
Lezioni di Fisica delle Particelle

a.a. 2013-2014

Prof. Nicola Semprini Cesari

L'evoluzione dei fatti sperimentali	pag. 2	accenni
L'evoluzione delle teorie	pag. 16	accenni
Il Modello Standard	pag. 30	svolto
Le interazioni forti	pag. 46	svolto
Un accenno alle teorie di campo quantizzato	pag. 73	svolto
Le interazioni deboli	pag. 102	svolto
Le unità di misura in fisica delle particelle	pag. 150	non svolto, da fare
Variabili dinamiche	pag. 157	facoltativo
Il concetto di simmetria in fisica	pag. 167	facoltativo
Le rotazioni negli spazi interni	pag. 202	facoltativo
Gli adroni	pag. 212	facoltativo
Un accenno alla rinormalizzazione	pag. 242	facoltativo

http://ishtar.df.unibo.it/Uni/bo/ingegneria/all/semprini_cesari/stuff/homepage.htm

Profilo Storico

L'evoluzione dei fatti sperimentali

La scoperta dei costituenti della materia: protoni ed elettroni (1800-1900)

Oggi comprendiamo che la fisica delle particelle iniziò con l'esplorazione della struttura della materia. Sia pure in chiave filosofica, ipotesi precise furono formulate già nel V-IV sec. A.C da Leucippo e Democrito i quali intuirono che la materia, in tutte le sue forme, doveva essere riconducibile ad un gioco di 'interazioni' (urti) e corpuscoli elementari. Nonostante questo è solo agli inizi dell'800 che tali ipotesi, trovando un qualche fondamento sperimentale, pose le basi per una scienza - fondata su esperimenti e modelli teorici - la quale spostò gradualmente la sua attenzione dalle proprietà della materia alle proprietà dei suoi costituenti: le particelle.

- ❑ Nel **1802-03** il chimico britannico **J. Dalton** formula la sua **ipotesi atomica** che interpreta le molecole come aggregati di un numero limitato di **atomi indivisibili** (elementari) di massa differente tenute insieme da una non meglio precisata **forza atomica**.
- ❑ Nel **1815-16** il chimico britannico **W. Prout** ipotizzò che **gli atomi non fossero elementari ma a loro volta aggregati di atomi di idrogeno** che venivano così ad assumere il ruolo di particella fondamentale di tutta la materia.
- ❑ Negli anni compresi **tra il 1830 ed il 1860** si collocano gli esperimenti elettrochimici di **M. Faraday** i quali, tra le altre cose, mostrarono che la materia e quindi **l'atomo era costituito da particelle pesanti e positive (Faraday misurò il rapporto e/m dello ione idrogeno) e particelle leggere e negative legate quindi dalla forza elettrica**.
- ❑ Tra il **1860 ed il 1870** si collocano gli studi del chimico russo D.I. Mendeleev che individuò **ricorrenze nelle proprietà chimiche degli atomi** utilissime per i chimici e per i fisici che intravedevano in essa una soggiacente sottostruttura

dell'atomo.

A M. Faraday si deve l'invenzione di un dispositivo, inizialmente concepito per lo studio delle scariche elettriche nei gas rarefatti, che costituì la porta di accesso ai fenomeni del mondo atomico e subatomico anticipando di oltre mezzo secolo il ruolo degli acceleratori di particelle. Si tratta del **tubo catodico**, costituito da un tubo di vetro con vuoto interno all'estremità del quale erano posizionati due elettrodi sottoposti ad una elevata differenza di tensione elettrica.

- ❑ Nel **1897** il fisico britannico **J.J. Thomson**, che aveva già dimostrato i **raggi catodici** consistere in un **flusso di cariche negative** che chiamò '**elettroni**' in movimento tra catodo ed anodo, **misurò il rapporto e/m** che risultò circa 1000 volte più grande di quello misurato da Faraday per lo ione idrogeno.
- ❑ Intorno al **1890** furono scoperti i **raggi anodici** (raggi canale) assai più complessi da interpretare di quelli catodici. Studiati a fondo da **J.J. Thomson** e da altri, fu chiaro che si trattava di un **flusso di cariche positive** in moto tra anodo e catodo. Rivestendo l'anodo con un composto a base di idrogeno **diventava possibile misurare il rapporto e/m per lo ione idrogeno che risultò circa 1840 volte più grande di quello dell'elettrone**.
- ❑ Seguì nel **1905** il noto esperimento di **R. Millikan** che per la prima volta **misurò il valore della carica dell'elettrone e rese possibile la estrazione del valore della sua massa**. Ci si rese allora conto che **l'elettrone è una particella leggerissima** che contribuisce in modo praticamente trascurabile al bilancio della massa della materia.

La scoperta delle radiazioni : X, alfa, beta, gamma e cosmiche (1895-1910)

A questi punti fermi si aggiunsero tuttavia una serie di scoperte, favorite soprattutto dall'uso oramai esteso dei tubi catodici in condizioni di vuoto spinto (alla fine dell'800 si poteva già raggiungere valori di 10^{-8} atm), le quali - almeno inizialmente - complicarono notevolmente il quadro sperimentale: si trattava di luminescenze ed altri strani effetti che condussero alla identificazione di radiazioni o raggi di varia natura.

- ❑ Nel 1895 W. Roentgen scopre che il tubo catodico emette una radiazione dovuta all'urto dei raggi catodici con l'anodo e con il vetro che egli chiamò radiazione X, una radiazione molto penetrante (inviò in tutta Europa una radiografia della mano della moglie) insensibile ai campi elettrici e magnetici e dunque neutra e non classificabile come particellare, ma che non si rifletteva né rifrangeva, e dunque non classificabile come radiazione.
- ❑ Nel 1897 A.H. Becquerel, studiando il fenomeno della fluorescenza nei sali di uranio (un cimelio lasciatogli dal padre), scoprì che questi emettevano una intensa 'radiazione' anche in assenza di luce solare. Era la prima evidenza sperimentale del fenomeno della radioattività, manifestazione della interazione debole. Negli anni immediatamente seguenti, lo straordinario lavoro sperimentale dei coniugi Marie e Pierre Curie, rese possibile la identificazione di altri elementi molto più attivi dell'uranio: il polonio circa 400 volte ed il radio circa 100.000 volte! Nel 1899 E. Rutherford scoprì che i raggi

della radioattività non erano omogenei bensì costituiti da due componenti cariche: una poco penetrante, che chiamò radiazione alfa, ed una penetrante, che chiamò radiazione beta. Nel 1900 P. Villard, collaboratore dei coniugi Curie, individua nei raggi della radioattività una terza componente neutra molto penetrante che Rutherford propose di chiamare radiazione gamma.

- ❑ Agli inizi del '900 si comincia a studiare un fenomeno già notato da Coulomb che osservava come l'oscilloscopio tendesse inevitabilmente a scaricarsi. Nel 1912 V.F. Hesse e D. Pacini dimostrarono che questo fatto era dovuto ad una radiazione extraterrestre molto penetrante che Millikan chiamerà poi radiazione cosmica.

Ci volle quasi un ventennio d'anni per chiarire parzialmente questo quadro.

Il problema dei raggi X era costituito dal fatto che essi esibivano soprattutto proprietà corpuscolari ma - in certi contesti - anche ondulatorie ponendo anzitempo il dualismo onda-corpuscolo che solo la meccanica quantica saprà interpretare.

I raggi della radioattività, invece, risultavano costituiti da almeno tre diverse componenti denominate alfa, beta e gamma. Inoltre, lo stesso fenomeno, sembrava violare la legge della conservazione della energia: nel 1903 P. Curie dimostra che 1 g di radio può fare bollire 1.3 g di acqua in un'ora e questo per un tempo praticamente illimitato. Nessuna reazione chimica può fare altrettanto!

La **radiazione cosmica** mostrò da subito di essere un **fenomeno complesso** tuttavia, fu proprio lo studio della radiazione cosmica che rivelò le prime particelle extramateriali cioè non direttamente coinvolte nella struttura della materia (si capirà poi che si tratta di particelle di altissima energia, fino ed oltre 10^{19} eV!, che producono un articolato sciame di particelle nell'urto con l'atmosfera. Per quanto riguarda l'origine, già Fermi, nel 1940, ipotizzò che si trattasse di particelle accelerate nei resti delle supernove. Notevoli progressi si sono compiuti negli ultimi anni con le osservazioni del Very Large Telescope, una rete di telescopi nell'emisfero australe).

- ❑ Nel 1912 **M. Von Laue e Bragg padre e figlio dimostrano le proprietà ondulatorie dei raggi X** (diffrazione nei cristalli) convincendo la comunità scientifica della loro **natura elettromagnetica nonostante le evidenti proprietà corpuscolari** (il lavoro di Einstein sull'effetto fotoelettrico ed il concetto di fotone da lui introdotto furono determinanti). Nello stesso tempo fu accettata l'idea che **anche i raggi gamma fossero dello stesso tipo di quelli X fatta salva la lunghezza d'onda 100-1000 volte più piccola.**
- ❑ Il problema dei **raggi della radioattività fu invece risolto quasi interamente da E. Rutherford** attraverso la misura non facile dei rapporti e/m . In questo modo, nel 1908, dimostrò che **la radiazione alfa era costituita da atomi di elio privati degli elettroni** mentre **la radiazione beta era costituita dai ben noti elettroni.**

Chiarita la natura della **radiazione alfa, beta, gamma ed X, Rutherford intuì che tali radiazioni potevano essere utilizzate come sonde per studiare la struttura dell'atomo** pervenendo in questo modo a quella logica sperimentale su cui si fonderà l'attività di ricerca dei successivi acceleratori di particelle.

Raggi e radiazioni per sondare l'atomo : gli esperimenti di Rutherford (1910-1920)

Proprio servendosi della radiazione alfa ovvero di nuclei di elio tra il 1910 ed il 1920 Rutherford eseguì i famosi esperimenti che rivelarono l'architettura atomica.

Ne emergeva un quadro sorprendente poiché, contrariamente alla intuizione immediata che percepisce la materia come densa ed impenetrabile, l'atomo appariva sostanzialmente vuoto.

Infatti propose che la quasi totalità della massa atomica risiedesse all'interno di una struttura compattissima elettricamente carica detta **nucleo**. Il nucleo a sua volta risultava composto da un certo numero **protoni carichi positivamente** (nuclei d'idrogeno) e da particelle di massa simile ma **elettricamente neutre** dette **neutroni** (in realtà Rutherford ipotizzò solo l'esistenza di una particella neutra massiva che pensava come uno stato legato elettrone-protone e non come una nuova particella. Fu J. Chadwick che nel 1932 propose l'esistenza ed anche il nome dell'odierno neutrone). Correttamente Rutherford intuì che l'esistenza di una struttura così compatta di neutroni e protoni capaci - questi ultimi - di respingersi violentemente, indicava a sua volta che protoni e neutroni dovevano interagire attraverso una **nuova forza naturale molto più intensa di quella elettromagnetica** in seguito identificata con **l'interazione forte**.

Infine vi erano gli **elettroni**, leggerissimi e carichi negativamente che non percepivano l'interazione forte ma solo la meno intensa **interazione elettromagnetica** e che per questo stavano all'esterno del nucleo orbitandogli attorno

come pianeti attorno al sole.

Il modello atomico planetario di Rutherford ebbe un effetto dirompente poiché **mise in luce che l'incapacità della fisica classica di rendere conto della struttura atomica**: secondo l'elettrodinamica infatti l'elettrone avrebbe dovuto irraggiare la sua energia cadendo, in tempi brevissimi, sul nucleo. In sostanza secondo la fisica classica l'atomo di Rutherford non poteva esistere! Questo fatto costrinse i fisici ad abbandonare progressivamente la fisica classica nella interpretazione dei fenomeni microscopici. Nel **1913 N. Bohr** imboccò la giusta via mettendo in relazione il problema della struttura atomica con i fenomeni 'quantistici' - messi in luce da Plank ed Einstein tra il 1900 ed il 1910 - che caratterizzavano lo scambio di energia tra materia e radiazione. Le condizioni di quantizzazione di Bohr, aggiunte ad una impostazione 'classica' del problema spiegavano in ogni dettaglio l'atomo d'idrogeno e furono cruciali per la creazione della futura **meccanica quantistica**.

Retrospectivamente possiamo apprezzare un secondo effetto solo apparentemente modesto: esso suggeriva implicitamente la suddivisione delle particelle materiali in due famiglie. Da un lato **particelle pesanti** come il protone ed il neutrone **soggette alla interazione elettromagnetica e forte** e dall'altro una **particella leggera** come l'elettrone **soggetto alla sola interazione elettromagnetica**: è la odierna ripartizione delle particelle in adroni (adros= spesso, denso, pesante) e leptoni (leptos=leggero), semplice ma efficace per orientarsi nel 'mare' di nuove particelle che verranno scoperte nei decenni successivi.

La scoperta delle prime particelle non atomiche: nasce la fisica della particelle (1930-1939)

Nel decennio tra il 1920-1930 fu creata la **meccanica quantistica** che forniva un **quadro teorico** che i più ritenevano soddisfacente **per la spiegazione dei fenomeni microscopici della materia e, in parte, anche della radiazione.**

Sul fronte sperimentale si era così compiuta **una prima grande sintesi che aveva individuato tutti i componenti della materia ordinaria:** elettroni, protoni e neutroni interagenti attraverso la forza forte ed elettromagnetica la quale, in determinati contesti, poteva manifestarsi anche sotto forma di raggi X e Gamma.

Questo quadro era considerato **soddisfacente e da alcuni persino prossimo al definitivo completamento della fisica!**

La scoperta delle prime particelle estranee all'edificio atomico smentirono nel modo più clamoroso queste convinzioni e diedero avvio ad un nuovo percorso della fisica che si giocò sul piano sperimentale, teorico e tecnologico: nasce la fisica delle particelle elementari.

Le prime particelle 'extramateriali' furono osservate soprattutto nei raggi cosmici.

- ❑ Nel 1929 **Dirac**, nel tentativo di interpretare la sua equazione relativistica dell'elettrone, ipotizza l'esistenza del **positrone**, inizialmente identificato con il protone ma poi pensato come nuova particella.
- ❑ Nel 1930 **W. Pauli**, nel tentativo di spiegare alcune anomalie nello spin nucleare ma soprattutto lo spettro energetico continuo degli elettroni emergenti dal decadimento radioattivo di certi nuclei (decadimento beta) ipotizzò l'esistenza di una particella neutra di massa piccolissima o nulla, il **neutrino** (l'unica alternativa era quella di rinunciare alla conservazione della energia come erano peraltro disposti a fare Dirac e Bohr ad esempio).
- ❑ Nel 1932 **C. Anderson** scopre il **positrone** nei raggi cosmici e **J. Chadwick il neutrone**.
- ❑ Nel 1933 **E. Fermi** pubblica la **prima teoria delle interazioni deboli** fondata sulla esistenza del neutrino. In questo lavoro le particelle si creano e si distruggono nel corso del processo dovuto all'interazione (il neutrino ad esempio non è pensato come un costituente del nucleo o

dell'atomo, come Pauli suggeriva, ma come una particella creata nel corso del processo di decadimento).

- ❑ Nel 1935 **H. Yukawa** formula la **prima teoria delle interazioni forti** secondo la quale l'interazione è dovuta allo scambio di **particelle cariche e neutre di circa 140 MeV di massa**.
- ❑ Nel 1937 **C. Anderson e S. Neddermeyer** utilizzando rivelatori su palloni sonda scoprono nei raggi cosmici l'elettrone pesante o **muone**, una particella inizialmente scambiata con quella predetta da Yukawa.

L'evidenza sperimentale di particelle non appartenenti alla architettura dell'atomo introdusse gradatamente l'idea **che la fisica delle particelle dovesse spingersi ben oltre la struttura della materia, anzi, che questa non fosse altro che una delle manifestazioni di una classe di fenomeni molto più ampia**. In effetti il successivo sviluppo di questa disciplina confermerà che l'oggetto della fisica delle particelle è in realtà il cosmo.

