Fisica Generale LA

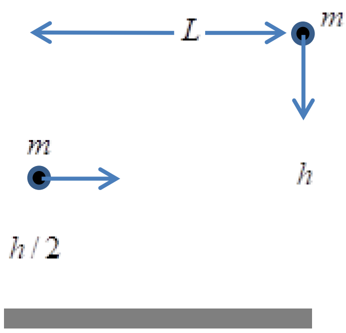
Prof. Nicola Semprini Cesari

Prova Scritta del 28 Luglio 2017

Meccanica

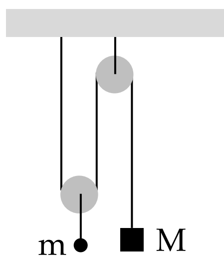
Q1) Un punto materiale si muove sul piano $Z=0$ lungo una spirale di Archimede data dalla equazione $R=b\vartheta$ dove $\vartheta(t)=\omega t$ e ω è costante. Determinare i vettori velocità ed accelerazione e l'angolo formato dalle loro direzioni.

Q2) Un proiettile di massa m viene scagliato orizzontalmente ad una quota $h/2$ con velocità v_0 mentre un secondo proiettile di massa m viene lasciato cadere da una quota doppia h. Determinare l'intervallo temporale che deve intercorrere tra tali azioni affinché il primo proiettile colpisca il secondo.



Q3) Stabilire se è conservativo il campo di forza $\vec{f}(\vec{r})=-\alpha\frac{\vec{r}}{r^2}$, dove $\vec{r}$ è il vettore posizionale del generico punto P rispetto all'origine O di un riferimento cartesiano $Oxyz$ e α è una costante, e in caso affermativo calcolare il lavoro da esso compiuto per uno spostamento del punto di applicazione della forza dal punto A di coordinate (0,1,0) al punto B di coordinate (2,0,0).

Q4) Sia dato il sistema di carrucole (paranco) e masse mostrato in figura. Si determini l'accelerazione della massa M trascurando le masse ed i moti rotatori delle carrucole assunte come ideali.



Q5) Spiegare i concetti di massa inerziale e massa gravitazionale.

Q6) Dimostrare che nel caso dei corpi rigidi solo le forze esterne compiono lavoro.

Termodinamica

1) Un corpo metallico di massa m e calore specifico C si trova in uno stato di equilibrio termodinamico alla temperatura t_0. Successivamente, il corpo metallico viene gettato in un lago la cui acqua è alla temperatura T e prende avvio il trasferimento di calore. Scrivere l'entropia S del sistema in funzione della temperatura t del corpo e dimostrare che l'entropia raggiunge il massimo valore quando il corpo raggiunge la temperatura del lago ovvero quando $t=T$.

2) Calcolare il rendimento di un ciclo reversibile di Carnot.

SOLUZIONI

MECCANICA

Q1)

$$R = b\vartheta \qquad \dot{R} = b\dot{\vartheta} = b\omega \qquad \ddot{R} = b\ddot{\vartheta} = 0$$

$$\vec{v} = \dot{R}\vec{i}_R + R\dot{\varphi}\vec{i}_\varphi = b\omega\,\vec{i}_R + b\vartheta\omega\,\vec{i}_\varphi$$

$$\vec{a} = (\ddot{R} - R\dot{\vartheta}^2)\vec{i}_R + (2\dot{R}\dot{\vartheta} + R\ddot{\vartheta})\vec{i}_\varphi = -b\vartheta\omega^2\vec{i}_R + 2b\omega^2\vec{i}_\varphi$$

$$\vartheta = \text{arcos}(\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{|\vec{v}\,||\vec{a}\,|}) = \text{arcos}[\frac{(b\omega\,\vec{i}_R + b\vartheta\omega\,\vec{i}_\varphi)\cdot(-b\vartheta\omega^2\vec{i}_R + 2b\omega^2\vec{i}_\varphi)}{\sqrt{b^2\omega^2 + b^2\vartheta^2\omega^2}\sqrt{b^2\vartheta^2\omega^4 + 4b^2\omega^4}}] = \text{arcos}[\frac{-b^2\vartheta\,\omega^3 + 2b^2\vartheta\,\omega^3}{b^2\omega^3\sqrt{1+\vartheta^2}\sqrt{4+\vartheta^2}}]$$

$$\vartheta = \text{arcos}[\frac{\vartheta}{\sqrt{1+\vartheta^2}\sqrt{4+\vartheta^2}}]$$

