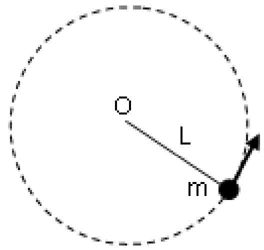
Fisica Generale LA

Prova Scritta del 23 Luglio 2012
Prof. Nicola Semprini Cesari

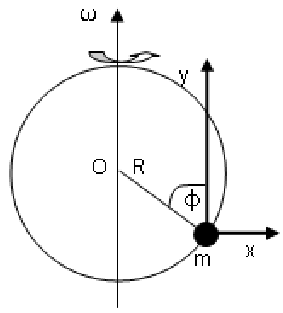
Meccanica

1) Un disco con velocità angolare iniziale 2rad/s compie 40 giri per rallentare fino al completo arresto. Assumendo che il moto sia ad accelerazione angolare costante si calcoli il tempo di arresto.

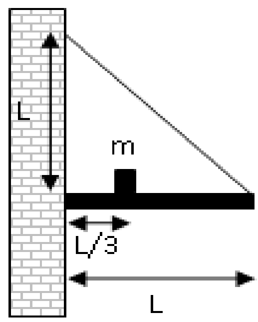
2) Una massa $m = 1\,kg$ è collegata ad un filo inestensibile di lunghezza $l = 1\,m$ fissato in O su un piano orizzontale liscio. La massa, inizialmente ferma, si muove di moto circolare uniforme. Determinare, rispetto ad un sistema di riferimento solidale con la massa m, il vettore risultante sia delle forze reali che delle fittizie agenti sulla massa.



3) Una pallina di massa $m = 10\,g$ è vincolata a muoversi su una guida a forma di anello circolare di raggio $R = 10\,cm$ posta in un piano verticale. L'anello è messo in rotazione attorno al diametro verticale con una velocità angolare ω=14 rad/s. Calcolare l'angolo rispetto alla verticale in cui si trova la pallina in condizioni di equilibrio.



4) Un'asta di lunghezza $L = 50\,cm$ e massa $M = 0.5\,kg$ è incernierata ad un estremo ad un muro tramite un perno privo di attrito, mentre l'altro estremo è tenuto orizzontalmente da una corda fissata al muro a distanza L. Una massa $m = 2\,kg$ è posta a distanza $L/3$ dal perno. Calcolare, in condizioni di equilibrio, la tensione della fune.



5) Dato il campo di forze $\vec{F}(x, y, z) = \alpha y\hat{i} + \beta x\hat{j} + \alpha z\hat{k}$ determinare: a) le dimensioni fisiche delle costanti α e β; b) per quali valori delle costanti α e β il campo di forze è conservativo e calcolarne in quei casi l'energia potenziale; c) determinare il lavoro compiuto dalla forza conservativa con $\alpha = 4$ (nelle sue opportune unità di misura) quando sposta il suo punto di applicazione da A di coordinate (0,4,1) a B di coordinate (2,1,2).

6) Si commenti in dettaglio le proprietà del moto circolare uniforme.

7) Si commenti in dettaglio la legge di gravitazione universale.

Termodinamica

---

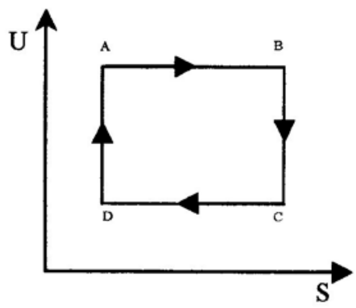
1) Una sorgente di calore di potenza *K=15 W* riscalda una bombola contenente *5 moli* di gas. Determinare la capacità termica sapendo che dopo *3* minuti la temperatura del gas si innalza di *100 C*.

2) Nel corso di una trasformazione un gas monoatomico aumenta la propria temperatura ed il proprio volume di un fattore due. Determinare la variazione di entropia.

3) Commentare e mostrare i passaggi che conducono a stabilire l'equivalenza tra le formulazioni di Kelvin-Plank e Clausius del secondo principio della termodinamica.