Intanto si andavano preparando gli strumenti che determineranno l'impetuoso sviluppo della fisica delle particelle a partire dall'immediato dopoguerra.

Il primo e forse più rilevante può essere considerato una naturale evoluzione delle tecniche sperimentali impiegate da **Rutherford** che avevano, tra le altre cose, rivelato l'efficacia delle particelle cariche nella indagine delle strutture del mondo atomico e subatomico. Una efficacia però che richiedeva energie via via crescenti: nel 1927, in un discorso alla Royal Society della quale era presidente, **sottolineò la necessità di atomi ed elettroni di energia molto più elevata di quella fornita dai processi naturali di decadimento**. Così **nel 1930, J. Cockcroft e E. Walton costruirono una specie di tubo catodico ad alta tensione** capace di raggiungere gli 800 keV e nel 1932 realizzarono la prima disintegrazione nucleare artificiale scindendo il nucleo di litio in due particelle alfa con un fascio di protoni. Negli stessi anni L. Szilard intuì che una traiettoria circolare avrebbe permesso di raggiungere energie più elevate e **nel 1930 E. Lawrence (e studenti) costruirono il primo ciclotrone di 80 KeV di energia, nel 1932 una seconda macchina da 1 MeV ed alla fine degli anni 30 si raggiunsero i 25 MeV**.

La proliferazione degli adroni: il periodo di mezzo della fisica delle particelle (1945- 1965)

L'Europa uscì a pezzi dal secondo conflitto mondiale: dei 55.000.000 milioni di morti, 40.000.000 erano europei, la maggior parte delle distruzioni materiali avvennero in Europa, a causa delle persecuzioni razziali migliaia di scienziati di ogni disciplina fuggirono. L'Europa perse il primato politico, economico e culturale.

Al contrario gli stati uniti ne uscirono rafforzati. Non subirono perdite umane e materiali di rilievo ed in più accolsero il meglio della scienza Europea che, contribuendo in modo decisivo alle grandi imprese tecniche della guerra (radar, bomba atomica, primi computer), assicurò agli scienziati, ed in particolari ai fisici, quello status particolare che garantì loro, dall'immediato dopoguerra in avanti, finanziamenti ingenti e costanti.

Questa situazione generale fu determinante anche per lo sviluppo della fisica delle particelle. Gli stati uniti puntarono a costruire macchine acceleratrici sempre più grandi e costose mentre l'europa e, soprattutto, l'italia si affidarono ai raggi cosmici che avevano il grande merito di essere gratuiti.

Negli stati uniti la ricerca in fisica delle particelle assunse i caratteri di una impresa industriale dove gli aspetti organizzativi, finanziari, di immagine etc. etc. andavano ad aggiungersi a quelli eminentemente scientifici. Iniziò la '**big science**', un modello di sviluppo della ricerca che in seguito - con il miglioramento delle condizioni finanziarie - si diffuse anche in Europa. Una suddivisione delle competenze tra tecnologi - cui spetta la progettazione, realizzazione e mantenimento delle complesse apparecchiature - fisici sperimentali - cui spetta la ideazione ed esecuzione degli esperimenti - e fisici teorici che traggono la sintesi di tutto questo lavoro, è la chiave del successo scientifico di imprese di dimensioni sempre crescenti che, con il tempo,

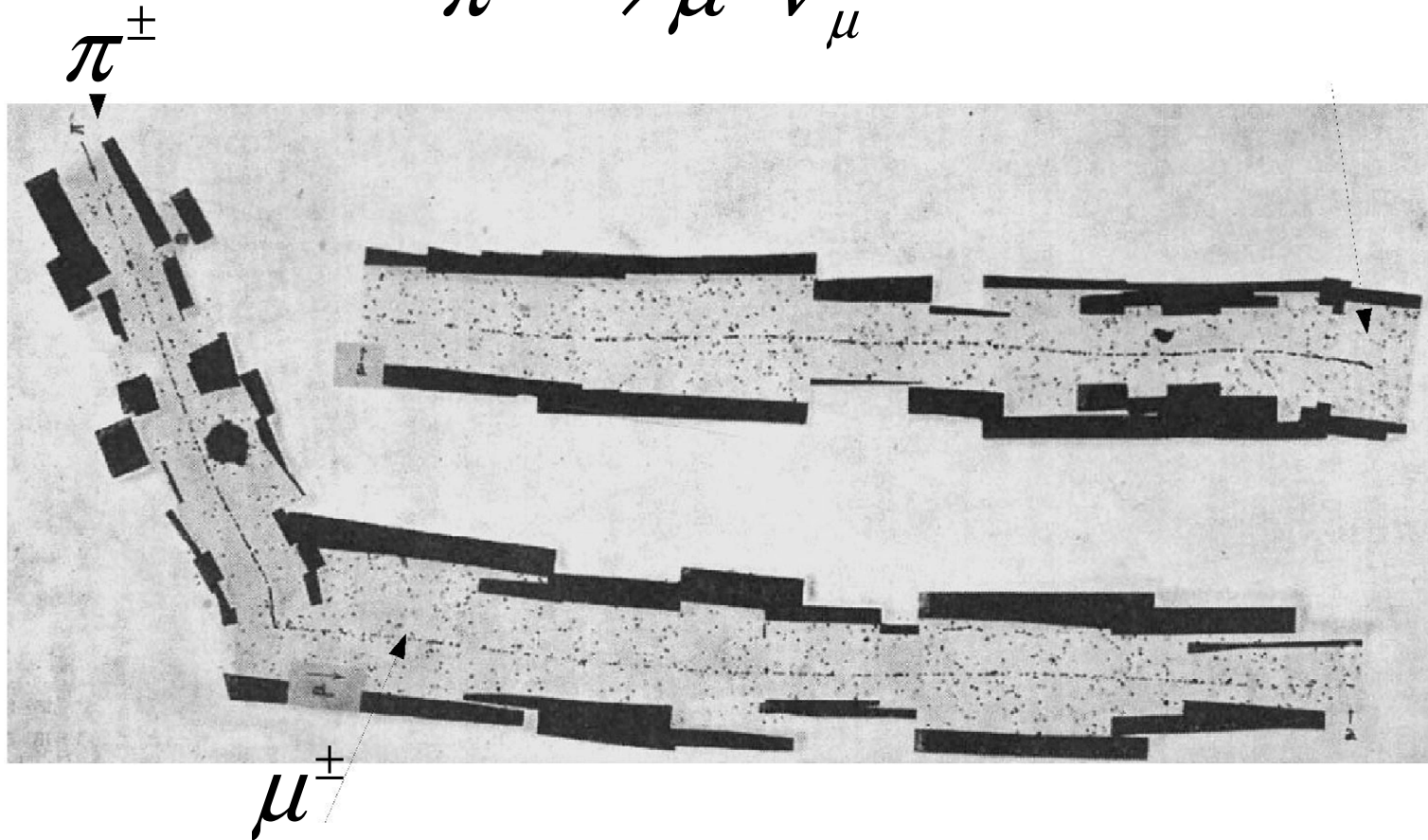
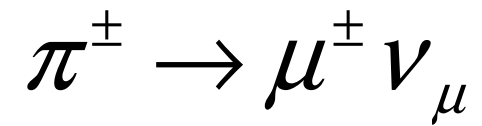
hanno dovuto prevedere anche le inedite figure del fisico amministratore e del fisico imprenditore e reso necessaria l'attenzione di tutta l'opinione pubblica, ottenuta per mezzo di una quasi costante presenza nei mezzi d'informazione.

Colui che anticipò e poi, nell'immediato dopoguerra, contribuì in modo decisivo ad imporre questo modello di ricerca nella fisica delle particelle fu **E.O. Lawrence**, inventore del ciclotrone (brevettato nel 1934) e fondatore del Radiation Laboratory di Berkeley. Il primo ciclotrone, costruito nel 1932, aveva un diametro di pochi centimetri. Il Bevatron, costruito nel 1954 e con il quale E. Segrè scoprì l'antiprotone, aveva un diametro di oltre 40 m, conteneva 9.500 tonnellate di ferro, 370 Km di cavi, e costava 9.5 milioni di dollari! Lo staff permanente dei laboratori da poche decine divenne, nel dopoguerra, di molte centinaia. Oggi il Cern ha uno staff di 2500 persone e riceve finanziamenti diretti per circa 900 milioni di Euro l'anno (dati 2009).

❑ **Raggi cosmici, emulsioni e camere a nebbia.**

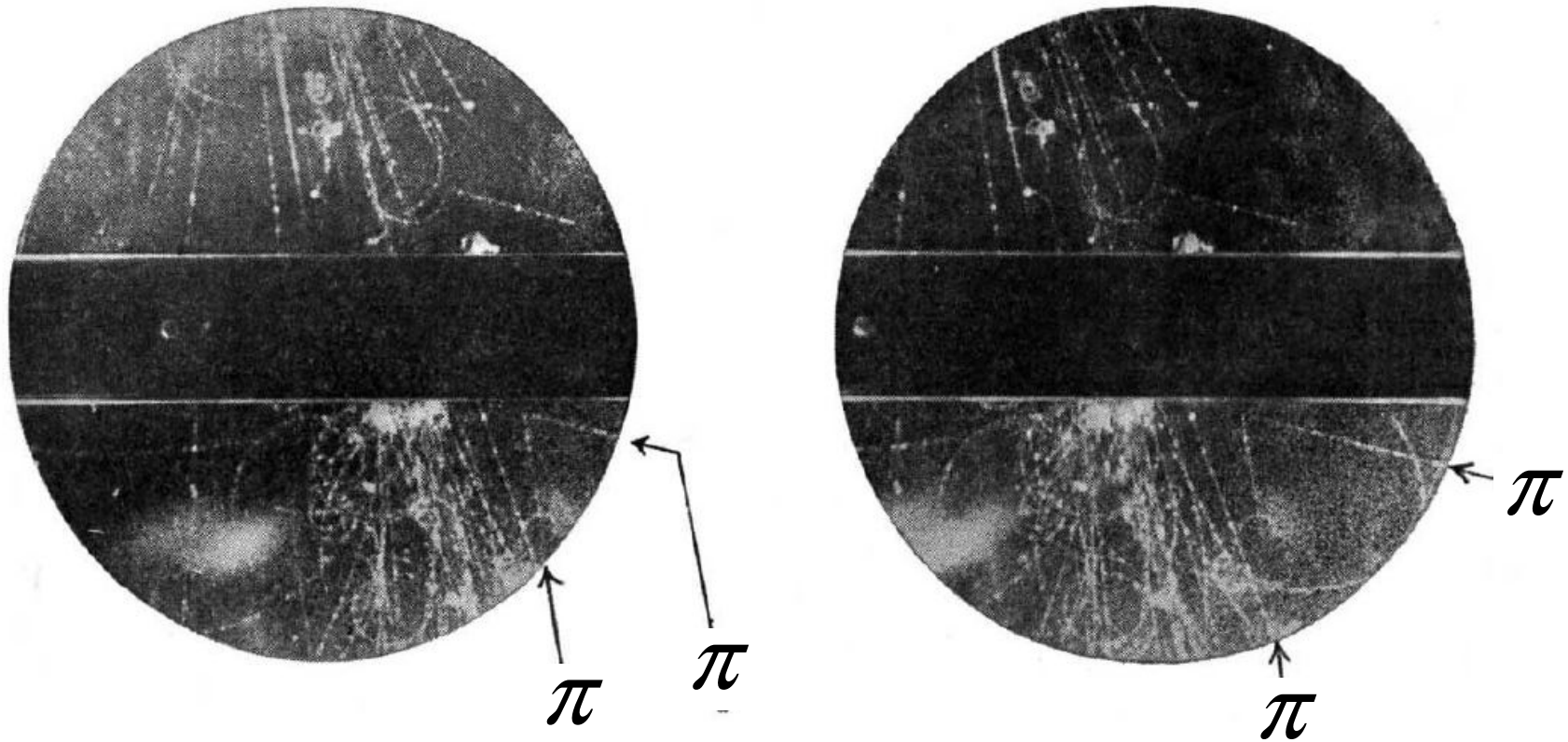
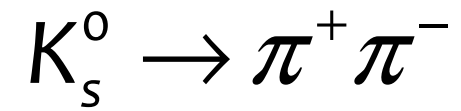
Nonostante i grandi investimenti nelle macchine acceleratrici, nel decennio successivo la fine della guerra i progressi più significativi in fisica delle particelle furono conseguiti per mezzo dei **raggi cosmici** e con semplici dispositivi di rivelazione. Tra questi i più rilevanti furono **l'emulsione fotografica** (scoperte da Kinoshita negli anni '30, erano inizialmente semplici lastre fotografiche capaci di vedere le sole particelle alfa. Dopo la guerra furono perfezionate e divennero capaci di rivelare anche gli elettroni) e la **camera a nebbia** (inventata nel 1911 da C. Wilson è una camera contenete gas soprassaturo, anche semplice vapore d'acqua, che condensa sugli ioni prodotti dal passaggio delle particelle).

La scoperta del pione carico



Emulsione fotografica, esposizione in quota (Pic du Midi, 2800m, Monte Bianco Francia)
Occhialini, Powell, Lattes 1947.

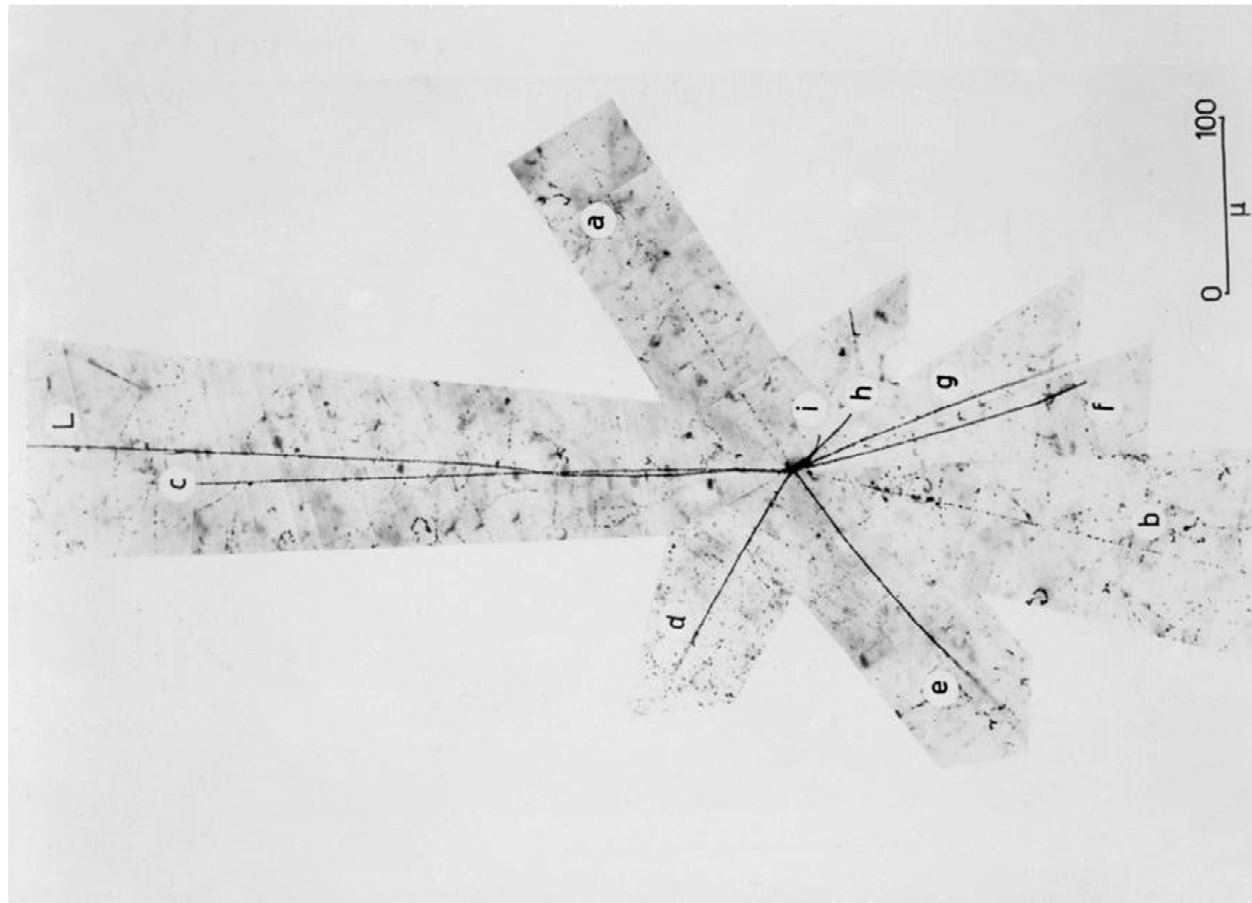
La scoperta del kaone neutro



Camera a nebbia - G.D. Rochester, C.C. Butler 1947.