Q2)

$$\begin{cases} x_1 = vt \\ y_1 = \dfrac{h}{2} - \dfrac{1}{2}g\,t^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} t_1^* = \dfrac{L}{v} \\ y_1^* = \dfrac{h}{2} - \dfrac{1}{2}g\,\dfrac{L^2}{v^2} \end{cases}$$

$$y_2 = h - \frac{1}{2}g\,t^2$$

$$y_2 = y_1^* \qquad h - \frac{1}{2}g\,t_2^{*2} = \frac{h}{2} - \frac{1}{2}g\,\frac{L^2}{v^2} \qquad t_2^* = \sqrt{\frac{h}{g} + \frac{L^2}{v^2}}$$

$$t_2^* - t_1^* = \sqrt{\frac{h}{g} + \frac{L^2}{v^2}} - \frac{L}{v}$$

Q3)

Scrivendo la forza in termini dei componenti cartesiane si verifica che il rotazionale è nullo, e quindi il campo è conservativo. Il lavoro compiuto dalla forza, diretta radialmente, è nullo lungo la traiettoria circolare con centro in *O* lungo la quale, con raggio r=1 nel piano *xy*, si sposta il punto di applicazione da *A* = (0,1,0) a *A′*= (1,0,0). Resta da calcolare il lavoro compiuto per spostare il punto di applicazione da *A′* a *B* che si riduce alla integrazione lungo l' asse x (quindi con *y* e *z* nulle) ottenendo

$$\int_{(1,0,0)}^{(2.0.0)} -\frac{\alpha(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})\cdot dx\vec{i}}{x^2 + y^2 + z^2} \equiv -\alpha\int_1^2 \frac{dx}{x} = -\alpha\ln 2\,.$$

Q4)

equazioni del moto della massa m

$$T\vec{k} + T\vec{k} - mg\vec{k} = m\ddot{z}_1\vec{k}$$

equazioni del moto della massa M

$$T\vec{k} - Mg\vec{k} = M\ddot{z}_2\vec{k}$$

relazioni vincolari

$$dz_1 = -2dz_2$$

$$\begin{array}{lll} 2T - mg = m\ddot{z}_1 & 2(Mg + M\ddot{z}_2) - mg = m\ddot{z}_1 & 2(Mg + M\ddot{z}_2) - mg = -2m\ddot{z}_2 \\ T - Mg = M\ddot{z}_2 & - & - \\ \ddot{z}_1 = -2\ddot{z}_2 & \ddot{z}_1 = -2\ddot{z}_2 & - \end{array}$$

$$\ddot{z}_2 = \frac{g}{2}\left(\frac{m - 2M}{M + m}\right)$$

TERMODINAMICA

Q1)

dal primo principio

$$\not{d}q + \not{d}Q = 0 \qquad \not{d}q = mC\,dt \qquad \not{d}Q = -\not{d}q \qquad \not{d}q = mC\,dt \qquad -$$

dal secondo principio

$$dS = \frac{\not{d}q}{t} + \frac{\not{d}Q}{T} > 0 \qquad dS = \frac{\not{d}q}{t} + \frac{\not{d}Q}{T} > 0 \qquad dS = \frac{mC\,dt}{t} - \frac{mC\,dt}{T}$$

$$dS = mC\left(\frac{dt}{t} - \frac{dt}{T}\right) \qquad S(t) = mC\left(\int_{t_0}^{t} \frac{dt'}{t'} - \int_{t_0}^{t} \frac{dt'}{T}\right) \qquad S(t) = mC\left(\ln\left(\frac{t}{t_0}\right) - \frac{t - t_0}{T}\right)$$

Annullando la derivata rispetto alla temperatura t troveremo la temperatura che rende massima l'entropia

$$\frac{d}{dt}S(t) = \frac{d}{dt}mC\left[\ln\left(\frac{t}{t_0}\right) - \frac{t - t_0}{T}\right] = mC\left(\frac{t_0}{t}\frac{1}{t_0} - \frac{1}{T}\right) = 0 \qquad da \;\; cui \quad t = T.$$