Problema

n moli di gas perfetto biatomico compiono una trasformazione ciclica reversibile ABCD rappresentata nel piano *U-S* (energia interna-entropia) con un rettangolo avente i lati paralleli agli assi.



Supponendo noti i valori S_A, S_C, U_A, U_C dell'entropia e dell'energia interna negli stati *A* e *C*, e per lo stato *A* il volume V_A e la pressione p_A, determinare le espressioni delle seguenti quantità: a) il volume V_B; b) la temperatura T_D; c) il rendimento η del ciclo; d) il lavoro totale *L* compiuto dal gas nel ciclo.

SOLUZIONI

Meccanica

1) Si tratta di un moto uniformemente accelerato (con accelerazione negativa) che può essere scritto per le coordinate angolari nel seguente modo:

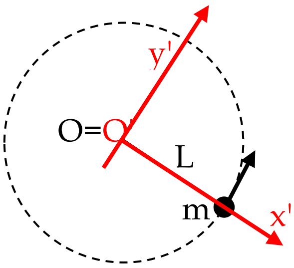
$$\begin{cases} \omega = \omega_0 - \alpha t \\ \theta = \theta_0 + \omega_0 t - \frac{1}{2}\alpha t^2 \end{cases} \text{ dove } \theta_0 = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} \omega = \omega_0 - \alpha t \\ \theta = \omega_0 t - \frac{1}{2}\alpha t^2 \end{cases}$$

Viene chiesto il tempo quando si arresta (t_a) e l'accelerazione angolare (α) → cioè è necessario imporre $\omega = 0$ dopo 40 giri → $\theta = 40 \bullet 2\pi$ e dunque:

$$\begin{cases} \omega_0 - \alpha t_a = 0 \\ 40 \bullet 2\pi = \omega_0 t_a - \frac{1}{2}\alpha t_a^{\,2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \omega_0 - \alpha t_a = 0 \\ 40 \bullet 2\pi = \omega_0 t_a - \frac{1}{2}\alpha t_a^{\,2} \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\omega_0^{\,2}}{160\pi} = \frac{4}{160\pi} = \frac{1}{40\pi} = 0.008\, rad/s^2 \\ t_a = \frac{160\pi}{\omega_0} = 80\pi = 251\, s \end{cases}$$

2) Prendiamo un sistema di riferimento (SdR) centrato in O, con l'asse x' sul piano del moto e che segue la pallina, l'asse y' sempre sul piano del moto e perpendicolare ad x' e l'asse z' perpendicolare al piano del moto verso l'alto (vedi figura). Rispetto a questo SdR la pallina è ferma e dunque $\sum \vec{F} = 0$; scriviamo tutte le possibili forze agenti sulla pallina



$\vec{F}' = \vec{F}_{reali} + \vec{F}_{fitt}$ dove

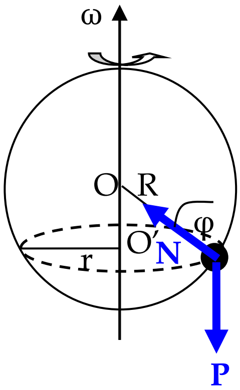
$\vec{F}_{reali} = -mg\hat{k}' + R\hat{k}' + T\hat{x}' = T\hat{x}'$ sono le forze reali in cui il primo contributo è la forza peso, il secondo la reazione vincolare del piano orizzontale (che danno risultante nulla) ed il terzo la tensione del filo (che funge da forza centripeta)

$$\vec{F}_{fitt} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' - m a_{oo'} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = m\frac{v^2}{L}\hat{x}'$$

sono le forze fittizie in cui l'unico termine non nullo è la forza centrifuga diretta lungo l'asse x'.

Essendo $\sum \vec{F} = 0$ si deduce che $\begin{cases} x' \\ y' \\ z' \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -T + m\frac{v^2}{L} = 0 \\ 0 = 0 \\ R - mg = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T = m\frac{v^2}{L} \\ 0 = 0 \\ R = mg \end{cases}$

3) Assumendo un sistema di versori cilindrico centrato in O′

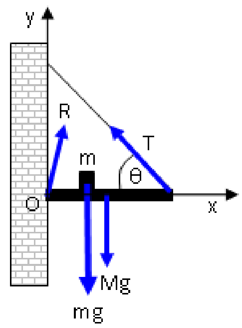


$$N\sin\varphi = m\frac{v^2}{r} \qquad r = R\sin\varphi \qquad v = \omega r$$
$$N\cos\varphi = mg$$

$$\cos\varphi = \frac{g}{\omega^2 R} = \frac{9.81}{14^2 \times 0.1} = 0.5$$

da cui segue che $\varphi = 60^\circ$.