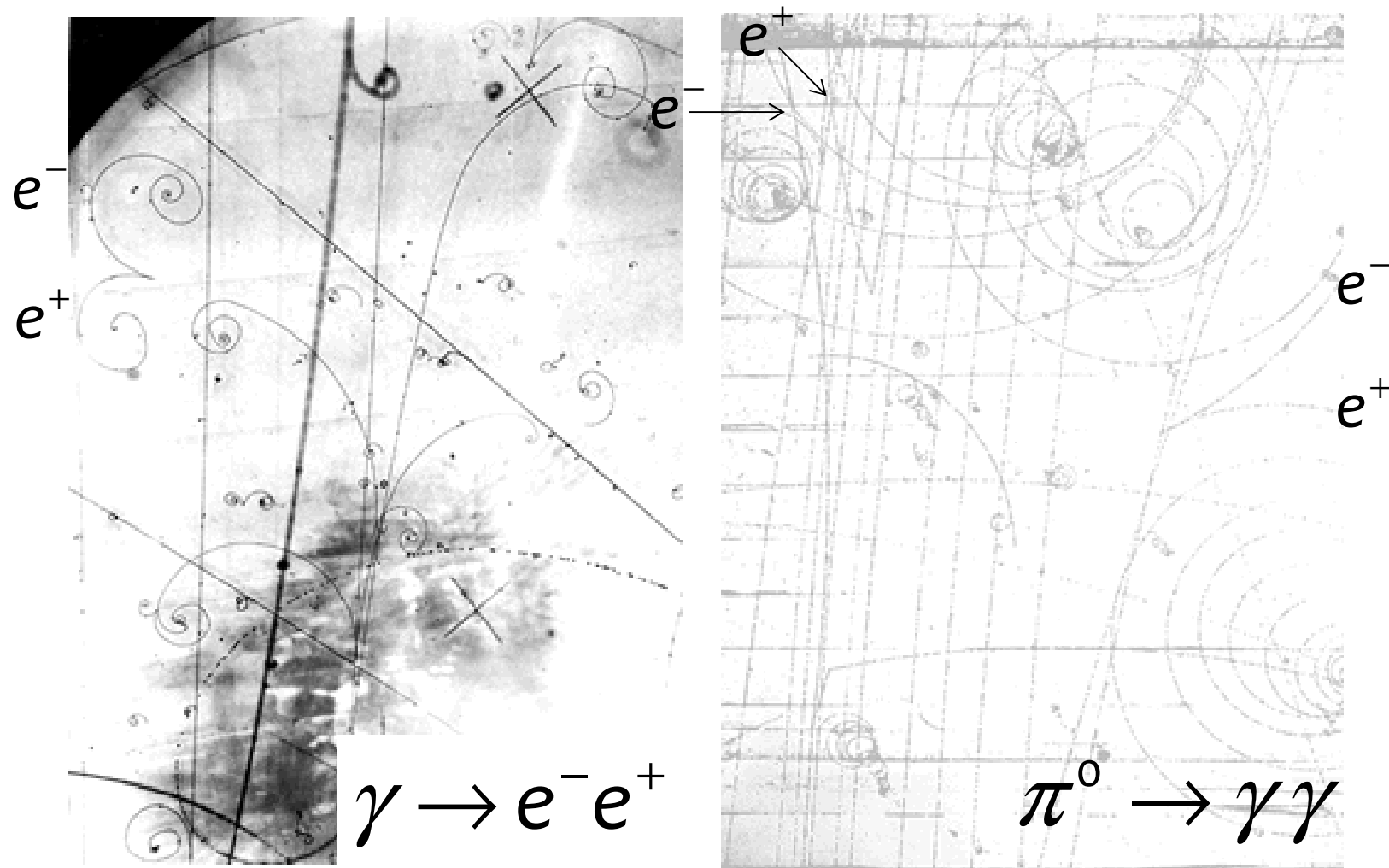
La scoperta dell'antiprotone

stella di antiprotoni $\bar{p}p \rightarrow \pi\pi\dots\pi$



Emulsione fotografica – Bevatron, E. Segrè 1955.

Le camere a bolle



□ Acceleratori, camere a bolle, elettronica e informatica

Nel **1948** presso i Radiation Laboratory di Berkeley, presso il ciclotrone da 184 pollici (4.7 m di diametro e 100 MeV di energia), **vengono prodotti i primi pioni artificiali** scoperti l'anno prima da Occhialini, Powell e Lattes. Da questo momento macchine acceleratrici sempre più grandi cominceranno a produrre particelle subnucleari in fasci di qualità ed intensità sempre crescenti da inviare su qualunque tipo di bersagli. I raggi cosmici non potranno più competere!

Un secondo progresso decisivo fu compiuto negli apparati di rivelazione delle particelle con l'invenzione della **camera a bolle**. Nel 1952, D.A. Glaser ebbe l'idea di sostituire il gas soprassaturo di una camera a nebbia con un liquido surriscaldato. Abbassando bruscamente la pressione accadeva che si formassero piccole bolle di vapore in corrispondenza degli ioni liberati dal passaggio delle particelle. Negli anni immediatamente seguenti L. Alvarez sviluppò su vasta scala la tecnica della camera a bolle che si impose in tutti laboratori di fisica delle particelle per quasi 30 anni. Anche qui le dimensioni aumentarono progressivamente: le prime camere a bolle contenevano poche decine di litri di liquido mentre una delle ultime, Gargamelle presso il CERN operativa fino al 1979, era un cilindro di 5m x 2m e conteneva 12.000 litri di liquido.

Un terzo aspetto decisivo fu il progresso della **elettronica** e dei **calcolatori** resero possibile l'esame via via automatizzato di numeri sempre più imponenti di immagini.

L'organizzazione oramai su scala industriale della ricerca sperimentale **produsse un diluvio di nuove particelle ad interazione forte prevalentemente instabili dette adroni** che in poco tempo superarono il centinaio di unità impegnando i fisici sperimentali e teorici in un complesso lavoro di analisi e classificazione. Il fenomeno della **'proliferazione degli adroni'** fu imponente e sconcertante poiché rivelava l'esistenza di un complesso universo al di là della materia ordinaria evidentemente legato alle proprietà delle interazioni forti dato che **non si osservava un analogo fenomeno di proliferazione tra i leptoni**: in questo periodo si registra la scoperta di due soli leptoni che andavano ad aggiungersi all'elettrone ed al muone

- 1956: osservato il **neutrino elettronico** (F. Reines e C. Cowan, LOS ALAMOS, USA);
- 1962: osservato il **neutrino mu** (L. Lederman, Schwartz e J. Steinberger, BNL, USA).

Il Modello Standard: il periodo recente della fisica delle particelle (1965- oggi)

Premesso che chiariremo nelle lezioni seguenti questi concetti, un punto di svolta decisivo si ebbe con la proposta del **modello a quark** da parte di M. Gell-Mann e G. Zweig nel 1964.

Con un ruolo analogo a quello giocato dalla tavola periodica di Mendeleiev esso fornì un quadro concettuale chiaro all'interno del quale collocare il fenomeno della proliferazione degli adroni interpretati come **aggregati di particelle presumibilmente elementari, dette quark, tenute insieme dalla interazione forte** (per spiegare la fenomenologia allora nota erano sufficienti **tre tipi di quark chiamati 'up', 'down' e 'strange'**).

Inoltre, non percependo l'interazione forte **tali aggregati non potevano formarsi tra i leptoni** fornendo anche una spiegazione al fatto empirico che il loro numero tendeva a rimanere assai limitato.

In questo modo si chiarì che lo scopo della vasta sistematica di stati risonanti accumulati prima di allora e dopo di allora non poteva che essere quella di chiarire le proprietà fisiche dei quark sottostanti: la tradizionale separazione in leptoni e adroni viene riformulata nelle due famiglie di particelle elementari ed indivisibili (almeno fino a prova contraria) dei leptoni e dei quark.

Si apre così la fase attuale della fisica delle particelle centrata sui due grandi filoni della **fisica dei quark** e delle **interazioni forti** da un lato e sulla **fisica dei leptoni** e delle **interazioni deboli** dall'altro, esplorate ad una scala di energia che - almeno fino ad oggi - è cresciuta ad ogni successiva generazione di fisici per mezzo di acceleratori ed infrastrutture di ricerca che hanno raggiunto limiti

inimmaginabili.

Sul finire degli anni '60 il distillato di una enorme mole di dati sperimentali e una altrettanto enorme mole di lavoro teorico hanno cominciato a depositarsi in quella vastissima sintesi teorico-sperimentale che oggi indichiamo con il nome un poco generico di **Modello Standard** che cercheremo di approfondire nelle lezioni seguenti.

E' solo all'interno del modello standard che è possibile comprendere il significato ed il valore delle scoperte di questo periodo

- 1969: osservati i **partoni** all'interno degli adroni ovvero i **quark** e i mediatori della interazione detti **gluoni** (SLAC, USA);
- 1974: scoperto il **mesone J/ψ** che dimostrò l'esistenza del **quark Charm**, il quarto della lista (B. Richter SLAC, USA e S. Ting BNL, USA);
- 1975: scoperto il **leptone Tau**, il quinto della lista (M. Perl SLAC, USA);
- 1977: scoperto il **mesone Upsilon** che dimostrò l'esistenza del **quark Bottom**, quinto della lista (L. Lederman FERMILAB, USA);
- 1979: osservazione indiretta dei mediatori della interazione forte, i gluoni, in eventi a tre jet (DESY, Amburgo, Europa);
- 1983: scoperti i mediatori massivi della interazione debole, i **bosoni W^\pm e Z^0** (C. Rubbia CERN, Ginevra, Europa);

-
- 1995: scoperto il **quark Top** per mezzo di una analisi dei suoi prodotti di decadimento, sesto della lista (FERMILAB, USA);
 - 2000: osservazione del **neutrino Tau**, sesto della lista (FERMILAB, USA);
 - 2012: osservazione di un ‘segnale’ compatibile con le proprietà attese per la **particella di Higgs**, necessaria nel modello standard soprattutto per spiegare la altrettanto necessaria massività dei mediatori della interazione debole **W^\pm e Z^0** (Esperimenti ATLAS e CMS, CERN, Ginevra, Europa).

La conferma di questo dato potrebbe segnare una nuova fondamentale svolta **chiudendo l'era del modello standard** ed avviando un nuovo periodo alla ricerca di nuove particelle, forze ed in generale fenomeni di cui si sa molto poco.

Potrebbe essere un periodo assai stimolante, dato che gli esperimenti sarebbero nuovamente chiamati ad orientare la fisica teorica il cui assetto, in questo nuovo ambito, è ben lungi dall'essere definito.

Potrebbe essere anche un periodo molto poco stimolante qualora si dovesse constatare che la nuova fisica non è alla portata della energia delle macchine attuali le quali hanno raggiunto un limite tecnico e forse anche finanziario che non si può pensare di oltrepassare in modo davvero significativo.

Profilo Storico

L'evoluzione delle teorie

La contrapposizione campo materia nella fisica classica

❑ Particelle materiali

A partire dalla fine dell'800, con la scoperta dell'elettrone e del protone, si affermò gradualmente l'*atomismo* fondato sulla idea che la **materia** fosse costituita da 'grani elementari' o **particelle** non ulteriormente divisibili.

Un certo numero di loro proprietà distintive erano in realtà desunte dalle particelle macroscopiche ed assunte valide - pur senza prova diretta - anche per quelle microscopiche: il possedere una **massa**, l'essere **stabili** nel tempo (almeno per quanto riguarda gli elettroni ed i protoni), l'occupare porzioni di spazio definite e molto piccole al limite **puntiformi**. Si assumeva inoltre che i concetti di posizione, velocità, accelerazione, massa, forza ed in generale le grandezze meccaniche fossero adeguate alla descrizione delle particelle la cui evoluzione temporale si riteneva essere descritta correttamente **dalle leggi newtoniane**.

❑ Campi di forza

Era poi ben noto che la materia - e quindi le particelle che la costituiscono - poteva esercitare forze di natura gravitazionale ed elettromagnetica su altra materia - ovvero su altre particelle - superando lo spazio interposto e per questo dette **forze o interazioni naturali** (per distinguerle dalle forze meccaniche che invece si esercitavano attraverso il contatto diretto delle porzioni materiali).

La prima interazione naturale ad essere descritta fu quella gravitazionale. La **teoria newtoniana della gravitazione**, formulata nel 1687, nonostante la sua efficacia trascurava

completamente il meccanismo di propagazione nello spazio postulando una istantanea **azione a distanza** tra i corpi materiali.

Più di ogni altro M. Faraday si adoperò affinché la nuova teoria delle forze elettriche e magnetiche superasse questa limitazione introducendo il **concetto di campo** ma colui che fu effettivamente in grado di inserirlo all'interno di una descrizione matematica coerente delle forze elettriche e magnetiche fu J. C. Maxwell con la pubblicazione del suo trattato nel 1873 (*A Treatise on Electricity and Magnetism*). Si assumeva che questo nuovo ente fisico potesse occupare vaste porzioni di spazio trasmettendo le forze che si esercitavano al suo interno. Secondo questo approccio una particella, per effetto di una **carica interna** (ad esempio la carica elettrica), poteva **perturbare localmente il campo** nel quale era immersa (ad esempio il campo elettromagnetico), che a sua volta **propagava la perturbazione in tutte le direzioni** raggiungendo infine una seconda particella distante, immersa nello stesso campo, la quale, per effetto di una analoga carica interna, ne **riceveva localmente e dopo un certo tempo la perturbazione**. Questo schema concettuale eliminava evidentemente il concetto di azione a distanza ma introduceva un nuovo ente fisico, il campo, al centro delle speculazioni teoriche e sperimentali della fisica di fine '800.

J.C.Maxwell, ed in generale i fisici dell'800, pensavano che il campo potesse essere interpretato come un fluido materiale esteso nello spazio, denominato - rifacendosi all'ottica di Huygens - **etere meccanico**. Una impostazione che vedeva evidentemente l'elettromagnetismo in posizione subordinata rispetto alla meccanica, potendosi dedurre - almeno così si credeva - dalla meccanica dei mezzi continui.

In realtà questa idea condusse la fisica di fine '800 in un inesorabile vicolo cieco causando dapprima sottili difficoltà (l'etere meccanico doveva riempire il cosmo ed anche penetrare nei corpi materiali come dimostrava la propagazione della luce, non dava origine al vento degli ordinari fluidi materiali, ciononostante doveva essere rigidissimo a causa della elevata velocità di propagazione della luce) e poi scontrandosi, nel 1884, con il risultato negativo dell'esperimento di Michelson e Morley.

