolare il volume del primo gas nella configurazione di equilibrio nella ipotesi che V_1=V_2 e P_1=$2P_2$.

Soluzioni Meccanica:

Esercizio 1:

a) la velocità vettoriale media si calcola tramite la formula

$$<\vec{v}_m>=\frac{\vec{r}(t_2)-\vec{r}(t_1)}{t_2-t_1}=\frac{\left(\frac{8}{3}\hat{i}+4\sqrt{2}\hat{j}+8\hat{k}\right)-\left(0\hat{i}+0\hat{j}+0\hat{k}\right)}{2-0}=\frac{\frac{8}{3}\hat{i}+4\sqrt{2}\hat{j}+8\hat{k}}{2}=\frac{4}{3}\hat{i}+2\sqrt{2}\hat{j}+4\hat{k}$$

b) la velocità scalare media invece si ottiene con la formula

$$<v_m>=\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

dove per prima cosa bisogna calcolare il valore Δs che rappresenta la lunghezza del percorso.

Sapendo che $\vec{v}(t)=\frac{d\vec{s}}{dt}$ allora $\Delta s=\int_{t_1}^{t_2}|v|dt$ con $|v|$ modulo della velocità. Quindi:

$$\vec{v}(t)=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=t^2\hat{i}+2\sqrt{2}t\hat{j}+4\hat{k}\Rightarrow|v|=\sqrt{(t^2)^2+(2\sqrt{2}t)^2+4^2}=\sqrt{t^4+8t^2+16}=\sqrt{(t^2+4)^2}=t^2+4$$

$$\Delta s=\int_{t_{10}}^{t_2}|v|dt=\int_0^2(t^2+4)dt=\left[\frac{t^3}{3}+4t\right]_0^2=\left(\frac{8}{3}+8\right)-\left(0+0\right)=\frac{8}{3}+8=\frac{32}{3}=10.7m$$

Quindi

$$<v_m>=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{10.7}{2}=5.3m/s$$

Esercizio 2:

a) le dimensioni delle costanti si ottengo imponendo che tutte le componenti della forza siano nelle dimensioni idonee cioè $[N]=[MLT^{-2}]$. Quindi:

$$[\alpha]=\frac{[MLT^{-2}]}{[xy]}=\frac{[MLT^{-2}]}{[L^2]}=[ML^{-1}T^{-2}]$$

$$[\beta]=\frac{[MLT^{-2}]}{[x^2]}=\frac{[MLT^{-2}]}{[L^2]}=[ML^{-1}T^{-2}]$$

b) per verificare quando il campo è conservativo calcolo il rotore della forza. Imponendo che il rotore sia nullo ottengo la condizione sulle costanti che rendono il campo di forze conservativo.

$$\nabla\times\vec{F}=\begin{pmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \delta/\delta x & \delta/\delta y & \delta/\delta z\\ F_x & F_y & F_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \delta/\delta x & \delta/\delta y & \delta/\delta z\\ 2\alpha xy & \beta x^2 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\hat{i}\left(\frac{\partial(0)}{\partial y}-\frac{\partial(\beta x^2)}{\partial z}\right)-\hat{j}\left(\frac{\partial(0)}{\partial x}-\frac{\partial(2\alpha xy)}{\partial z}\right)+\hat{k}\left(\frac{\partial(\beta x^2)}{\partial x}-\frac{\partial(2\alpha xy)}{\partial y}\right)=$$

$$=\hat{i}(0-0)-\hat{j}(0-0)+\hat{k}(2\beta x-2\alpha x)\Rightarrow\nabla\times\vec{F}=\vec{0}\Longleftrightarrow x(\beta-\alpha)=0\Rightarrow\alpha=\beta$$

Ovviamente il dominio di questa forza é $x \neq 0$.

