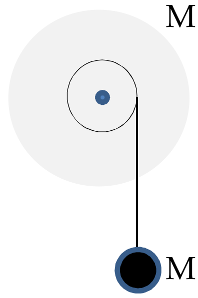
Fisica Generale LA N.2

Prova Scritta del 14 Giugno 2012
Prof. Nicola Semprini Cesari

Meccanica: quesiti

1) Al tempo $t=0$ un proiettile di massa m viene scagliato con velocità di modulo v_0 lungo una direzione inclinata di un angolo α rispetto al piano orizzontale. Determinare l'angolo α', formato dal vettore velocità, al tempo t' pari alla metà del tempo di ascesa.

2) Sia dato il sistema meccanico mostrato in figura. Determinare a quale distanza dall'asse deve essere applicato il filo affinché la massa scenda con una accelerazione pari a 1/3 di quella di gravità ($I=1/2\ M R^2$).



3) Sia dato un pendolo conico di lunghezza L e massa m in moto lungo una circonferenza. Determinare l'angolo del filo rispetto alla verticale nel caso in cui il modulo della tensione vale il doppio del modulo della forza peso. Determinare anche il modulo della velocità.

4) Sia data una superficie triangolare, metà di un quadrato di lato L, di massa M e densità superficiale uniforme σ. Determinare la posizione del centro di massa.

5) Enunciare e dimostrare il teorema delle forze vive.

6) Enunciare e dimostrare il teorema di Konig per l'energia cinetica.

Problema

Nel sistema di riferimento del laboratorio ($O\ x'y'z'$) un disco rigido e omogeneo, di massa M, spessore trascurabile e raggio R, rotola senza strisciare, con velocità angolare $\vec{\omega} = -\omega \vec{k}'$ di modulo ignoto, nel piano verticale (x',y') su una rotaia orizzontale scabra sotto l'azione d'una forza costante $\vec{F} = F\vec{i}'$ parallela alla rotaia e applicata nel centro di massa C del disco. Determinare le espressioni delle seguenti quantità:

a) il modulo a_{CM} dell'accelerazione con la quale trasla il centro di massa del disco, applicando la seconda equazione cardinale della dinamica.

b) la componente tangenziale V_t della reazione vincolare espressa dalla rotaia.

c) la velocità istantanea del punto di contatto A del disco con la rotaia applicando la legge di composizione delle velocità, e situando l'origine del sistema di riferimento in moto ($Cxyz$, che si muove solidalmente con il disco) nel centro di massa C del disco stesso.

Termodinamica

1) Esprimere la variazione elementare di entropia di n moli di un gas perfetto in funzione delle coppie di variabili termodinamiche P-T.

2) Un sistema termodinamico è costituito da 5 moli di gas perfetto biatomico in equilibrio termodinamico con un termostato alla temperatura $T_0=20$ °C e alla pressione p_0. Il gas viene poi fatto espandere fino a raggiungere la pressione $p_1=p_0/10$. Sapendo che nel processo il termostato ha ceduto la quantità di calore $Q=6$ *Kcal* e ricordando il valore della costante universale dei gas $R= 8.314\ J\ mol^{-1}K^{-1}$ e che $1.0\ cal=4.185\ J$, determinare i valori delle seguenti quantità:

a) La variazione d'entropia ΔS_{gas} subita dal gas;

b) La variazione d'entropia Δ_{term} subita dal termostato.

c) Stabilire infine se la trasformazione è stata reversibile o irreversibile

3) Si enunci il teorema di Carnot e si commentino le principali conseguenze

SOLUZIONI

Meccanica

1)

$$y = v_0 \cos\alpha\, t$$

$$z = v_0 \sin\alpha\, t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \rightarrow \quad \dot{z} = v_0 \sin\alpha - g t \quad \dot{z} = 0 \qquad t_M = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

$$\dot{y} = v_0 \cos\alpha$$

$$\dot{z} = v_0 \sin\alpha - g t$$

$$tg\alpha' = \frac{v_0 \sin\alpha - g \frac{1}{2} t_M}{v_0 \cos\alpha} = \frac{v_0 \sin\alpha - \frac{1}{2} g \frac{v_0 \sin\alpha}{g}}{v_0 \cos\alpha} = \frac{1}{2} tg\alpha$$