Dopo di allora il concetto di etere meccanico perse gradualmente rilevanza fino ad essere completamente superato dalla formulazione della **Teoria della Relatività Ristretta** (A. Einstein, 1905) che aveva il suo punto di partenza proprio nella negazione della legge di composizione delle velocità per i raggi luminosi implicata, invece, dal concetto di etere meccanico.

Da allora il campo è considerato un ente fisico autonomo, in nessun modo riducibile alla materia, le cui principali proprietà distintive sono: la capacità di **occupare vaste porzioni di spazio**, di essere **continuo** e quindi frazionabile – almeno concettualmente - in parti sempre più piccole, di essere descritto da **funzioni continue della posizione e del tempo** con una evoluzione temporale governata da opportune **equazioni di campo** che, nel caso delle forze elettromagnetiche, corrispondono alle equazioni di Maxwell (il teorema di Poynting meglio di qualunque altro fa cogliere la differenza tra materia e campo: anche il campo possiede energia, quantità di moto, momento angolare etc. etc. tuttavia il loro valore si riduce con il volume del campo azzerandosi con questo!). La vetta più alta raggiunta dal concetto classico di campo è senz'altro la teoria geometrica della gravitazione (**Teoria delle Relatività Generale**) formulata da A. Einstein nel 1916.

□ La contrapposizione campo-materia

Se pensiamo le Teorie della Relatività Ristretta e Generale come l'ultimo raggiungimento della fisica ottocentesca possiamo affermare che **la fisica classica ci consegna una interpretazione del mondo fisico sostanzialmente ripartita su due enti fondamentali ed intrinsecamente diversi: la materia (particelle materiali) ed il campo**. Come vedremo, la scoperta dei fenomeni quantistici richiederà una progressiva revisione di questo punto di vista e condurrà, alla fine, alla formulazione della teoria quantistica dei campi dove questa separazione viene completamente superata.

□ La natura corpuscolare del campo

Il primo segnale nella direzione di un superamento data la fine dall'anno 1900 quando Plank, dopo tentativi di ogni tipo sempre falliti, comunica che l'allora ben noto **problema della radiazione termica dei corpi materiali** (secondo la fisica classica, l'energia racchiusa nei modi normali del campo elettromagnetico emesso da un corpo materiale ad una certa temperatura finita T avrebbe dovuto essere infinita!) si poteva risolvere immaginando che i modi normali del campo elettromagnetico potessero scambiare, con la materia, solo quantità discrete di energia, multiple della frequenza del modo stesso secondo una nuova costante naturale oggi detta costante di Plank.

Mentre Plank considerava tale ipotesi un espediente formale per risolvere l'annoso problema, Einstein, in un fondamentale lavoro

sull'effetto fotoelettrico pubblicato nel 1905, interpretò la quantizzazione di Plank come l'effetto di una distribuzione spaziale granulare della energia del campo elettromagnetico: il quanto energetico di Plank diventava un oggetto fisico reale, più tardi indicato con il nome di **quanto del campo elettromagnetico** o **fotone** (nome, quest'ultimo, coniato da Lewis nel 1926).

Cadeva in questo modo una delle proprietà che maggiormente differenziavano la materia dalla radiazione: il campo non è continuo ma - come la materia - discreto, anch'esso costituito da particelle indivisibili o atomi chiamati **quanti del campo** o semplicemente **quanti** (che, nel caso del campo elettromagnetico, sono i fotoni).

Un primo successo del concetto di fotone fu la spiegazione **dell'effetto fotoelettrico** da parte di A. Einstein nel lavoro del 1905, ma la sua natura particellare fu confermata nel modo più spettacolare dall'**effetto Compton**, osservato nel 1922, e correttamente interpretato da lui stesso come un processo d'urto tra un elettrone ed un fotone.

Come tutti i concetti davvero rivoluzionari, il fotone risolveva vecchi problemi ponendone, al tempo stesso, dei nuovi. Il più rilevante fu intuito da Einstein stesso il quale si rese conto che il fotone, per quanto dotato di proprietà tipiche dei corpuscoli, doveva possedere anche proprietà ondulatorie dato che la luce - come spiegava perfettamente l'elettromagnetismo classico - poteva dare luogo al fenomeno dell'interferenza e della diffrazione. In sostanza **stava emergendo il fatto fisico fondamentale che le particelle macroscopiche sono intrinsecamente diverse da quelle microscopiche** essendo queste ultime essenzialmente ibride e capaci di comportamenti sia corpuscolari che ondulatori, un fatto che più tardi Bohr descriverà introducendo appositamente l'inedito concetto di **dualismo onda-corpuscolo**.

□ La natura ondulatoria della materia

Volendo riassumere in una formula concisa possiamo senz'altro affermare che la fisica classica affermò la natura ondulatoria del campo, mentre la fisica quantistica ne pose gradualmente in risalto la sua natura anche corpuscolare. Curiosamente alla materia toccò un percorso inverso, poiché la fisica classica ne affermò la natura corpuscolare, mentre la fisica quantistica pose gradualmente in risalto la sua natura anche ondulatoria.

In questa direzione, infatti, sono orientate le 'strane' **relazioni di quantizzazione dell'elettrone** all'interno dell'atomo di idrogeno postulate da **N. Bohr nel 1913**: benché misteriose risolvevano il problema della stabilità dell'atomo, inspiegabile classicamente; facevano comprendere le proprietà discrete della luce emessa dagli atomi eccitati, inspiegabile classicamente; fornivano previsioni quantitativamente perfette nel caso dell'atomo d'idrogeno. Con tutta evidenza la quantizzazione dell'elettrone secondo Bohr coglieva un qualche aspetto reale e profondo dell'elettrone ed in generale delle particelle materiali microscopiche.

Quale fosse tale aspetto lo chiarì **L. De Broglie nel 1924**, quando ipotizzò che alle particelle materiali microscopiche dovesse essere associata una **fase complessa con tanto di lunghezza d'onda e frequenza** proprio come accade in un fenomeno ondulatorio classico (dove però la fase è reale!). Anche se non era allora chiaro cosa oscillasse, si parlava di **onde materiali** le quali comportavano - ad esempio - che gli elettroni potessero dare luogo a fenomeni di diffrazione ed interferenza qualora indirizzati su 'fenditure' di dimensioni opportune che risultavano però essere di scala atomica.

Nel 1927 C. Davisson e L. Germer, indirizzando elettroni di velocità opportuna su di un cristallo i cui piani fungevano da reticolo di diffrazione, dimostrarono la spettacolare natura ondulatoria degli elettroni (oggi è possibile costruire fenditure di scala nanometrica e la natura ondulatoria degli elettroni può essere dimostrata direttamente all'interno di un microscopio elettronico, *The Young-Feynman Two-Slits Experiment with Single Electrons: Build-up of the Interference Pattern and Arrival-Time Distribution Using a Fast-Readout Pixel Detector*; S. Frabboni, A. Gabrielli, G. C. Gazzadi, F. Giorgi, G. Matteucci, G. Pozzi, N. Semprini Cesari, M. Villa, and A. Zoccoli; *Ultramicroscopy*, 2012. **116**: p. 73-76).

Nel 1926, E. Schroedinger costruì l'equazione di evoluzione temporale dell'onda materiale – la ben nota equazione di Schroedinger – e, nello stesso anno, M. Born propose che ciò che oscillava nell'onda materiale era una funzione complessa il cui modulo quadrato integrato su di un volume forniva la probabilità di osservare la particella microscopica in quel volume. Veniva così introdotto il controverso concetto di funzione d'onda capace di descrivere perfettamente il dualismo onda corpuscolo e tutti i fatti empirici noti ma al prezzo della ipotesi della natura intrinsecamente probabilistica del processo di osservazione (contro la quale A. Einstein produrrà alcuni dei suoi lavori più profondi).

Sempre nel 1926, infine, Schroedinger dimostrò la completa equivalenza del suo approccio, la cosiddetta *meccanica ondulatoria*, con quello formulato nel 1925 da W. Heisenberg, P. Jordan e M. Born, la *meccanica matriciale*. Negli anni seguenti **l'apparato formale della meccanica quantistica** verrà sviluppato ed approfondito fino a giungere all'opera definitiva di Von Neumann che gli darà la forma che conosciamo fondata su operatori lineari nello spazio di Hilbert (*Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, 1932).

□ L'unità dei fenomeni microscopici

Con la formulazione della meccanica quantistica viene di fatto recuperata la **completa unità dei fenomeni microscopici** nel senso che sia le particelle materiali che i quanti del campo sono enti intrinsecamente ibridi capaci di comportamenti corpuscolari oppure ondulatori (Bohr sottolineò che i due aspetti si escludono a vicenda poiché un esperimento che evidenzia gli aspetti corpuscolari non sarà in grado di misurare quelli ondulatori e viceversa). In sintesi il dualismo onda-corpuscolo riguarda tutti gli enti microscopici, sia i quanti del campo (elettromagnetico) che le particelle materiali suggerendo – implicitamente – **un loro possibile più profondo legame che però la meccanica quantistica di Heisenberg e Schroedinger non mise in luce**.

Il motivo di questo fatto va ricercato nella impostazione della meccanica quantistica, centrata sulla descrizione della particella materiale che si suppone data e stabile nel tempo. I limiti di questa impostazione divennero via via più chiari con due classi di problemi apparentemente distinti e che invece trovarono – come dirò – una loro comune soluzione.

La prima riguarda **l'inclusione della Teoria della Relatività Ristretta** all'interno della meccanica quantistica, un tentativo che – forse prematuramente – già fece Schroedinger nel 1926 che però dovette arretrare di fronte alle previsioni errate sull'atomo d'idrogeno (mancava ancora l'essenziale concetto di spin!) e alla comparsa di ininterpretabili funzioni con energia-frequenza negativa.

La seconda riguarda invece **la descrizione di fenomeni quantistici nei quali il numero di particelle non è costante** ma varia nel tempo magari attraverso le complesse trasformazioni reciproche che di li

a poco cominceranno ad essere osservate tra le particelle elementari. La meccanica quantistica formulata da Schroedinger ed Heisenberg si dimostrò inadatta alla trattazione di questo tipo di problemi.

Come anticipato, **la soluzione procedette di pari passo con lo sviluppo delle teorie di campo quantizzato**, una versione della meccanica quantistica dove le particelle materiali e i quanti del campo vengono trattati su di un piano di assoluta parità superando la contrapposizione campo-materia cui era pervenuta la fisica classica.

❑ **L'esordio delle teorie di campo quantizzato**

La giusta strada fu imboccata nel 1925 da **Heisenberg, Pascual e Jordan** e, soprattutto, da **P. Dirac** nel 1927, il quale per primo descrisse **un sistema formato da un elettrone** (con spin e non relativistico) **ed un campo elettromagnetico** (ovviamente relativistico) **trattandoli entrambi con le leggi della meccanica quantistica**. Inevitabilmente il numero di particelle coinvolte variava nel tempo poiché il processo classico di trasmissione di energia ed impulso al campo elettromagnetico da parte dell'elettrone doveva essere descritto come il passaggio di un elettrone da uno stato quantico iniziale ad uno stato quantico finale con simultanea creazione di un quanto di energia o fotone descritta introducendo appositi operatori di creazione e distruzione. Un brillantissimo risultato di questo lavoro fu la deduzione dei coefficienti di Einstein per la emissione e l'assorbimento della radiazione dai principi generali della meccanica quantistica.

Nel 1928, **Dirac** riuscirà a superare le limitazioni di questo lavoro combinando la meccanica quantistica con la relatività in una nuova **equazione d'onda relativistica** che risultò descrivere particelle di

spin $\frac{1}{2}$ e quindi anche l'elettrone che fino ad allora era stato trattato solo in ambito non relativistico. Nuovamente riapparve lo spinoso problema delle soluzioni con energia negativa ma di lì a poco formulò la controversa **teoria delle buche** che formalmente risolveva il problema anticipando il concetto di **antiparticella** che si nascondeva sotto queste difficoltà formali (l'antielettrone fu scoperto da Anderson proprio nel 1932).

I metodi sviluppati dalla nascente elettrodinamica quantistica trovarono una loro esemplare esposizione in una ampia monografia di **E. Fermi**, pubblicata nel 1932, sulla quale si formerà la successiva generazione di fisici teorici. Con essa Fermi si impadronì a fondo dei nuovi metodi e l'anno successivo chiarì le potenzialità delle teorie di campo quantizzato fornendo **la prima teoria delle interazioni deboli**. L'assoluta novità del suo approccio consisteva, tra le altre cose, nel trattare l'elettrone ed il neutrino come quanti di un corrispondente campo in completa analogia con il fotone. In altri termini, secondo la sua **impostazione l'elettrone ed il neutrino - al pari del fotone - non esistono prima del processo di emissione**, vengono creati oppure assorbiti nel corso del processo stesso, contrariamente a coloro (praticamente tutti) che vedevano l'elettrone del decadimento beta preesistere all'interno del nucleo atomico.

Di grande importanza per gli sviluppi futuri, infine, fu l'intuizione di **H. Yukawa** che **mentre l'interazione elettromagnetica era mediata da quanti non massivi e per questo aveva un raggio d'azione illimitato altre interazioni potevano essere mediate da quanti massivi ed acquisire un raggio d'azione limitato**. Sviluppando questa idea in un lavoro del 1937, fornì la prima **teoria delle interazioni forti** spiegandone il raggio finito e prevedendo anche il corretto ordine di grandezza della massa del mediatore della interazione, in seguito identificato con il pione.

❑ Il problema degli infiniti

Il brillante esordio dei metodi delle teorie di campo quantizzato (allora ovviamente applicati al solo caso della elettrodinamica) fu funestato dalla scoperta che **il calcolo della probabilità di certi processi fisicamente osservabili forniva risultato infinito!** Già l'elettromagnetismo classico era afflitto da grandezze fisiche di valore infinito (un esempio è la massa elettromagnetica di una carica puntiforme $U = q^2/6\pi\epsilon_0 c^2 a$ che diverge quando il raggio della carica $a \rightarrow 0$) ma, contrariamente alle attese, le cose peggiorarono con i primi calcoli di elettrodinamica quantistica (Heisenberg e Pauli 1929 e poi Oppenheimer 1930) che evidenziarono, per le stesse grandezze, **divergenze con andamento $1/a^2$** (con $a \rightarrow 0$, divergenze ultraviolette) **quando si sommava sugli stati virtuali intermedi del campo.**

L'**equazione relativistica di Dirac** ebbe conseguenze positive anche sul problema degli infiniti. Infatti, Weisskopf, in un lavoro del 1934, mostrò che il ruolo dei positoni introdotti da Dirac era tale da eliminare i termini in $1/a^2$ ($a \rightarrow 0$) lasciando la più debole **divergenza con andamento logaritmico** ($\ln h/2\pi mca, a \rightarrow 0$).

Nonostante questo gli infiniti erano da molti considerati un problema che andava risolto con modifiche radicali dell'impianto teorico della nascente QFT (Dirac, nel 1942, introduce una metrica indefinita nello spazio di Hilbert per manipolare probabilità negative ed eliminare le divergenze, mentre Wheeler nel 1937 e Heisenberg nel 1943 suggeriscono di assumere come grandezza fondamentale in QFT la matrice S piuttosto che i vettori di stato).

Tra le idee in circolazione ve ne era una, ispirata dalla elettrodinamica di Lorentz, che **cercava di eliminare le grandezze infinite ridefinendo la carica e la massa delle particelle cariche.** **Weisskopf** imboccò questa strada e, nel 1936, pubblicò un lavoro

nel quale mostrò che **tutti gli infiniti fino ad allora noti potevano essere riassorbiti in questo modo.**

La svolta si ebbe subito dopo la seconda guerra mondiale nel corso della *Conference on the Foundations of quantum Mechanics* tenuta a Shelter Island (NY) nel Giugno del 1947. Qui si incontrarono i migliori teorici del tempo ed alcuni fisici sperimentali che richiamarono l'attenzione su **due piccoli ma decisivi effetti.**

Willis Lamb, con una tecnica geniale, riuscì a misurare lo **splitting tra i livelli $2S_{1/2}$ e $2P_{1/2}$ dell'atomo di idrogeno** (circa 1000 MHz) mentre **Isidor Rabi** misurò **una deviazione nel momento magnetico dell'elettrone** che risultava essere lievemente maggiore di quello previsto da Dirac (1.0013).