Il campo è conservativo se α=β. Posso quindi calcolare l'energia potenziale di un campo di forze del tipo:

$\vec{F}(x,y,z) = 2\alpha xy\hat{i} + \alpha x^2 \hat{j}$

$$V = -\int_{0,0,0}^{x,y,z} \vec{F} d\vec{s} = -\int_{0,0,0}^{x,0,0} F_x dx - \int_{x,0,0}^{x,y,0} F_y dy - \int_{x,y,0}^{x,y,z} F_z dz = -\int_{0,0,0}^{x,0,0} (2\alpha xy)dx - \int_{x,0,0}^{x,y,0} (\alpha x^2)dy - \int_{x,y,0}^{x,y,z} (0)dz =$$

$$= \left[2\alpha y \frac{x^2}{2} \right]_{000}^{x00} - \left[\alpha x^2 y \right]_{x00}^{xy0} = -\alpha x^2 y$$

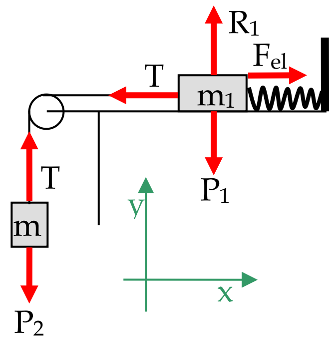
c) avendo trovato l'energia potenziale calcolare il lavoro diventa banale:

$L_{A,B} = V_A - V_B = (-\alpha x^2 y)_{2,-2,-1} - (-\alpha x^2 y)_{0,1,0} = [-\alpha * 2^2 * (-2)] - [-\alpha * 0 * 1] = 8\alpha Joule$

Esercizio 3:

$$I = 2 \cdot 2M(\frac{L}{2})^2 + 2\int_0^{L/2} \frac{M}{L} x^2 dx = ML^2 + 2\frac{M}{L}\frac{1}{3}(\frac{L}{2})^3 = ML^2 + \frac{ML^2}{12} = \frac{13}{12} ML^2$$

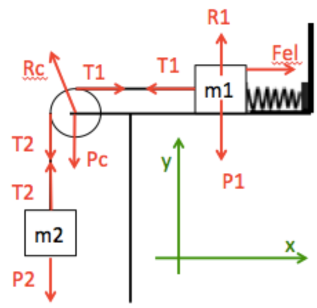
Problema



a) Partiamo dal caso in cui il sistema sia in equilibrio statico e la carrucola sia ideale e di massa trascurabile. Per studiare il sistema é sufficiente considerare le due masse (in figura sono rappresentate tutte le forze in gioco). La tensione ai capi della carrucola é la stessa. Essendo in equilibrio scriviamo che la risultante delle forze sulle due masse é nulla.:

$$\begin{cases} m_1 \Rightarrow \vec{T} + \vec{P}_1 + \vec{R}_1 + \vec{F}_{el} = 0 \\ m_2 \Rightarrow \vec{T} + \vec{P}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 \ (x) \Rightarrow -T + k\Delta x = 0 \\ m_1 \ (y) \Rightarrow R_1 - m_1 g = 0 \\ m_2 \ (y) \Rightarrow T - m_2 g = 0 \end{cases}$$

Da cui si deduce facilmente che $\Delta x = \frac{m_2 g}{k} = 0{,}147m$.



b) Vediamo il caso in cui il sistema sia in equilibrio statico e la carrucola sia reale.In figura sono segnate in rosso tutte le forze agenti sui tre corpi (massa 1, massa 2 e carrucola), mentre in verde è segnato il sistema di riferimento scelto. Essendo in equilibrio, applichiamo le equazioni della statica sui tre corpi, tenendo presente che la carrucola essendo reale presenta tensioni diverse ai suoi capi dove sono appesi i corpi e che essendo un corpo esteso deve annullarsi anche il momento delle forze. Perciò:

$$\begin{cases} m_1 \Rightarrow \vec{T}_1 + \vec{P}_1 + \vec{R}_1 + \vec{F}_{el} = 0 \\ m_2 \Rightarrow \vec{T}_2 + \vec{P}_2 = 0 \\ carr, \vec{F})\ \vec{T}_1 + \vec{P}_c + \vec{T}_2 + \vec{R}_C = 0 \\ carr, \vec{M})\ (R\hat{j}) \times (T_1 \hat{i}) + (-R\hat{i}) \times (-T_2\,\hat{j}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1\ (x) \Rightarrow -T_1 + k\Delta x = 0 \\ m_1\ (y) \Rightarrow R_1 - m_1 g = 0 \\ m_2\ (y) \Rightarrow T_2 - m_2 g = 0 \\ carr, \vec{F}, x) - R_{CX} + T_1 = 0 \\ carr, \vec{F}, y)\ R_{CY} + T_2 - m_C g = 0 \\ carr, \vec{M}) - RT_1\hat{k} + RT_2\hat{k} = 0 \end{cases}$$

dove nella seconda colonna abbiamo proiettato le equazioni lungo gli assi del sistema di riferimento. Notiamo che bastano le equazioni $m_1(x)$, $m_2(y)$ e carr(M) per risolvere il problema. Allora risolvendo si ottiene

$T_1=T_2$ e
$T_2=m_2*g$

perciò l'allungamento della molla é uguale al caso precedente:

$$-T + k\Delta x = 0 \Rightarrow k = \frac{T}{k} = \frac{m_2 g}{k} = 0{,}147m$$

Soluzioni Termodinamica

2)

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

i) calore scambiato dal gas

$$dQ = nC_V dT + PdV = nC_V dT \qquad \Delta Q_{Gas} = nC_V (T_S - T_G)$$

ii) variazione entropia serbatoio

$$\Delta S_S = \int \frac{dQ}{T_S} = \frac{1}{T_S}\int dQ = \frac{\Delta Q_s}{T_S} = \frac{-\Delta Q_G}{T_S} = \frac{-nC_V (T_S - T_G)}{T_S} = nC_V (\frac{T_G}{T_S} - 1)$$

variazione entropia gas

$$\Delta S_G = \int \frac{dQ}{T} = \int_{T_G}^{T_S} \frac{nC_V dT}{T} = nC_V \ln(\frac{T_S}{T_G})$$

variazione entropia sistema

$$\Delta S_{TOT} = nC_V [\ln(\frac{T_S}{T_G}) + \frac{T_G}{T_S} - 1]$$

Problema

ii) l'espressione della entropia elementare nel corso di una trasformazione a temperatura costante vale

$$dS = nC_V \frac{dT}{T} + nR\frac{dV}{V} = nR\frac{dV}{V}$$

integrando e sommando le entropie parziali otteniamo la variazione di entropia dell'intero sistema

$$\Delta S = n_1 R \ln(\frac{V_1^{'}}{V_1}) + n_2 R \ln(\frac{V_2^{'}}{V_2})$$

dato che $V_2^{'} + V_1^{'} = V$, otteniamo l'espressione della entropia in funzione del volume del primo gas

$$\Delta S = n_1 R \ln(\frac{V_1^{'}}{V_1}) + n_2 R \ln(\frac{V - V_1^{'}}{V_2})$$

iii) per rendere massima l'entropia dobbiamo imporre che

$$\frac{d\Delta S}{dV_1^{'}} = n_1 R \frac{V_1}{V_1^{'}} - n_2 R \frac{V_2}{V - V_1^{'}} = 0$$

da cui

$$V_1^{'} = \frac{n_1 V_1}{n_1 V_1 + n_2 V_2} V$$

tenendo conto che $P_1 V_1 = n_1 RT \quad e \quad P_2 V_2 = n_2 RT$ otteniamo

$$V_1^{'} = \frac{P_1 V_1^2}{P_1 V_1^2 + P_2 V_2^2} V$$

iv) se $V_1 = V_2 \ e \ P_1 = 2P_2$ si ottiene

$$V_1^{'} = \frac{2P_2}{2P_2 + P_2} V = \frac{2}{3} V$$