

Meccanica

Q1) Un corpo materiale di massa m scivola lungo una discesa, partendo da fermo, da una quota $h=20$ m. Sapendo che giunge alla fine della discesa con una velocità di modulo $v=13$ m/s, calcolare il lavoro fatto dalle forze di attrito.

Q2) Verificare se il campo di forza definito dall'espressione $\vec{f} = \frac{kx}{(x^2 + y^2)} \vec{i} + \frac{ky}{(x^2 + y^2)} \vec{j}$

(dove $k = 1$ J m) è conservativo, e in caso affermativo calcolare il lavoro che esso compie per uno spostamento dal punto A di coordinate $(3,0,0)$ m al punto B di coordinate $(0,-4,5)$ m.

Q3) Calcolare la posizione del centro di massa di un corpo piano di spessore trascurabile, avente forma di triangolo isoscele con altezza h , base b e massa M uniformemente distribuita sulla sua superficie S rispetto all'asse coincidente con la base.

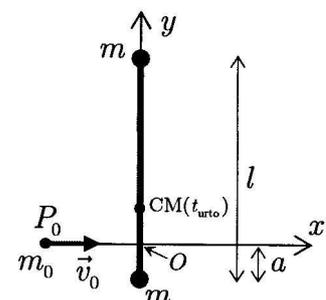
Q4) Dimostrare la formula della accelerazione nel sistema intrinseco di coordinate.

Q5) Discutere i moti relativi dei sistemi di coordinate.

Problema

Due punti materiali di ugual massa $m=0.5$ Kg, collegati tra loro da un'asta di massa trascurabile e lunghezza $l=60$ cm, sono inizialmente in quiete su di un piano orizzontale liscio. Un terzo punto materiale, di massa $m_0=2m$ in moto su tale piano con velocità $v_0 \vec{i}$ di modulo 3ms^{-1} , urta l'asta, nel punto O distante $a = \frac{1}{6}l$ da un suo estremo, rimanendovi conficcato. Assumendo in tale punto l'origine di un sistema cartesiano Oxy nel quale l'asta giace inizialmente lungo l'asse y (vedi figura), determinare le seguenti grandezze fisiche:

- modulo direzione e verso della la velocità del centro di massa del sistema prima e dopo l'urto;
- la traiettoria del centro di massa dopo l'urto;
- il momento d'inerzia del sistema dopo l'urto, calcolato rispetto all'asse che passa per il centro di massa ed è ortogonale al piano del moto.



Termodinamica

- Q1)** Esprimere il primo principio della termodinamica in funzione delle variazioni di temperatura e pressione di un gas perfetto.
- Q2)** Una centrale convenzionale di 1 GW di potenza opera con una caldaia alla temperatura di 800°C e viene raffreddata con l'acqua di un fiume alla temperatura di 12°C . Schematizzando la centrale con una macchina termica reversibile calcolare la quantità di calore scaricata nel fiume.
- Q3)** Data una macchina termica ciclica che lavora tra due serbatoi a temperatura T_2 e T_1 ($T_2 > T_1$) esprimere il lavoro prodotto dalla macchina in funzione della variazione di entropia del sistema e del calore ceduto al serbatoio a temperatura T_1 .
- Q4)** Dimostrare che in un fluido è possibile definire la grandezza fisica pressione.

Soluzioni

Meccanica

Q1

$$\int_A^B \vec{F}_{Tot} \cdot d\vec{s} = T_B - T_A \quad \vec{F}_{Tot} = \vec{F}_{peso} + \vec{F}_{attr} \quad \int_A^B \vec{F}_{peso} \cdot d\vec{s} + \int_A^B \vec{F}_{attr} \cdot d\vec{s} = T_B - T_A$$

$$\int_A^B -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) \cdot d\vec{s} + \int_A^B \vec{F}_{attr} \cdot d\vec{s} = T_B - T_A \quad \Phi(\vec{r}_A) - \Phi(\vec{r}_B) + \int_A^B \vec{F}_{attr} \cdot d\vec{s} = T_B - T_A$$

$$mgz_A - mgz_B + \int_A^B \vec{F}_{attr} \cdot d\vec{s} = T_B - T_A$$

$$\int_A^B \vec{F}_{attr} \cdot d\vec{s} = T_B - T_A + mgz_B - mgz_A = \frac{1}{2} \times 2 \times 13^2 - 0 + 0 - 2 \times 9.81 \times 20 = -223 J$$