Per quanto riguarda lo **splitting $2S_{1/2}$ - $2P_{1/2}$ (Lamb-shift)**, un primo calcolo non relativistico, che eliminava le divergenze con un semplice taglio sugli integrali, fu eseguito nel 1947 da Bethe e fornì il valore quasi corretto di 1040 MHz. Calcoli relativistici furono eseguiti negli anni seguenti da diversi autori: Feynmann 1948, Tomonaga et al. 1948, Weisskopf & French 1949, Schwinger 1949, Kroll e Lamb 1949.

Per quanto riguarda invece il **momento magnetico dell'elettrone** il primo calcolo relativistico fu compiuto da Schwinger nel 1948.

In entrambi i casi **la precisione del calcolo era in eccellente accordo con i valori sperimentali** e fu determinante nel convincere la comunità dei fisici che le particelle virtuali e gli elaborati metodi per la rimozione degli infiniti dovevano essere prese molto sul serio.

Gli approcci al problema che per rigore e coerenza emersero in questo periodo furono quelli di **Schwinger** e **Tomonaga** da un lato

(basto sugli operatori) e quello di **Feynman** dall'altro (basato sui funzionali e su una razionale e pratica rappresentazione diagrammatica della interazione).

Fu invece **Dyson** che nel 1949 dimostrò i) la sostanziale equivalenza degli approcci di Schwinger, Tomonaga e Feynman; ii) che la tecnica di rimozione degli infiniti utilizzata era capace di rimuovere le divergenze in tutti gli ordini successivi dello sviluppo perturbativo della interazione; iii) che introdusse l'idea di **teoria di campo rinormalizzabile**, ovvero di una teoria di campo dove tutti gli infiniti possono essere riassorbiti dalla ridefinizione di un numero finito di parametri fisici della teoria.

Attraverso un percorso quasi ventennale si era così giunti alla **elettrodinamica quantistica**, la teoria di campo quantizzato della interazione elettromagnetica che fungerà da modello e guida nello sviluppo delle corrispondenti teorie di campo delle interazioni debole e forte che si riveleranno essere un obiettivo molto più arduo da raggiungere.

□ Teorie di Yang e Mills

Lavorando ad un tentativo di unificazione dell'elettromagnetismo e della gravitazione, nel 1918 il matematico **H. Weyl** si rese conto che sia la teoria dell'elettromagnetismo che quella della relatività generale risultavano essere simmetriche rispetto a trasformazioni di 'scala' dipendenti anche dalle coordinate spaziali (trasformazione di gauge). Con lo sviluppo della meccanica quantica la trasformazione del fattore di scala si divenne una **trasformazione, dipendente dalle coordinate, della fase di un**

numero complesso, in accordo con il fatto allora noto che l'elettromagnetismo modificava in effetti la fase della funzione d'onda (pare che questo fatto sia stato notato dai fratelli London nel 1935, impegnati in una prima teoria della superconduttività). Il punto essenziale è che, in questa nuova forma, **risultava possibile dedurre una teoria dinamica come l'elettromagnetismo da un principio di simmetria, la simmetria di gauge.**

Sempre negli stessi anni, precisamente nel 1932, il fisico sperimentale Chadwick scoprì il neutrone (già previsto da Rutherford oltre dieci anni prima), di massa quasi identica a quella del protone, entrambi sorgente – così si ipotizzava – di forza forte di eguale intensità capace di unirli all'interno del nucleo atomico. Nel 1932 Heisenberg capì che si poteva tradurre questi fatti empirici in termini formali arrangiando protone e neutrone nelle due componenti di un vettore complesso bidimensionale e richiedendo che la interazione forte fosse insensibile ad una eventuale rotazione del vettore stesso proprio perché protone e neutrone avevano la stessa massa (approssimativamente) e la stessa 'carica forte'. Per la sua analogia con lo spin, lo spazio complesso bidimensionale associato alla coppia protone-neutrone venne chiamato da Wigner, nel 1936, **spazio d'isospin** e la rotazione in tale spazio **trasformazione d'isospin** indicata simbolicamente con $SU(2)$ (gruppo Speciale Unitario di rango 2). Da allora, i vari tentativi di descrivere le interazioni forti hanno sempre tenuto conto del fatto che queste sono comunque invarianti rispetto a trasformazioni d'isospin, mentre le cosiddette **simmetrie unitarie**, ovvero le rotazioni in spazi complessi anche di

rango superiore al secondo ($SU(3)$, $SU(4)$ etc. etc.), associate sempre a 'cariche interne' delle particelle (ovvero a gradi di libertà non spazio-temporali), hanno giocato un ruolo di primissimo piano nella successiva elaborazione delle teorie delle interazioni deboli e forti.

Fu proprio mettendo assieme il concetto di simmetria di gauge con quello di simmetria unitaria che C. Yang e R. Mills nel 1954 elaborarono quella classe di teorie, dette **teorie di Yang-Mills**, da cui emergeranno le teorie di campo quantizzato della interazione debole-elettromagnetica e della interazione forte.

Più in dettaglio l'idea era quella di estendere il concetto di trasformazione di gauge dell'elettromagnetismo immaginando che le funzioni d'onda fossero arrangiate in un vettore complesso di dimensione N soggetto ad una trasformazione lineare locale del tipo $SU(N)$: nel caso particolare $N=1$ si otteneva l'ordinario elettromagnetismo. Il lavoro non ebbe nell'immediato un grande impatto anche perché **sembrava fallire l'obiettivo principale che si era proposto: la descrizione delle interazioni forti**. Infatti, quasi subito **W. Pauli**, che lavorava su temi simili, **fece notare che la massa dei quanti nella teoria di Yang e Mills rimaneva nulla**, come nell'elettromagnetismo d'altra parte, per cui l'interazione forte finiva per essere di raggio d'azione illimitato contrariamente alle indicazioni sperimentali.

Oggi è chiaro che il lavoro di Yang e Mills anticipò troppo i tempi poiché mancava ancora la comprensione di meccanismi operanti anche nel mondo delle particelle elementari che si riveleranno invece cruciali.

□ Il concetto di rottura spontanea della simmetria di gauge

L'indicazione di come si potesse superare l'obiezione di Pauli conferendo massa ai mediatori di una interazione naturale venne da un elusivo fenomeno della fisica della basse temperature, la **superconduttività**. Una delle caratteristiche salienti del fenomeno è che in un materiale superconduttore il campo magnetico interno è nullo (effetto Meissner) il che comporta l'impossibilità, da parte di un'onda elettromagnetica, di penetrarvi. Poiché il coefficiente di penetrazione di un'onda nel mezzo materiale è assimilabile all'inverso di una massa, in termini formali è come se i fotoni, propagandosi nel superconduttore, acquisissero una massa efficace che ne accorcia il cammino a valori piccolissimi. Sempre da un punto di vista formale tale massa efficace determina una perdita della simmetria di gauge dell'elettromagnetismo. In termini fisici, dunque, si capiva che **un mezzo materiale poteva conferire una massa efficace al fotone conferendogli un raggio d'azione finito**, fatto che poteva essere espresso formalmente affermando che **un mezzo materiale determinava una rottura o occultazione della simmetria di gauge dell'elettromagnetismo**. Un modello puramente fenomenologico di questo meccanismo, nel caso della superconduttività, fu fornito da Landau e Ginzburg nel 1950 mentre il meccanismo microscopico dettagliato fu compreso da J. Bardeen, L. Cooper e J. Schrieffer nel 1957 che misero in luce che gli elettroni, correlati da una interazione residua a formare coppie (**coppie di Cooper**), andavano a formare un 'mezzo materiale' che conferiva massa efficace alle onde elettromagnetiche (quest'ultimo fatto fu mostrato da Anderson).

Dalla superconduttività, il meccanismo fece il suo ingresso nella fisica delle particelle attraverso i lavori di **Y. Nambu**, nel 1960, che lo utilizzò per spiegare l'origine della massa dei pioni ed alcune proprietà delle interazioni forti.

Una versione relativistica nel contesto di teorie di Yang e Mills fu invece discussa a partire dal 1964 da **R. Brout e F. Englert, P. Higgs e G. Guralnik, C. Hagen e T. Kibble**. Essi chiarirono che, in questo caso, a seguito di un certo meccanismo oggi detto meccanismo di Higgs (l'unico grado di libertà di un campo scalare si combina con i due gradi di libertà di un campo vettoriale di massa nulla per fornire un campo con tre gradi di libertà ovvero di campo vettoriale massivo), **l'effetto finale della rottura della simmetria di gauge consiste nel conferire una massa non nulla ai mediatori vettoriali della interazione.**

Curiosamente gli scopritori di questo meccanismo non pensarono di applicarlo davvero alle interazioni fondamentali allora note per cui furono S. Weinberg e A. Salam che, qualche anno dopo, lo incorporarono nella teoria delle interazioni deboli allora disponibile sulla quale aveva lavorato, soprattutto, S. Glashow, pervenendo infine alla formulazione della teoria elettrodebole.

□ La teoria elettrodebole

Alcune caratteristiche fondamentali della interazione debole furono correttamente intuite da E. Fermi nel citato lavoro del 1933 sul decadimento beta: **il raggio molto corto della interazione** e la caratteristica di **modificare la 'natura' o 'tipologia' delle particelle coinvolte** (un neutrone si 'trasforma' in protone e un neutrino in

elettrone). La proprietà più notevole però fu chiarita nel 1957 da un celebre esperimento di madame C. Wu e collaboratori nel quale si dimostrò che **le interazioni deboli violavano la simmetria di parità**. Per intuire il significato di questo fatto è bene ricordare che una trasformazione di parità è un semplice passaggio da una terna d'assi destrorsa ad una sinistrorsa, una scelta assolutamente arbitraria che - come ad esempio nel passaggio da un riferimento inerziale ad un altro - non dovrebbe produrre alcun effetto sulle leggi fisiche fondamentali (le interazioni elettromagnetiche e gravitazionali rispettavano pienamente questa simmetria). Enorme fu la sorpresa quando invece si verificò che l'interazione debole violava questa simmetria, un fatto addirittura anticipato teoricamente qualche anno prima da T.D. Lee e C. Yang.

Non fu semplice descrivere correttamente questa proprietà delle interazioni deboli: era chiaro che si doveva modificare il vertice del processo ma non si sapeva esattamente come anche perché alcuni esperimenti errati confusero le carte in tavola. Nonostante questo, alcuni lavori teorici di R. Marshak e G. Sudarshan nel 1957 e poi R. Feynmann e M. Gell-Mann chiarirono che la violazione della parità della interazione debole poteva essere descritta assumendo che il vertice di produzione vettoriale (V) - proprio dell'elettromagnetismo - acquisisse anche una parte pseudovettoriale (o assiale A) di eguale intensità diventando infine V-A (**teoria V-A delle interazioni deboli**).

Poco dopo le reciproche trasformazioni neutrone-protone ed elettrone-neutrino, tipiche della interazione debole come notò già E. Fermi, vennero descritte usando vettori complessi a due componenti, ovvero il **gruppo SU(2)**, da Glashow (1958).

Quasi subito **Schwinger** fece però osservare che in una teoria di questo tipo nel momento in cui si forniva, in un qualche modo, massa ai mediatori della interazione debole si finiva per distruggere la rinormalizzabilità della teoria. Per questo egli **suggeriva di considerare la possibilità di includere nello schema anche l'interazione elettromagnetica** avviando, di fatto, la speculazione su di una possibile unificazione della interazione debole con quella elettromagnetica.

Allora tutti i processi deboli noti erano spiegabili con due mediatori di carica opposta, diciamo W^+ e W^- , cui si doveva aggiungere – sulla base del suggerimento di Schwinger – anche il fotone γ . In linea di principio era possibile ‘alloggiare’ tre mediatori nella versione $SU(2)$ della interazione debole ma al prezzo di enormi complicazioni poiché W^+ e W^- mediavano processi (quelli deboli appunto) che violavano la parità mentre γ mediava processi (quelli elettromagnetici) senza violazione della parità. Si intuì allora che se si voleva includere l'elettromagnetismo nelle interazioni deboli era necessario ‘ampliare’ il gruppo $SU(2)$. Fu S. Glashow nel 1961 che imboccò la strada giusta **estendo il gruppo a $S(2) \times U(1)$** che presuppone tre mediatori per l'interazione debole (due carichi ed uno neutro) ed uno per quella elettromagnetica, scelta che implicava l'esistenza di processi d'interazione debole mediati da un quanto neutro mai osservati fino a quel momento (processi di questo tipo, detti di corrente debole neutra, furono effettivamente osservati, nel 1974 presso il CERN di Ginevra, all'interno della grande camera a bolle Gargamelle).

Pur assumendo la versione delle interazioni deboli di Glashow, mancava ancora un meccanismo capace di spiegare in che modo i mediatori del settore debole della teoria, ovvero tre dei quattro mediatori, potessero acquisire massa senza distruggere la

rinormalizzabilità della stessa.

Tra il 1967 ed il 1968 comparvero i lavori di S. Weinberg e A. Salam che in un certo senso eseguirono la grande sintesi inserendo il meccanismo di Higgs della rottura della simmetria di gauge all'interno della versione $SU(2) \times U(1)$ delle interazioni deboli ed elettromagnetiche unificate di S. Glashow. Weinberg sottolineò che il meccanismo di Higgs forniva massa anche ai leptoni mentre sia Weinberg che Salam congettarono che la teoria, formulata in questo modo, doveva essere rinormalizzabile.

In realtà il loro lavoro non si affermò veramente fintanto che, nel 1971, G. 't'Hooft e M. Veltman non dimostrarono la completa rinormalizzabilità della teoria che pose una pietra miliare della fisica delle particelle poiché finalmente si disponeva di una teoria di campo quantizzato che unificava l'interazione debole e quella elettromagnetica capace di spiegare la loro apparente diversità attraverso il meccanismo di Higgs di rottura della simmetria di gauge, in una parola la **teoria elettrodebole**.

La teoria elettrodebole, nella forma in cui oggi la conosciamo, contiene al suo interno anche la descrizione di un sottile ed importante fenomeno - proprio della interazione debole - che appare essere la forma estrema di quella trasformazione protone-neutrone o elettrone-neutrino che già Fermi aveva notato. In sostanza, **nel corso di un processo debole, un quark (adrone) non solo cambia tipologia ma si porta addirittura su una combinazione lineare di due diverse tipologie**.

Questa possibilità, studiata e sviluppata già nel 1964 da N. Cabibbo per spiegare certi dati sperimentali, permise poi a S. Glashow, J. Iliopoulos e L. Maiani di prevedere teoricamente l'esistenza dell'allora quarto quark, il charm, e condusse infine M. Kobayashi e T. Maskawa (1973) ad estendere l'idea alle tre coppie di quark introducendo la cosiddetta matrice di

Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (matrice CKM). L'importanza di questo lavoro risiede nel fatto che in questo modo **risulta possibile incorporare nella teoria elettrodebole il fenomeno di violazione della simmetria CP** (ovvero della trasformazione combinata di parità spaziale e coniugazione di carica) scoperto nel 1964. Senza scendere qui in ulteriori dettagli vale la pena sottolineare che, nel contesto delle attuali teorie di campo quantizzato che soddisfano senz'altro la simmetria CPT (trasformazione combinata di coniugazione di carica, parità spaziale ed inversione del tempo), una violazione della simmetria CP equivale ad una **violazione di T** il che significa che le interazioni deboli sono intrinsecamente irreversibili. L'impatto su questioni cosmologiche relative all'asimmetria tra materia ed antimateria che oggi osserviamo fu chiaramente afferrata già negli anni '60 e costituisce una delle ragioni che rendono rilevante la determinazione degli elementi della matrice CKM, un attivo campo di ricerca della fisica delle particelle attuali.