4) Bisogna imporre le condizioni della statica alle forze che agiscono sul sistema. Innanzitutto sul sistema agiscono 4 forze (figura a lato): le 2 forze peso dell'asta e della massa, la tensione della corda e la reazione vincolare del perno (che non so come è diretta ed è stata disegnata a caso). Tutte queste forze sono applicate in punti diversi. Scegliamo un sistema di riferimento (sdr) con origine O sul perno e assi x e y come in figura e valutiamo il momento della forza rispetto al polo O. Con ovvie considerazioni geometriche si otttiene $\theta = 45^\circ$.



Condizioni di statica:

$$\begin{cases}\sum \vec{F} = 0 \\ \sum \vec{M}_O = 0\end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases}\vec{P}_A + \vec{P}_m + \vec{T} + \vec{R} = 0 \\ \frac{L}{2}\hat{i} \times (-Mg)\hat{j} + \frac{L}{3}\hat{i} \times (-mg)\hat{j} + L\hat{i} \times \left(-T\cos\theta\,\hat{i} + T\sin\theta\; j\right) + 0 \times \vec{R} = 0\end{cases}$$

dove $\vec{P}_A = -Mg\hat{j}$ è il peso dell'asta, $\vec{P}_m = -mg\hat{j}$ è il peso della massa m, $\vec{T} = -T\cos\theta\,\hat{i} + T\sin\theta\; j$ è la tensione del filo e $\vec{R}$ è la reazione del perno. Svolgendo i prodotti vettoriali si ottiene:

$$\begin{cases}\vec{P}_A + \vec{P}_m + \left(-T\cos\theta\,\hat{i} + T\sin\theta\; j\right) + \vec{R} = 0 \\ -\frac{MLg}{2}\hat{k} - \frac{mLg}{3}\hat{k} + LT\sin\theta\,\hat{k} = 0\end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases}-Mg\hat{j} - mg\hat{j} + \left(-T\cos\theta\,\hat{i} + T\sin\theta\; j\right) + \vec{R} = 0 \\ T = \frac{g}{\sin\theta}\left(\frac{M}{2} + \frac{m}{3}\right) = 12.7\ N\end{cases}$$

Sostituendo nella prima equazione si ottiene:

$$\begin{cases} \vec{R} = (Mg + mg)\,\hat{j} - \left(-T\cos\theta\,\hat{i} + T\sin\theta\ j\right) = T\cos\theta\,\hat{i} + (Mg + mg - T\sin\theta)\,\hat{j} = \left(8.98\,\hat{i} + 15.5\,\hat{j}\right) N \\ \vec{T} = -T\cos\theta\,\hat{i} + T\sin\theta\ j = \left(-8.98\,\hat{i} + 8.98\ j\right) N \end{cases}$$

5)

a)

Le costante α e β hanno le seguenti dimensioni fisiche:

[α]=[β] = [F]/[L]=[M][T^{-2}] e unità di misura *N/m* oppure *Kg/ (s^2).*

b)

Il rotore del campo è identicamente nullo nelle componenti x ed y, mentre lungo z si ottiene:

$$Rot_z = \alpha - \beta$$

dunque affinchè il campo sia conservativo occorrerà che

$$Rot_z = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha - \beta = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = \beta$$

dunque il campo $\vec{F}(x, y, z) = \alpha\left(y\hat{i} + x\hat{j} + z\hat{k}\right)$ è conservativo. Calcolando il lavoro su un cammino rettilineo a tratti tra l'origine O(0,0,0) ed un punto generico C(x,y,z)

$$L_{OP} = \int_{000}^{x00} F_x\, dx + \int_{x00}^{xy0} F_y\, dy + \int_{xy0}^{xyz} F_z\, dz =$$

