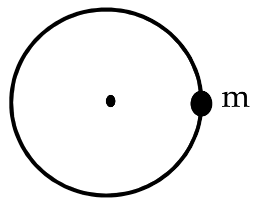
# Fisica Generale LA N.1

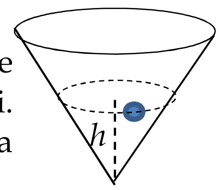
**Prova Scritta del 14 Giugno 2012**
**Prof. Nicola Semprini Cesari**

**Meccanica**

1) Determinare l'angolo α, rispetto al piano orizzontale, con il quale è necessario scagliare un proiettile affinché raggiunga il punto $P$ di massima quota di coordinate $(0,\ y_m,\ z_m)$ tali che $z_m/y_m=1/2$ (si indichi con $v_0$ la velocità iniziale e si scelga l'asse z lungo la direzione verticale).

2) Un punto materiale di massa $m$ è fissato sul bordo di un anello di raggio R e massa M libero di ruotare attorno ad un asse passante per il suo centro e normale al piano che lo contiene. Nella ipotesi che la densità lineare di massa sia uniforme determinare l'accelerazione iniziale del punto materiale stesso.




3) Un punto materiale di massa $m$ si muove all'interno di una superficie conica rovesciata priva di attrito lungo uno delle sue sezioni circolari. Determinare la relazione che intercorre tra il modulo $v$ della velocità e la quota $h$.

4) Una superficie quadrata di lato $L$ , massa $M$ e densità superficiale uniforme σ è libera di ruotare attorno ad un suo lato. Determinare il momento d'inerzia.

5) Enunciare e dimostrare il teorema del momento della forza nel caso di un punto materiale.

6) Enunciare e dimostrare il primo teorema del centro di massa.

**Problema**

Un disco rigido e omogeneo, di massa $M$, spessore trascurabile e raggio $R$, scivola senza ruotare nel piano verticale $(x,y)$ su una rotaia disposta come l'asse $x$ del sistema di riferimento con velocità costante $\vec{v}_0=v_0\vec{i}$ ortogonale al proprio asse di simmetria diretto lungo l'asse $z$. A un dato istante il suo punto di contatto raggiunge una coordinata dell'asse $x$ a partire dalla quale la rotaia diventa scabra, e il disco assume istantaneamente un moto di rotolamento puro nel piano $(x,y)$ con velocità angolare $\vec{\omega}=-\omega\vec{k}$ di modulo ignoto. Con riferimento a tale stato di moto e considerando la rotaia alla stregua di un vincolo ideale determinare le espressioni delle seguenti quantità:

a) la velocità $\vec{v}$ che assume il centro di massa del disco, applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica e giustificandone l'applicazione.

b) il momento della quantità di moto $\vec{K}$ assunto dal disco rispetto al centro di massa preso come centro di riduzione.

c) l'eventuale variazione dell'energia meccanica totale del disco successivamente all'inizio del rotolamento puro.

**Termodinamica**

1) Esprimere la variazione elementare di entropia di $n$ moli di un gas perfetto in funzione delle coppie di variabili termodinamiche $P$-$V$.

2) Un recipiente con pareti rigide e capacità termica trascurabile contiene 15 moli di gas perfetto biatomico in equilibrio termodinamico alla temperatura $T_i$. Il sistema viene posto in contatto con una sorgente alla temperatura $T_s = 0°C$ costante attraverso una parete diatermica, finché raggiunge un nuovo equilibrio. Sapendo che la variazione di entropia della sorgente è stata $\Delta S_{sorg} = 750\ J/K$ e impiegando per la costante dei gas perfetti il valore $R = 8.314\ J\ mol^{-1}\ K^{-1}$ determinare le seguenti quantità:

a) la quantità di calore $Q_{sorg}$ assorbita dalla sorgente.
b) il valore della temperatura $T_i$.
c) la variazione di entropia $\Delta S_{gas}$.

3) Si enunci il teorema di Clausius e si commentino le principali conseguenze.