La possibilità che un analogo miscelamento di tipologie potesse esistere anche tra i leptoni fu studiata, già nel 1957 da B. Pontecorvo (fenomeno della oscillazione del neutrino) e tradotta formalmente in una matrice di miscelamento, nel 1962, da Z.Maki e M. Nakagawa e S. Sakata (matrice di PMNS). La verifica sperimentale di questo fenomeno in anni recenti ha reso la ricerca degli elementi di della matrice di PMNS un attivo e importante campo di ricerca della fisica delle particelle contemporanea corrispondente e speculare al precedente.

□ La Cromodinamica quantistica

La interazione forte trovò la sua prima evidenza sperimentale con i lavori di Rutherford sul finire degli anni '20 i quali mostrarono che protoni e neutroni (ipotizzati da Rutherford ma osservati per la prima volta da Chadwick nel 1932 che misurò anche una massa prossima a quella del protone) formavano una struttura enormemente compatta che racchiudeva la quasi totalità della massa atomica.

L'esistenza del nucleo poteva essere compresa solo ipotizzando che **neutroni e protoni fossero soggetti ad una nuova interazione naturale attrattiva presumibilmente della stessa intensità** (nel senso che protoni e neutroni possedevano la stessa carica forte), **più intensa della forza repulsiva coulombiana tra i protoni, con un raggio d'azione presumibilmente dello stesso ordine di grandezza del raggio nucleare, l'interazione forte** appunto.

Il primo aspetto dell'interazione che attrasse l'attenzione dei fisici teorici riguarda il fatto che massa e carica forte di protone e neutrone erano pressochè coincidenti. Ci si attendeva in sostanza che dal punto di vista delle interazioni forti protone e neutrone fossero completamente equivalenti. La prima descrizione formale di questo concetto fu data nel 1932 Heisenberg che ebbe l'idea di arrangiare protone e neutrone nelle due componenti di un vettore complesso bidimensionale e di richiedere che la interazione forte fosse insensibile rispetto ad una eventuale rotazione del vettore stesso.

Per la sua analogia con lo spin, lo spazio complesso bidimensionale associato alla coppia protone neutrone venne chiamato da Wigner **spazio d'isospin** e la rotazione in tale spazio **trasformazione d'isospin** (Wigner, 1936) indicata simbolicamente con **SU(2)**: gruppo Speciale Unitario di rango 2. **L'interazione forte possedeva dunque la proprietà di essere invariante rispetto a rotazioni d'isospin**, una proprietà che accompagnerà tutti gli sviluppi successivi.

L'altra proprietà saliente della interazione, quella di essere a **corto raggio**, venne esplorata nel contesto di una teoria di campo elementare nel già 1935 **H. Yukawa**. Egli fece l'osservazione cruciale che era possibile rendere conto del corto raggio d'azione immaginando che l'interazione fosse mediata da un quanto massivo (un quanto non massivo – come nel caso dell'elettrodinamica - secondo Yukawa avrebbe determinato un raggio d'azione infinito) di cui stimò anche la massa e che in seguito sarà identificato con il pione.

Un lavoro analogo fu fatto negli stessi anni da **E. Stuekelberg** il quale **notò anche che l'interazione forte doveva avere un accoppiamento dell'ordine di 10 unità** (in una scala adimensionale dove l'interazione elettromagnetica aveva un accoppiamento di 1/137 unità!) per cui non la si poteva studiare con i metodi perturbativi che la elettrodinamica andava sviluppando (proprio in un lavoro misconosciuto del 1934, Stuekelberg aveva sviluppato un approccio pienamente covariante alla teoria delle perturbazioni nelle teorie di campo quantizzato). Questo fatto implicava che in elettrodinamica i processi più complessi contribuivano con peso via via

decescente e potevano essere trascurati mentre – al contrario - nelle interazioni forti i processi più complessi fornivano i contributi più importanti! Le interazioni elettromagnetiche potevano essere 'semplificate' quelle forti no **un fatto che renderà tremendamente ardua la descrizione delle interazioni forti nel contesto delle teorie di campo quantizzato ad un punto tale che vennero di fatto abbandonate fino alla fine degli anni '60** quando vennero recuperate nella forma della **Cromodinamica Quantistica**.

L'inizio di questa 'cattività avignonese' data l'anno 1956 quando Gell-Mann propose di calcolare le grandezze fisicamente osservabili a partire da **relazioni di dispersione** rinunciando ad una qualunque sottostante teoria di campo (relazioni integrali, introdotte nell'ottica alla fine dell'800, per descrivere la dipendenza dell'indice di rifrazione del mezzo dalla frequenza della luce incidente. Una espressione concreta può essere ottenuta trattando la materia come un insieme di oscillatori, forzati dalla radiazione stessa. Negli anni '20 vennero dedotte da Kramers e Kronig a partire da proprietà molto generali).

Il programma si sviluppò attraverso i lavori di Mandelstam e di F. Chew giungendo ad individuare nella **Matrice S** (la matrice delle probabilità di tutti i processi possibili già introdotta da Heisenberg alla fine degli anni '30) ed in alcune sue proprietà del tutto generali (Lorentz-invarianza, unitarietà e analiticità) il punto di partenza della descrizione teorica. Ben lungi dall'essere solo di natura tecnica, **la contrapposizione MatriceS-TeorieDiCampo** aveva motivazioni molto profonde. Infatti, in accordo con il più netto positivismo, i sostenitori del programma

della matrice S ritenevano che la fisica dovesse basarsi solo su quantità direttamente misurabili (le probabilità dei processi appunto) escludendo sistematicamente grandezze fisiche non osservabili usate ampiamente – invece - nelle teorie di campo. L'approccio fondato sulla matrice S mantenne un sostanziale predominio nella trattazione delle interazioni forti fino alla fine degli anni '60, raggiungendo un grado di raffinatezza tecnica molto elevato e spiegando molte proprietà degli adroni.

Ad un certo punto però ci si rese conto che tale programma non era alternativo alla descrizione spazio-temporale delle teorie di campo, anzi poteva essere interpretato in termini spazio-temporali qualora si ammettesse che gli enti fondamentali non fossero punti (oggetti a zero dimensioni) ma stringhe (oggetti ad una dimensione): dunque i metodi della matrice S potevano essere riletti nei termini più fisici e diretti delle teorie di campo.

Nel 1964, M. Gell-Mann e G. Zweig introdussero il concetto di quark capace di ridurre l'impressionante numero di stati risonanti scoperti nel decennio precedente alla combinazione di tre sole particelle elementari: **esistevano dunque i costituenti elementari e le loro aggregazioni contrariamente ai metodi della matrice S che trattavano le particelle come dati di fatto senza tentare di indagarne la sottostruttura.** Alcune perplessità sul modello a quark permanevano perché certe particelle (Δ^{++}) **sembravano violare il principio di Pauli**, ma - nel 1965 - M.Han, Y, Nambu e O Greenberg dimostrarono che introducendo **la carica di colore** il problema poteva essere risolto.

Inoltre, sempre nel corso degli anni '60, si cominciò a comprendere più a fondo le potenzialità delle teorie di campo di

Yang e Mills e si capì che **potevano effettivamente spiegare le proprietà allora note delle interazioni forti.** In particolare si comprese gradatamente che risultava possibile spiegare due proprietà apparentemente inconciliabili delle interazioni forti: i) la forza tra quark aumenta mano a mano che aumenta la loro distanza (quasi si trattasse di una forza elastica) per cui i quark sono di fatto inseparabili o **'confinati'** all'interno dell'adrone (pur essendoci numerose indicazioni in tal senso una prova rigorosa che la QCD deve dare luogo al **confinamento** non è ancora oggi disponibile); ii) benchè confinati all'interno dell'adrone i quark – ad energie elevate – si comportano come se fossero quasi liberi (ovvero legati da forze molto deboli, come se fossero legati da forze elastiche), una proprietà indicata con il nome di **libertà asintotica**. Una prova rigorosa che la QCD dà luogo al fenomeno della libertà asintotica fu fornita da D. Politzer, F. Wilczek e D. Gross nel 1974. Il loro lavoro affermò definitivamente la QCD come teoria di riferimento delle interazioni forti.

I metodi della matrice S nell'ambito delle interazioni forti furono abbandonati ma non morirono poiché, nel 1974, J. Schwarz e J. Scherk scoprirono che il concetto di stringa poteva aprire una via verso la **gravitazione quantistica** dando inizio ad una delle aree più importanti ed attive della fisica teorica contemporanea.

Il modello standard

Cos'è il modello standard

La gran parte dei fatti sperimentali scoperti fino ad oggi sui costituenti ultimi della realtà fisica, le **particelle elementari** e le loro **interazioni**, sono descritti da un corpo di teorie che vanno a costituire una 'summa' indicata con il nome un poco anonimo di **Modello Standard** (Standard Model, SM).

Si ritiene che lo SM definisca un quadro di riferimento **stabile** ma **superabile** nel senso che potrà richiedere integrazioni ed ampliamenti ma non essere sovvertito. Nel linguaggio della **teoria dei campi quantizzati** (Quantum Field Theory, QFT, la teoria adeguata alla descrizione dei fenomeni relativistici e quantistici) esso precisa sia le particelle che le interazioni che stanno a fondamento di tutti gli enti fisici fino ad oggi noti. In questo senso è una nuova **teoria del tutto** (come altre ve ne sono state nella fisica. A fine '800 la teoria del tutto si scriveva in una pagina: equazioni meccaniche di Newton, gravitazione newtoniana, equazioni dell'elettromagnetismo di Maxwell, una certa confusione sui componenti basilari della materia).

Mentre il quadro delle particelle elementari è abbastanza in linea con le attuali conoscenze sperimentali (a questo riguardo vanno però ricordati gli interrogativi posti dalla massa ed energia oscura), quello delle interazioni è palesemente incompleto. Infatti delle quattro interazioni sperimentalmente note - **gravitazionale, debole, elettromagnetica e forte** – solo tre sono state descritte per mezzo di una teoria di campo quantizzato: le interazioni debole ed elettromagnetica nella **Teoria Elettrodebole** e l'interazione forte nella **Cromodinamica Quantistica**. La gravità ancora resiste e, con tutta probabilità, richiederà un nuovo tipo di descrizione (è questa incompletezza che rende lo SM del tutto inadeguato alla descrizione dei fenomeni alla scala di Planck $E \sim 10^{19}$ GeV che sebbene distantissimi dalla fisica degli acceleratori interessa invece la cosmologia).

La relazione tra lo SM e la ricerca nel campo della fisica delle particelle è oggi in una posizione singolare. Da un lato si stanno risolvendo gli ultimi problemi ancora aperti dello SM mentre dall'altro ci si dispone ad indagare ciò che lo SM non descrive. Questa particolare situazione storica giustifica la tendenza, oggi assai diffusa, di ripartire l'attività di ricerca sia sperimentale che teorica nelle due aree della **fisica del Modello Standard** e della **fisica oltre il Modello Standard**.

Per apprendere a fondo i contenuti del modello standard sarebbe necessario studiare, almeno nelle sue linee essenziali, il percorso sperimentale, teorico ed anche tecnologico che ha condotto alla sintesi finale in modo da porre le idee più importanti nel giusto risalto. Questa impostazione richiederebbe però molto più tempo e può essere seguita in misura molto limitata in un corso istituzionale di livello introduttivo tuttavia non rinunceremo a qualche accenno storico.

La posizione del Modello Standard nella fisica fondamentale

Quale posizione occupa il Modello Standard all'interno della fisica fondamentale. La fisica fondamentale ha compreso che non è possibile fornire definizioni omogenee e valide illimitatamente delle grandezze fisiche di base su cui vengono costruite le teorie fisiche specifiche delle diverse classi di fenomeni. Empiricamente e teoricamente emergono due

differenti domini nella distanza (alla scala dell'atomo dove comincia a valere la meccanica quantistica) e nella velocità (alla scala della velocità della luce c dove comincia a valere la teoria della relatività ristretta). Emergono così quattro domini caratterizzati da diverse definizioni dei concetti basilari di spazio (S), tempo (T), particella (P) e forza (F).

$R < 10^{-8}$ cm	ST	intervalli spaziali e temporali assoluti, soddisfano le trasf. di Galileo; leggi naturali che soddisfano il principio di relatività galileiano	ST	intervalli spaziali e temporali relativi ma spazio-temporali assoluti, soddisfano le trasf. di Lorentz; leggi naturali che soddisfano il principio di relatività
	P	ente descritto da una funzione d'onda $\Psi(\vec{r}, t)$ della quale è osservabile il modulo quadrato	P&F	viene superata la divisione classica degli enti fisici in particelle e forze. L'ente fondamentale è il campo quantizzato sia per le particelle che per i campi di forza. L'interazione altro non è che un processo locale e statistico di trasferimento di en. imp. etc. etc. tra i campi materiali ed i campi di forza. I quanti dei campi materiali si devono identificare con le particelle osservate quelli dei quanti di forza con nuove particelle associate alle interazioni.
	F	Le forze si rappresentano attraverso potenziali che operano sulla fase dell'onda		
$R > 10^{-8}$ cm	ST	intervalli spaziali e temporali assoluti, soddisfano le trasf. di Galileo; leggi naturali che soddisfano il principio di relatività galileiano	ST	intervalli spaziali e temporali relativi ma spazio-temporali assoluti, soddisfano le trasf. di Lorentz; leggi naturali che soddisfano il principio di relatività
	P	punto materiale classico con posizione spaziale e temporale definita descritta da $\vec{r}(t)$	P	punto materiale classico con posizione spaziale e temporale definita descritta da $\vec{r}(t)$
	F	azione a distanza; teorie di campo che violano il principio di relatività galileiano (etere meccanico)	F	teorie di campo che soddisfano il principio di relatività
$V \ll c$			$V \sim c$	

Sulle grandezze basilari della fisica vengono costruite le teorie del moto che governano l'evoluzione temporale dello stato delle particelle (MP) e dei campi di forze (MC). Le nozioni di particelle elementari (ovvero di particelle basilari ed indivisibili che aggregandosi danno luogo a tutta la materia osservata) e forze fondamentali (interazioni tra particelle con proprietà non riducibili

le une alle altre) è venuta precisandosi nel tempo ed hanno raggiunto un loro assetto definitivo con la formulazione del Modello Standard. Poiché compare nell'angolo estremo di questo schema la sua validità è del tutto generale, poiché esso enumera anche le particelle fondamentali, esso si pone a fondamento della intera realtà fisica.