$$L_{OP} = \int_{000}^{x00} \alpha y\ dx + \int_{x00}^{xy0} \alpha x\, dy + \int_{xy0}^{xyz} \alpha z\, dz =$$

$$= -[\alpha xy]_{000}^{x00} + [\alpha xy]_{x00}^{xy0} + \left[\alpha \frac{z^2}{2}\right]_{xy0}^{xyz} = 0 + \alpha xy + \alpha \frac{z^2}{2} = \alpha\left(xy + \frac{z^2}{2}\right)$$

dunque $L_{OP} = V(0,0,0) - V(x, y, z) = \alpha\left(xy + \frac{z^2}{2}\right)$

da cui segue l'energia potenziale $V(x, y, z) = -\alpha\left(xy + \frac{z^2}{2}\right)$.

c)

Il campo è conservativo e $\alpha = 4$ → $V(x,y,z) = -4\left(xy + \frac{z^2}{2}\right)$

il lavoro tra i punti A(0,4,1) e B(2,1,2) si ottiene dalla relazione:

$$L_{RS} = V(A) - V(B) = V(0,4,1) - V(2,1,2) = -4\left(\frac{1}{2}\right) + 4\left(2+2\right) = 14\ J$$

Termodinamica

1)

$$dQ = dU = nC_V\,dT \qquad \Delta Q = nC_V\,\Delta T$$

$$dQ = k\,dt \qquad \Delta Q = k\Delta t \qquad C_V = \frac{K\Delta t}{n\Delta T} = 5.4\ J/K$$

2)

$$dS = nC_V\frac{dT}{T} + nR\frac{dV}{V} \qquad \Delta S = nC_V \ln\frac{T_2}{T_1} + nR\ln\frac{V_2}{V_1} = n(C_V + R)\ln 2 = n\frac{5}{2}R\ln 2$$

Problema

a) Essendo gli stati A e B isoenergetici, in quanto il sistema è un gas perfetto, la corrispondente trasformazione è isoterma; la variazione d'entropia è quindi esprimibile con la relazione $S_B - S_A = S_C - S_A = nR\ln\frac{V_B}{V_A}$, che dà $\frac{S_C - S_A}{nR} = \ln\frac{V_B}{V_A}$ cioè $e^{\frac{S_C - S_A}{nR}} = \frac{V_B}{V_A}$ e $V_B = V_A e^{\frac{S_C - S_A}{nR}}$.

b) La variazione d'energia interna per un gas perfetto è sempre esprimibile in termini della corrispondente variazione di temperatura; abbiamo così, per coinvolgere l'incognita T_D, $U_D - U_A [= U_C - U_A] = n \times \frac{5}{2}R(T_D - T_A)$ da cui
$$T_D = \frac{2}{5nR}(U_C - U_A) + T_A = \frac{2}{5nR}(U_C - U_A) + \frac{p_A V_A}{nR}$$
che è espressa in termini di quantità note.

c) Le trasformazioni isoentropiche e reversibili BC e DA non sono effettuate tramite scambio di calore: sono cioè adiabatiche, e il ciclo è assimilabile a un ciclo di Carnot che si serve di due termostati alle temperature T_D e $T_A > T_D$. Il rendimento è pertanto
$$\eta = \frac{T_A - T_D}{T_A} = \frac{\frac{p_A V_A}{nR} - \left(\frac{2}{5nR}(U_C - U_A) + \frac{p_A V_A}{nR}\right)}{\frac{p_A V_A}{nR}} = \frac{2}{5} \times \frac{U_A - U_C}{p_A V_A}.$$

d) Il lavoro compiuto nel ciclo si calcola dal prodotto del rendimento per la quantità di calore assorbita nell'isoterma AB:

$$L=\eta\times Q_{AB}=\eta\times T_A\int_A^B dS=\eta\times\frac{p_AV_A}{nR}\times(S_B-S_A)=\eta\times\frac{p_AV_A}{nR}\times(S_C-S_A)=\frac{2}{5nR}(U_A-U_C)\times(S_C-S_A)$$

che è espresso in termini di quantità note.