**SOLUZIONI**

**Meccanica**

1)

$$y = v_0 \cos\alpha t$$

$$z = v_0 \sin\alpha t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \rightarrow \quad \dot{z} = v_0 \sin\alpha - g t \quad \dot{z} = 0 \qquad t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

$$y_M = v_0 \cos\alpha \frac{v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin\alpha \cos\alpha$$

$$z_M = v_0 \sin\alpha \frac{v_0 \sin\alpha}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

$$\frac{z_M}{y_M} = \frac{\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}}{\frac{v_0^2}{g} \sin\alpha \cos\alpha} = \frac{1}{2} tg\alpha = \frac{1}{2} \qquad tg\alpha = 1 \qquad \alpha = 45^\circ$$

2)

$$R\vec{j} \wedge (-mg\vec{k}) \cdot \vec{i} = I\ddot{\varphi} \qquad I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 = R^2 \sum_{i=1}^{N} m_i = MR^2 \qquad R\ddot{\varphi} = \ddot{z}$$

$$-mgR = MR^2 \frac{\ddot{z}}{R} \qquad -mg = M\ddot{z} \qquad \ddot{z} = -\frac{m}{M} g$$

3)

$$T\cos\vartheta = m\frac{v^2}{R} \qquad T\sin\vartheta = mg \qquad h\, tg\vartheta = R$$

$$\frac{T\sin\vartheta}{T\cos\vartheta} = \frac{mg}{m\frac{v^2}{R}} \qquad tg\vartheta = \frac{g}{v^2} R = \frac{g}{v^2} h\, tg\vartheta \qquad v^2 = gh$$

4)

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \sigma dx dy\, x_i^2 = \int_0^L \int_0^L \sigma x^2 dx dy = \sigma \int_0^L x^2 dx \int_0^L dy = \sigma \frac{1}{3} L^3 L = \frac{\sigma L^4}{3}$$

$$M = \sigma L^2 \qquad I = \frac{1}{3} M L^2$$

**Esercizio**

a)

La conservazione dell'energia si riduce alla conservazione dell'energia cinetica (quella potenziale è invariata). In termini del teorema di Koenig si ha

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}MR^2)\left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{3}{4}Mv^2$$

dalla quale $\vec{v} = \sqrt{\frac{2}{3}}\vec{v}_0$. La conservazione dell'energia meccanica è giustificata dal fatto che il vincolo è ideale e non sono presenti forze dissipative.

b)
Il momento della quantità di moto rispetto al centro di massa del disco è
$\vec{K}_{CM} = I_{CM}\vec{\omega} = -\frac{1}{2}MR^2\frac{v}{R}\vec{k} = -\frac{1}{2}MR\sqrt{\frac{2}{3}}v_0\vec{k}$ (*N.B.* se si assume una terna destra nella quale l' asse $x$ è nella direzione del moto del C.M. e l' asse $y$ è verticale, allora la velocità angolare ha il verso opposto a quello del vettore $\vec{k}$).

c)
L'energia meccanica totale si conserva anche nel moto di rotolamento puro, sempre per l' assenza di forze dissipative.

**Termodinamica**

Data la costanza della temperatura della sorgente, $\Delta S_{sorg}= Q_{sorg}/T_s$, donde $Q_{sorg} = \Delta S_{sorg}$ $T_s$=273x750 $J$ = 204750 $J$.

b) $Q_{sorg}=-nc_V(T_s - T_i)$, da cui $nc_VT_i=Q_{sorg}/nc_V + T_s$ = (204750/15×2.5 × 8.314) $K$ + 273 $K$= 930$K$.

c)Trattandosi di un'isocora del gas perfetto,

$$\Delta S_{gas} = nc_v\int_{T_i}^{T_s}\frac{dT}{T} = nc_v\ln\frac{T_s}{T_i} = nc_v\ln\frac{273}{930} = 155\times2.5\times8.314\times(-1.226) = -382{,}24\ J/K$$