R < 10⁻⁸ cm	MP	Equazione di Schroedinger		MP & MC	Teorie di campo quantizzato, equazioni di Schroedinger e Heisenberg		<div style="border: 1px solid red; padding: 5px; display: inline-block;"> Modello Standard + definizione dei campi materiali fondamentali </div>		
	MC	FG	non rilevante		FG	non esiste una teoria coerente della gravitazione			
		FD	Teorie fenomenologiche		FD	Teoria elettrodebole. Incorpora la Elettrodinamica Quantistica			
		FE	Elettromagnetismo classico		FE	Elettrodinamica Quantistica			
		FF	Teorie fenomenologiche		FF	Cromodinamica Quantistica			
R > 10⁻⁸ cm	MP	Il principio della dinamica		MP	Il principio della dinamica in forma covariante				
	MC	FG	Gravitazione Newtoniana. Azione a distanza, teoria ne di campo ne dinamica		MC	FG	Teoria della Relatività Generale. Teoria di campo in accordo con i concetti relativistici di spazio e tempo e con il principio di relatività		
		FD	assente macroscopicamente		FD	assente macroscopicamente			
		FE	Elettromagnetismo classico. Teoria di campo ma impossibile conciliare il principio di relatività galileiano con i concetti classici di spazio e tempo		FE	Elettromagnetismo. teoria di campo in accordo con i concetti relativistici di spazio e tempo e con il principio di relatività			
		FF	assente macroscopicamente		FF	assente macroscopicamente			
		V << c			V ~ c				

Il linguaggio del Modello Standard

Ogni teoria fisica si esprime nel contesto di un preciso apparato concettuale e formale: il moto dei corpi materiali macroscopici ($r \gg 10^{-8} \text{cm}$) a bassa velocità ($v \ll c$) in quello della meccanica newtoniana; il moto dei corpi materiali microscopici ($r < 10^{-8} \text{cm}$) a bassa velocità ($v \ll c$) in quello della meccanica quantistica; il moto dei corpi macroscopici ($r \gg 10^{-8} \text{cm}$) ad alta velocità ($v \sim c$) in quello della relatività; infine il moto dei corpi microscopici ($r < 10^{-8} \text{cm}$) ad alta velocità ($v \sim c$) in quello della **teoria dei campi quantistici (QFT)**, sintesi della teoria della relatività e della meccanica quantistica. In essa trovano il loro corretto significato i concetti, altrimenti vaghi, di **particella** ed **interazione** a queste scale di distanza e velocità.

**il concetto di campo
e la relazione
campo-particella**

Premesso che ripareremo delle QFT più avanti, possiamo per ora pensare come una evoluzione delle teorie di campo classico dove, al livello fondamentale, si pone il concetto di **campo**, un ente fisico definito su di una porzione più o meno vasta di spazio e variabile con il tempo, descritto da un ente matematico funzione della posizione e del tempo. A differenza del campo classico macroscopico però, si è trovato che il campo in ambito microscopico deve essere *'quantizzato'* il che comporta, tra le altre cose, che la *energia, l'impulso ed ogni altra grandezza dinamica* che il *campo possiede* (che risiede nei suoi modi) o *scambia* (con altri campi) non assumano valori continui ma discreti e non divisibili dette **quanti**, veri e propri *'atomi'* del campo (ad esempio, le frazioni di energia ed impulso di un quanto di dato periodo e lunghezza d'onda sono calcolabili con le relazioni di Einstein De-Broglie $E = \hbar\omega, \vec{p} = \hbar\vec{k}$ $\hbar = 1.05 \times 10^{-34} \text{Js}$). Poiché si trova che in ambito quantistico-relativistico il campo debba essere associato sia alle particelle materiali che ai campi di forza, ne risulta che ciò che chiamiamo **particelle** e che vengono registrate dai nostri rivelatori debbano essere identificate con i **quanti** dei campi materiali o dei campi di forza. Sulla base di questa impostazione **le particelle perdono il loro carattere fondamentale** riducendosi a semplici **manifestazioni del campo** (nonostante i termini usati, quando si descrive il MS si elencano i campi fondamentali non le particelle fondamentali).

**l'accoppiamento tra
campi**

Per quale motivo un campo A modifica il proprio stato? Per un solo motivo, a causa dell'**accoppiamento**, descritto da un parametro detto **carica**, con un altro campo B che occupa la stessa porzione di spazio. In questa situazione, l'idea è che, in un certo punto dello spazio, esista una probabilità definita (sostanzialmente descritta dalla carica) che i due campi si scambino un quanto di energia, impulso etc. etc. attraverso un **processo di natura statistica** che rispetta le **leggi generali di conservazione** della carica, energia, impulso etc. etc. Dunque l'accoppiamento tra i campi A e B si manifesta attraverso lo scambio di uno o più quanti. Nel momento in cui si cerca di collocare in questo schema un qualunque processo reale sorge però un delicato problema!

il problema della conservazione della energia e dell'impulso per campi accoppiati

Per vederlo immaginiamo che un elettrone viaggi nello spazio interagendo con un campo elettromagnetico. Nello schema suddetto dovremmo allora dire che: i) esistono un campo elettronico ed un campo elettromagnetico accoppiati dalla carica elettrica dell'elettrone; ii) il campo elettronico non è vuoto ma eccitato con un quanto (l'elettrone che viaggia prima della interazione); iii) in un certo punto il campo elettronico cede (o acquisisce) un quanto al (dal) campo elettromagnetico; iv) nel campo elettronico continua ad essersi un quanto (l'elettrone che viaggia dopo la interazione). E' facile mostrare che un simile processo **viola la conservazione della energia e dell'impulso** poiché non è possibile che un elettrone irradia qualcosa rimanendo un elettrone (ritorneremo su questo punto con maggior dettaglio).

Voi potreste osservare che la stessa difficoltà si pone indipendentemente dalla quantizzazione del campo e dunque anche nell'elettromagnetismo classico. Avete ragione! Ma non dovete dimenticare che classicamente la carica irradia il campo in modo continuo per cui la violazione delle leggi di conservazione è sempre 'infinitesima' e dunque il processo di irradiazione può alla fine avvenire. Il problema sorge invece con i campi quantizzati poiché, nello scambio di un quanto, la violazione delle leggi di conservazione non è infinitesima ma finita, per cui il processo viene *inibito* dalle leggi di conservazione.

il ruolo del principio di indeterminazione

Se i fatti fossero solo questi, dovremmo concludere che il modello di accoppiamento tra campi capace di spiegare i fenomeni classici deve essere rigettato nel caso dei fenomeni quantistici poiché incapace di rendere conto degli scambi di energia che pure esistono e vengono osservati. A questo punto la meccanica quantistica interviene in modo risolutivo poiché decreta che a causa delle *fluttuazioni quantistiche*, entro intervalli spaziali e temporali definiti e stimabili, ad esempio, attraverso il principio di indeterminazione (torneremo su questo punto), sono possibili violazioni nella conservazione della energia e dell'impulso.

Tornando al nostro esempio, possiamo allora pensare che lo scambio di quanti tra il campo elettronico e quello elettromagnetico (che è causato dalla carica elettrica) non sia inibito in assoluto ma piuttosto possa avvenire entro gli intervalli spaziali e temporali stabiliti dal principio di indeterminazione. Dunque, nel campo elettromagnetico, possono essere immessi quanti la cui esistenza è transitoria e soggetta alle restrizioni del principio di indeterminazione.

quanti virtuali e quanti reali

I quanti di un campo che si trovano in questo **stato transitorio la cui esistenza è limitata dal principio di indeterminazione** prendono il nome di **quanti virtuali**.

Tornando all'esempio, notiamo che l'esistenza dell'elettrone, invece, non è soggetta ad alcuna restrizione di natura spaziale o temporale per cui l'elettrone esiste nel senso cui solitamente attribuiamo a questa parola.

**quanti virtuali e
particelle isolate**

I quanti di un campo che si trovano in uno stato che può esistere senza alcuna limitazione prendono il nome di **quanti reali**.

Che fine fanno questi quanti virtuali con lo spazio ed il tempo contati?

Tornando all'esempio, se nei paraggi dell'elettrone non c'è nulla tale quanto deve per forza essere riassorbito dall'elettrone emittente, un fatto che ci costringe ad ammettere che un semplice elettrone isolato emette e riassume continuamente quanti virtuali del campo elettromagnetico con cui è accoppiato.

Si capisce bene che tale fatto deve essere vero per qualunque tipo di interazione per cui una **particella isolata** è un qualcosa che comprende tutti i processi di emissione e riassorbimento dei quanti virtuali dei campi con cui è accoppiata ovvero delle interazioni cui è soggetta!

**quanti virtuali e
particelle interagenti**

Se il campo elettronico anziché essere eccitato con un solo quanto fosse eccitato con due quanti per cui gli elettroni in circolazione fossero due, allora il quanto virtuale potrebbe essere assorbito da questo secondo elettrone che riceverebbe le frazioni di energia, quantità di moto, etc. etc. che il primo elettrone vi aveva immesso realizzando in questo modo ciò che chiamiamo interazione tra i due elettroni.

Abbiamo allora un meccanismo del tutto generale secondo il quale **l'interazione tra particelle (quanti reali del campo A) è l'effetto dello scambio di quanti virtuali del campo B cui sono accoppiate**.

A tutt'oggi questo è il modello di interazione più avanzato che la fisica possiede! Storicamente tutto ciò (e molte altre cose di cui parleremo più avanti) si chiarì con la formulazione della QED sul finire degli anni '40 da parte soprattutto di Feynman, Schwinger, Tomonaga e Dyson.

le teorie di gauge

Questo meccanismo di base, sufficiente per accogliere la fenomenologia delle interazioni elettromagnetiche, non riusciva però a descrivere tutte le proprietà delle forze deboli e forti quali si vennero manifestando (ed alle quali accenneremo in seguito). Il passo decisivo fu compiuto - ma lo si capì solo 10 anni dopo - da Yang e Mills nel 1954 quando proposero una estensione della QED basata sulla estensione del concetto di carica elettrica. Furono introdotte in questo modo le cosiddette **teorie di campo quantizzato di Yang e Mills** o **teorie di gauge**, una classe di teorie sufficientemente ampia da descrivere, ad eccezione della gravitazione, tutte le forze naturali note.

All'interno dell'elettromagnetismo vi è una simmetria che rimane valida anche nel caso quantistico. Si tratta della simmetria rispetto a trasformazioni di gauge la quale, rovesciando l'intera logica, può essere assunta come punto di partenza per costruire l'elettromagnetismo. In questo modo, una teoria dinamica può essere dedotta a partire da un principio di simmetria, una impostazione assai vantaggiosa soprattutto se si è interessati ad estendere o generalizzare una teoria.

gli stati interni di carica delle particelle

In effetti è stata proprio una estensione del concetto di trasformazione di gauge che ha permesso a Yang e Mills di costruire teorie dinamicamente consistenti che generalizzano l'elettromagnetismo. Non potendo seguire questa strada ci accontenteremo di capire qualcosa per mezzo di un approccio più diretto ponendo la seguente domanda.

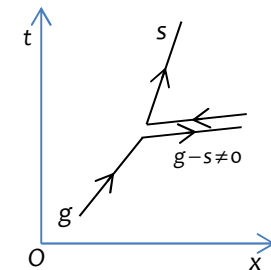
E' possibile costruire una teoria che abbia la stessa struttura dell'elettromagnetismo, dunque con una carica elettrica conservata, dove i campi gioco anziché essere elettricamente neutri siano elettricamente carichi?

Proviamo ancora una volta a pensare ad un elettrone che irradia un campo elettromagnetico (processo classico) o quanti del campo elettromagnetico (processo quantistico). Dato che: i) l'elettrone iniziale (prima dell'irradiazione) e finale (dopo la irradiazione) devono avere la stessa carica elettrica; ii) la carica elettrica si conserva; ne consegue che il campo irradiato ed i suoi quanti devono per forza essere privi di carica elettrica ovvero neutri. Non sembrano esserci possibilità di aggirare questo fatto a meno che non si ammetta che la particella irradiante possa esistere in **due diversi stati di carica** che possiamo chiamare giù (g) e su (s) sempre soggette a regole di conservazione. Infatti, in questo modo, l'irradiazione potrebbe portare la carica da (g) ad (s) irradiando un quanto che preleva (g) e porta (s) (le cariche sono conservate) che è carico se (g) ed (s) sono diverse.

La cosa potrebbe funzionare, ma cosa significa che la particella esiste in due stati di carica? Significa che non è più sufficiente, come nel caso dell'elettromagnetismo, il semplice numero +1 (in unità di carica dell'elettrone) per definire la carica della particella ma sono necessari due diversi numeri: +1 per la carica su e +1 per la carica giù. In termini algebrici si passa dai numeri o scalari nello spazio delle cariche a vettori a due componenti nello spazio delle cariche i quali, come sempre in meccanica quantistica, dovranno essere pensati in campo complesso. Dunque, la strada per ottenere teorie con campi carichi sembra essere quella di estendere il concetto di carica introducendo l'inedito concetto di **stati di carica di una particella disposti nelle componenti di un vettore complesso di N componenti nello spazio delle cariche.**

le necessarie simmetrie negli spazi di carica

In accordo con i principi generali della meccanica **quantistica ciò che è osservabile non è la funzione d'onda ma il suo modulo quadrato.** Ciò comporta che la moltiplicazione della



funzione d'onda per un numero a tale che $|a|^2 = 1$ non può produrre alcun effetto fisico per cui la teoria deve essere simmetrica rispetto alla moltiplicazione della funzione d'onda per numeri complessi di modulo unitario. La descrizione degli stati di carica con un vettore complesso di N complica un poco l'espressione di questa proprietà della meccanica quantistica. Infatti, ora le funzioni d'onda possiedono una struttura vettoriale nello spazio N dimensionale delle cariche per cui la trasformazione non è più una rimoltiplicazione per un numero complesso a bensì una trasformazione lineare T di un vettore di N componenti nello spazio complesso della cariche. Poiché l'osservabile è il modulo quadrato della funzione d'onda, dovremo richiedere che le trasformazioni che lo lasciano inalterato non possano avere alcun effetto fisico per cui $\vec{\psi}'^* \vec{\psi}' = T^* \vec{\psi}^* T \vec{\psi} = \vec{\psi}^* T^+ T \vec{\psi} = \vec{\psi}^* \vec{\psi}$ se $T^+ T = I$. Ciò significa che **la teoria deve essere simmetrica rispetto al gruppo di trasformazioni unitarie ed unimodulari** (così da includere la trasformazione identità) **nello spazio complesso delle cariche a d N dimensioni**, un gruppo di trasformazioni indicato con **$SU(N)$** . Il punto importante è che questo requisito di simmetria, che si origina dai principi generali della meccanica quantistica, risulta determinante nello stabilire la struttura della teoria di gauge per cui, assai spesso, si nomina la particolare teoria di gauge facendo riferimento proprio al gruppo di trasformazioni unitarie e unimodulari su cui viene costruita.

**gli stati di carica interni
dei campi**

Con tutta evidenza, in una teoria dove le particelle spessissimo possiedono più stati di carica sono possibili anche i campi devono possedere più stati di carica. Tornando al caso delle due cariche (s) e (g) abbiamo un campo di carica (g - s) quando una carica (g) si trasforma in (s), una carica (s - g) quando una carica (s) si trasforma in (g), una carica nulla quando (s) si trasforma in (s) ed una carica nulla quando (g) si trasforma in (g). Dunque, due campi carichi e due campi neutri. E' facile capire che nel caso di N stati di carica differenti avremo N^2 campi di cui N neutri e (N^2-N) carichi. Imponendo al processo di irradiazione altre condizioni richieste dai dati sperimentali che per ora non discutiamo, si trova che uno dei campi neutri va eliminato per cui **una teoria di gauge con N stati di carica, ammette N^2-1 campi di gauge con diversi stati di carica di cui (N^2-N) carichi ed $N-1$ neutri**. Da questo punto di vista, l'elettromagnetismo è la più semplice tra le teorie di gauge prevedendo un solo stato di carica, essendo quindi costruita sul **gruppo di simmetria $SU(1)=U(1)$** e prevedendo un solo campo di gauge, quello elettromagnetico.

**le proprietà dei campi
di gauge**

Dal punto di vista cinematico i campi di gauge sono del tutto simili ai campi dell'elettromagnetismo. E' infatti possibile mostrare che devono **propagarsi con velocità c** per cui i loro quanti, come i fotoni, **non possiedono massa a riposo** e danno luogo ad una interazione la cui **intensità decresce con la legge $1/r^2$** . La grande differenza risiede nella dinamica. Infatti, il fatto che i campi di gauge siano in generale carichi comporta che **possano interagire tra loro** dando luogo a fenomeni sconosciuti all'elettromagnetismo.

una nota di storia

Si tratta della parte più complessa della teoria ma anche della più interessante poiché è attraverso di essa che risulta possibile comprendere fenomeni assenti nell'elettromagnetismo ma presenti nelle interazioni deboli e forti.