2)

$$T - mg = m\ddot{z}$$

$$r\vec{j} \wedge (-T\vec{k}) \cdot \vec{i} = I\ddot{\varphi} \qquad -Tr = I\frac{\ddot{z}}{r} \qquad T = -\frac{I}{r^2}\ddot{z}$$

$$r\ddot{\varphi} = \ddot{z}$$

$$-\frac{I}{r^2}\ddot{z} - mg = m\ddot{z} \qquad \ddot{z} = -\frac{m}{m + \frac{I}{r^2}} g = -\frac{m}{m + \frac{mR^2}{2r^2}} g = -\frac{1}{1 + \frac{R^2}{2r^2}} g$$

$$1 + \frac{R^2}{2r^2} = 3 \qquad \frac{R^2}{r^2} = 4 \qquad r = R/2$$

3)

$$T \sin\vartheta = m\frac{v^2}{R} \qquad T\cos\vartheta = mg \qquad L\sin\vartheta = R$$

$$\cos\vartheta = \frac{mg}{T} = \frac{mg}{2mg} = \frac{1}{2}$$

$$2mg \sin\vartheta = m\frac{v^2}{L\sin\vartheta} \qquad 2gL\sin^2\vartheta = v^2 \qquad 2g(1 - \frac{1}{4}) = v^2 \qquad v = \sqrt{\frac{3}{2} g}$$

4)

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \sigma dxdy\, x_i^2 = \int_0^L \int_0^L \sigma x^2 dxdy = \sigma \int_0^L x^2 dx \int_0^L dy = \sigma \frac{1}{3} L^3 L = \frac{\sigma L^4}{3}$$

$$M = \sigma L^2 \qquad I = \frac{1}{3} ML^2$$

Esercizio

a)
Dal momento che il modulo della velocità di traslazione del centro di massa vale $v_{CM} = \omega R$, l'accelerazione a_{CM} con la quale esso trasla è legata alla velocità angolare del disco dalla relazione $a_{CM} = \frac{d\omega}{dt} R$. Assumendo allora il punto di contatto A come centro di riduzione per l'applicazione della seconda equazione cardinale della dinamica $\vec{M}_A^e = \frac{d\vec{K}_A}{dt}$, si ha $(C-A) \wedge \vec{F} = I_A \wedge \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ che diventa, applicando il teorema di Huygens Steiner al calcolo del momento d'inerzia I_A del disco rispetto a un asse perpendicolare al piano (x',y') e passante per A, $R\vec{j}' \wedge F\vec{i}' = -(\frac{1}{2} MR^2 + MR^2) \frac{d\omega}{dt} \vec{k}'$, cioè, dato che $\omega = \frac{v_{CM}}{R}$ e $\frac{d\omega}{dt} = \frac{a_{CM}}{R}$, $-RF\vec{k}' = -\frac{3}{2} MR^2 \frac{a_{CM}}{R} \vec{k}'$, da cui $a_{CM} = \frac{2F}{3M}$.
b)
Dal teorema del moto del baricentro
$\vec{V}_T + \vec{F} = M\vec{a}_{CM}$, cioè $-V_T\vec{i}' + F\vec{i}' = M\frac{2F}{3M}\vec{i}'$ ovvero $V_T = \frac{F}{3}$.

c)
La velocità istantanea $\vec{v}_A$ del punto A di contatto del disco con la rotaia nel sistema del laboratorio è nulla. Tenendo presente la legge di composizione delle velocità, essa sarà data dalla somma della velocità relativa $\vec{v}_r$, che è quella del punto A rispetto al centro C del disco nel sistema di riferimento mobile $Cxyz$ [in tale sistema, che ruota con il disco, il punto A ha velocità data da $\vec{v}_r = \vec{v}_{CM} = a_{CM} t\vec{i} = \frac{2F}{3M} t\vec{i} \equiv \frac{2F}{3M} t\vec{i}'$] e della velocità di trascinamento $\vec{v}_t$, che è quella che il punto A possiederebbe nel laboratorio se fosse rigidamente connesso con il sistema di riferimento che ha origine in C ed è solidale col disco, per cui $\vec{v}_t = \vec{\omega} \wedge (A-C) = -\frac{v_{CM}}{R} \vec{k}' \wedge (A-C) = -\frac{2F}{3MR} t\vec{k}' \wedge (-R\vec{j}') = -\frac{2F}{3M} t\vec{i}'$, cioè, come dev'essere,
$\vec{v}_A = \vec{v}_r + \vec{v}_t = \vec{0}$.

Termodinamica

a) La stessa trasformazione può essere realizzata tramite un'isoterma reversibile, per la quale si ha (tenendo conto dell'equazione di stato dei gas perfetti)

$$\Delta S_{gas} = nR\ln\frac{V_1}{V_0} = nR\ln\frac{p_0}{p_1} = nR\ln 10 = 95.7 J/K.$$

b) Il termostato cede la quantità di calore indicata a temperatura costante, motivo per il quale

$$\Delta S_{term} = -\frac{Q}{T_0} = -\frac{6000 \times 4.185}{293} J/K = -85.7 J/K.$$

c)La variazione d'entropia dell'Universo è stata $\Delta S_U = \Delta S_{gas} + \Delta S_{term} = 10 J/K > 0$, quindi il processo è stato irreversibile.