Q2

$\nabla \wedge \vec{f} = \vec{0}$, quindi il campo è conservativo. Conviene integrare prima su un arco di circonferenza con centro nell'origine del sistema di riferimento che in un piano di ascissa $z=0$ (cioè nel piano x,y) sposta in primo luogo il punto di applicazione della forza da $A = (3,0,0)$ a $C = (0,-3,0)$. Lungo quest'arco di traiettoria, la forza, che è esprimibile come $\vec{f} = k \frac{\vec{r}}{r^2} = k \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{(x^2 + y^2)}$ è in ogni punto

perpendicolare alla traiettoria, e quindi non compie lavoro. Resta pertanto da integrare la forza solamente sul tratto rettilineo dell'asse y , per x che va da -3 a -4 , fino a raggiungere il punto $B = (0,-4,5)$. Si ha così che il lavoro si riduce a $L = \int_{-3}^{-4} \frac{ky}{y^2} dy = k \int_{-3}^{-4} \frac{k}{y} dy = k [\ln y]_{-3}^{-4} = k \ln \frac{4}{3} J = 0.29 J$

Q3

Assumiamo un riferimento con asse y lungo l'altezza ed asse x lungo la base con l'origine nel suo punto di mezzo. Avremo allora $X_{CM} = 0$ mentre per la coordinata Y_{CM} possiamo riferirci anche alla metà del triangolo. Si ha allora

$$Y_{CM} = \int_0^h \int_{-\frac{b}{2}(1-\frac{y}{h})}^{\frac{b}{2}(1-\frac{y}{h})} y \sigma dy dx = \int_0^h y \sigma dy \int_{-\frac{b}{2}(1-\frac{y}{h})}^{\frac{b}{2}(1-\frac{y}{h})} dx = \int_0^h y \sigma dy (x) \Big|_{-\frac{b}{2}(1-\frac{y}{h})}^{\frac{b}{2}(1-\frac{y}{h})} = \int_0^h b(1-\frac{y}{h}) y \sigma dy =$$

$$= b \sigma \int_0^h (y - \frac{y^2}{h}) dy = b \sigma (\frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{3h} y^3) \Big|_0^h = \frac{b \sigma h^2}{6} \quad \text{ma } M = \frac{b h \sigma}{2}$$

$$I = \frac{1}{3} M h$$

Problema

- a) nell'urto entrano in gioco solo forze interne per cui modulo direzione e verso della velocità del centro di massa prima e dopo l'urto sono identiche. D'altra parte si ha

$$\vec{P} = M \vec{v}_{CM} \quad 2m \vec{v}_0 = 4m \vec{v}_{CM} \quad \vec{v}_{CM} = \frac{1}{2} \vec{v}_0 = \frac{1}{2} \times 3 \vec{i} = 1.5 \frac{m}{s} \vec{i}$$

- b) dato che il moto del centro di massa si sviluppa lungo la direzione delle x la quota y rimarrà costante. D'altra parte la quota Y del centro di massa si trova in posizione

$$Y_{CM} = \frac{m \frac{1}{6} l - m \frac{5}{6} l}{4m} = -\frac{1}{6} l$$

per cui la equazione della traiettoria sarà

$$y = -\frac{1}{6} l$$

$$c) I = \left(\frac{2}{6}l\right)^2 m + \left(\frac{1}{6}l\right)^2 2m + \left(\frac{4}{6}l\right)^2 m = \frac{11}{18} ml^2 = \frac{11}{18} \times 0.5 \times (0.6)^2 = 0.11 \text{ Kg } m^2$$

Termodinamica

Q1)

$$\begin{aligned} \delta Q &= dU + \delta L & \delta Q &= n C_V dT + P dV & P dV + V dP &= n R dT & P dV &= n R dT - V dP \\ \delta Q &= n C_V dT + n R dT - V dP & &= n (C_V + nR) dT - V dP & \delta Q &= n C_p dT - V dP \end{aligned}$$

Q2)

Assumendo come intervallo di riferimento 1 secondo otteniamo per il calore ceduto

$$-\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_1}{T_1} \geq 0 \quad L + Q_1 = Q_2 \quad -\frac{L + Q_1}{T_2} + \frac{Q_1}{T_1} \geq 0$$

$$Q_1 \geq \frac{T_1}{T_2 - T_1} L = \frac{285,15}{788} 10^9 = 0.36 \times 10^9 \text{ J}$$

Q3)

Assumendo come intervallo di riferimento 1 secondo si ottiene il seguente calore ceduto

$$\Delta S = -\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_1}{T_1} \quad L + Q_1 = Q_2 \quad \Delta S = -\frac{L + Q_1}{T_2} + \frac{Q_1}{T_1} = Q_1 \left(\frac{T_2 - T_1}{T_2 T_1} \right) - \frac{L}{T_2}$$

$$L = Q_1 \left(\frac{T_2 - T_1}{T_1} \right) - \Delta S T_2$$