L'iniziale formulazione delle teorie di gauge da parte di Yang e Mills nel 1954 non ebbe alcun impatto. Si riteneva fossero poco più che un esercizio accademico poiché, come lo stesso Pauli sottolineò, il fatto che i campi di gauge dessero luogo ad interazioni del tipo $1/r^2$ escludeva potessero spiegare le interazioni forti e deboli (questo lo aggiungiamo noi) che invece era noto fossero a corto raggio. A quel tempo la complessa fenomenologia delle interazioni forti e deboli aveva convinto molti fisici che si dovesse addirittura cambiare tipo di descrizione rinunciando alle teorie di campo quantizzato. L'inizio di questa fase data l'anno 1956 quando Gell-Mann propose di calcolare le grandezze fisicamente osservabili a partire da **relazioni di dispersione** rinunciando ad una qualunque sottostante teoria di campo (relazioni integrali, introdotte nell'ottica alla fine dell'800, per descrivere la dipendenza dell'indice di rifrazione del mezzo dalla frequenza della luce incidente. Una espressione concreta può essere ottenuta trattando la materia come un insieme di oscillatori, forzati dalla radiazione stessa. Negli anni '20 vennero dedotte da Kramers e Kronig a partire da proprietà molto generali).

Il programma si sviluppò attraverso i lavori di Mandelstam e di F. Chew giungendo ad individuare nella **Matrice S** (la matrice delle probabilità di tutti i processi possibili già introdotta da Heisenberg alla fine degli anni '30) ed in alcune sue proprietà del tutto generali (Lorentz-invarianza, unitarietà e analiticità) il punto di partenza della descrizione teorica. Ben lungi dall'essere solo di natura tecnica, **la contrapposizione MatriceS-TeorieDiCampo** aveva motivazioni molto profonde. Infatti, in accordo con il più netto positivismo, i sostenitori del programma della matrice S ritenevano che la fisica dovesse basarsi solo su quantità direttamente misurabili (le probabilità dei processi appunto) escludendo sistematicamente quelle grandezze fisiche non osservabili cui facevano ampiamente ricorso le teorie di campo. L'approccio fondato sulla matrice S mantenne un sostanziale predominio nella trattazione delle interazioni forti fino alla fine degli anni '60, raggiungendo un grado di raffinatezza tecnica molto elevato e spiegando molte proprietà degli adroni.

Ad un certo punto però ci si rese conto che **il programma della matrice S non era alternativo alla descrizione spazio-temporale delle teorie di campo, anzi poteva essere interpretato in termini spazio-temporali qualora si ammettesse che gli enti fondamentali non fossero punti** (oggetti a zero dimensioni) **ma stringhe** (oggetti ad una dimensione): dunque i metodi della matrice S potevano essere rilette nei termini più fisici e diretti delle teorie di campo.

Nel 1964, M. Gell-Mann e G. Zweig introdussero il concetto di quark capace di ridurre l'impressionante numero di stati risonanti scoperti nel decennio precedente alla combinazione di tre sole particelle elementari: **esistevano dunque i costituenti elementari e le loro aggregazioni contrariamente ai metodi della matrice S che trattavano le particelle come dati di fatto senza tentare di indagarne la sottostruttura.** Alcune perplessità sul modello a quark permanevano perché certe particelle (Δ^{++}) **sembravano violare il principio di Pauli**, ma - nel 1965 - M. Han, Y. Nambu e O. Greenberg dimostrarono che introducendo **la carica di colore** il problema poteva essere risolto.

Inoltre, sempre nel corso degli anni '60, si cominciò a comprendere più a fondo le potenzialità delle teorie di campo di **Yang e Mills** e si capì che **potevano effettivamente spiegare le proprietà allora note delle interazioni forti.** In particolare si comprese gradatamente che risultava possibile spiegare due proprietà apparentemente inconciliabili delle interazioni forti: i) la forza tra quark aumenta mano a mano che aumenta la loro distanza (quasi si trattasse di una forza elastica) per cui i quark sono di fatto inseparabili o **'confinati'** all'interno dell'adrone (pur essendoci numerose indicazioni in tal senso una prova rigorosa che la QCD deve dare luogo al **confinamento** non è ancora oggi disponibile); ii) benchè confinati all'interno dell'adrone i quark - ad energie elevate - si comportano come se fossero quasi liberi (ovvero legati da forze molto deboli, come se fossero legati da forze elastiche), una proprietà indicata con il nome di **libertà asintotica.** Una prova rigorosa che la QCD dà luogo al fenomeno della libertà asintotica fu fornita da D. Politzer, F. Wilczek e D. Gross nel 1974. Il loro lavoro affermò definitivamente la QCD come teoria di riferimento delle interazioni forti.

I metodi della matrice S nell'ambito delle interazioni forti furono abbandonati ma non morirono poiché, nel 1974, J. Schwarz e J. Scherk scoprirono che il concetto di stringa poteva aprire una via verso la **gravitazione quantistica** dando inizio ad una delle aree più importanti ed attive della fisica teorica contemporanea.

Uno sguardo al Modello Standard

Le prime particelle che furono scoperte erano, ovviamente, i costituenti degli atomi della *materia ordinaria*: l'*elettrone*, il *neutrone* ed il *protone*. Mentre l'*elettrone* (*e*) ha fino ad oggi mantenuto il suo 'status' di particella elementare, la formulazione del modello a quark a metà degli anni '60 da parte di M. Gell-Mann e G. Zweig ha chiarito che protoni e neutroni non sono elementari ma composti da due tipi di particelle, dette **quark up** (**u**) e **quark down** (**d**), che attualmente si ritiene siano elementari. Le ricerche, prima con i raggi cosmici e poi, soprattutto, con macchine acceleratrici di energia via via crescente, hanno condotto alla scoperta di nuove particelle elementari, perlopiù instabili, che non sono costituenti della materia ordinaria (la particelle costituenti la materia ordinaria sono indicate in rosso). Oggi la lista prevede **dodici particelle elementari** di diverso 'tipo', osservabili come **particelle libere** (ad eccezione dei quark che sono 'confinati' permanentemente all'interno degli adroni), aventi tutte **spin $s=1/2\hbar$** (i sistemi di particelle materiali identiche sono governati dalla **statistica di Fermi-Dirac**), aventi certe determinate masse (che forniremo tra poco), e quasi tutte **instabili**

le dodici particelle materiali

particelle materiali											
ν_e	ν_μ	ν_τ	<i>e</i>	μ	τ	<i>u</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>s</i>	<i>t</i>	<i>b</i>

Premesso che forniremo altre proprietà nel seguito, l'insieme delle particelle elementari è formato da tre diversi 'tipi' di neutrini, detti *neutrino elettronico*, *neutrino muonico* e *neutrino tauonico* (tutti sostanzialmente stabili); l'*elettrone* (stabile), il *muone* (instabile) ed il *tau* (instabile), che hanno proprietà simili ma masse assai differenti; poi sei 'tipi' di quark detti *up*, *down*, *charm*, *strange*, *top* e *bottom* (instabili ad eccezione dei primi due).

La scoperta delle nuove particelle elementari è proceduta di pari passo con la scoperta di corrispondenti antiparticelle elementari, aventi spin e masse uguali a quelle delle rispettive particelle, ma differenti da queste per certe *proprietà interne* (di cui diremo tra poco). La replicazione delle particelle in corrispondenti antiparticelle è risultata in pieno accordo con le previsioni delle teorie di campo quantizzato. Oggi la lista prevede **dodici antiparticelle elementari** di diverso 'tipo', osservabili come **particelle libere** (ad eccezione degli antiquark), aventi tutte **spin $s=1/2\hbar$** (i sistemi di antiparticelle materiali identiche sono governati dalla **statistica di Fermi-Dirac**), aventi le stesse masse e stabilità/instabilità delle corrispondenti particelle

le dodici antiparticelle materiali

antiparticelle materiali											
$\bar{\nu}_e$	$\bar{\nu}_\mu$	$\bar{\nu}_\tau$	\bar{e}	$\bar{\mu}$	$\bar{\tau}$	\bar{u}	\bar{d}	\bar{c}	\bar{s}	\bar{t}	\bar{b}

le masse delle particelle ed antiparticelle

Le **masse** coprono un intervallo di valori enorme che si estende attraverso 11 ordini di grandezza: dai neutrini con masse dell'ordine dell'eV, fino al quark top con una massa di ben 180 GeV. Il modello standard assume le masse delle particelle elementari come parametri esterni e non è in grado di fornire alcuna spiegazione di una tale dispersione dei loro valori. Nella tabella sono riportati i valori delle masse delle particelle/antiparticelle elementari osservate libere, ad eccezione dei quark dei quali riportiamo le cosiddette masse costituenti, vale a dire le masse con cui partecipano alla formazione degli adroni all'interno dei quali sono confinati (le masse costituenti comprendono anche l'inerzia dovuta alle interazioni forti).

le masse di particelle ed antiparticelle (MeV)											
ν_e	ν_μ	ν_τ	e	μ	τ	u	d	c	s	t	b
$<2 \times 10^{-6}$	<0.19	<18.2	0.51	106	1770	350	350	1500	500	180000	4500

i numeri quantici di sapore

Dobbiamo ora precisare meglio cosa si intenda con 'tipo' di particella. A questo proposito si deve sottolineare che, a differenza degli oggetti macroscopici, non abbiamo alcuna percezione diretta delle particelle elementari: le loro proprietà sono sempre relative ai processi cui prendono parte che sono ciò che effettivamente osserviamo e misuriamo. Data questa situazione è inevitabile una **classificazione dinamica** fondata sui processi per cui due particelle sono dello stesso 'tipo' se danno luogo agli stessi processi mentre sono di 'tipo' diverso in caso contrario. Nello SM i diversi 'tipi' di particelle sono descritti per mezzo di opportuni *numeri quantici interni* (ovvero di natura non cinematica) detti **numeri quantici di sapore** (o *flavour quantum numbers*). E' bene precisare che la differenza tra i diversi sapori va oltre la semplice differenza delle masse, essa è una differenza intrinseca fondata sul fatto che tali sapori danno luogo a processi diversi e distinguibili tra loro. Premesso che sono le interazioni e le loro proprietà che suggeriscono le assegnazioni più razionali dei numeri quantici di sapore per ora possiamo identificare tali numeri quantici con i nomi che abbiamo associato alle diverse particelle. Come vedremo, le proprietà delle interazioni suggeriscono di assumere i **numeri quantici di sapore delle antiparticelle** opposti a quelli delle particelle.

le interazioni del modello standard

Le interazioni rappresentano la parte più complessa ed articolata dello SM il quale, nel suo attuale assetto, comprende la descrizione teorica di tre delle quattro interazioni naturali fino ad oggi note: **l'interazione debole**, **l'interazione elettromagnetica** e **l'interazione forte** (come già ricordato risulta esclusa l'interazione gravitazionale). E' della massima importanza il fatto che tali interazioni siano tutte descritte nel contesto di uno stesso linguaggio, quello delle teorie di campo quantizzato nella forma di **teorie di gauge**.

Si assume allora che le particelle di diverso sapore possedano specifiche **cariche di gauge** che determinano l'accoppiamento con famiglie di **campi di gauge** i quali, attraverso i meccanismi richiamati nel precedente paragrafo, causano la loro mutua interazione. Ovviamente l'assegnazione delle cariche di gauge ai diversi sapori non può che essere dettata dai fatti sperimentali.

le interazioni forti

Le forze più intense sono le **interazioni forti** che interessano solo i sei quark (ed antiquark). Questo fatto determina l'ovvia ripartizione delle particelle elementari nelle due grandi famiglie dei **leptoni (antileptoni)**, particelle non soggette alla interazione forte, e dei **quark (antiquark)**, particelle fortemente interagenti.

leptoni						quark					
ν_e	ν_μ	ν_τ	e	μ	τ	u	d	c	s	t	b

Un certo numero di fatti sperimentali porta alla conclusione che ciascun sapore di quark debba esistere in tre differenti stati di 'carica forte' o **carica di colore**. In altri termini ciascun sapore di quark possiede **tre cariche di gauge** ($N=3$) per cui risulta accoppiato ad **otto campi di gauge** ($N^2-1=8$), detti anche **campi gluonici**, portatori loro stessi di carica di colore e quindi autointeragenti. La teoria dei gauge delle interazioni forti viene detta **Cromodinamica quantistica** e si ritiene che essa possa spiegare il fenomeno del **confinamento** il quale consiste nel fatto che, a tutt'oggi, non sono mai stati osservati quark liberi ma solo legati in composti di **colore complessivo nullo** genericamente chiamati **adroni** nelle forme **quark-antiquark**, dette **mesoni** o **quark-quark-quark** e **antiquark-antiquark-antiquark** dette rispettivamente **barioni** e **antibarioni**. La neutralità della carica di colore degli adroni determina il rapido decadimento con la distanza della interazione forte all'esterno di essi e con questo il suo carattere a **corto raggio d'azione** ben noto dalla fisica nucleare (si ricordi che neutroni e protoni sono barioni).

le interazioni deboli

Consideriamo ora le **interazioni deboli**. Al contrario delle interazioni forti queste interessano tutte le particelle elementari sia leptoni che quark (e ovviamente antileptoni e antiquark). I dati sperimentali conducono rapidamente a concludere che debbano esistere due differenti stati di 'carica debole' o **carica di isospin debole** che devono essere identificate con le seguenti coppie di particelle disposte in colonna.

leptoni			quark		
ν_e	ν_μ	ν_τ	u	c	t
e	μ	τ	d	s	b

In altri termini ciascuna coppia di particelle è portatrice delle due **cariche di gauge** ($N=2$) della interazione debole che determinano l'accoppiamento a **tre campi di gauge** ($N^2-1=3$) indicati con i simboli W^+ , W^- e Z_0 . A differenza dei campi gluonici, tali campi sono massivi e determinano sia il carattere a cortissimo raggio d'azione della interazione debole che la sua ridotta intensità (i meccanismi che determinano il carattere a corto raggio delle interazioni forti e deboli sono quindi assai diversi). Se non fosse per la massa dei campi W^+ , W^- e Z_0 l'interazione debole avrebbe una intensità comparabile alla **interazione elettromagnetica** che possiede solo **una carica di gauge**, la carica elettrica, che stabilisce l'accoppiamento con un solo **campo di gauge**, il campo elettromagnetico indicato con il simbolo γ . In effetti è proprio seguendo questa idea che si giunge a costruire una **teoria unificata delle interazioni deboli ed elettromagnetiche** fondata su di un solo accoppiamento fondamentale.

Da parte loro, i campi W^+ , W^- e Z_0 , così come i campi elettromagnetici e gluonici, non sono massivi alla origine ed acquisiscono una massa efficace a causa dell'accoppiamento con un campo non nullo su tutto lo spazio detto **campo di Higgs**. Nelle sue linee essenziali queste sono le parti che costituiscono la teoria di gauge unificata delle interazioni elettromagnetiche e deboli, la teoria elettrodebole.

Un quadro riassuntivo dei campi di gauge accoppiati alle particelle materiali è mostrato nella tabella sottostante.

interazione	campo di gauge	accoppiato a
forte	$g_1 \dots g_8$	cariche di colore
elettrodebole	$W^+W^-Z_0$	isospin debole
	γ	carica elettrica

H	$W^+W^-Z_0$ particelle materiali
---	-------------------------------------

i parametri dello SM

Lo SM è in sintesi la teoria delle forze deboli elettromagnetiche e forti di 48 particelle materiali (6 leptoni, 6 antileptoni, $6 \times 3 = 18$ quark colorati, $6 \times 3 = 18$ antiquark colorati) assunte come puntiformi che si propone di spiegare una classe di fenomeni immensa: la quasi totalità dei fenomeni microscopici fondamentali. Non deve sorprendere quindi che sia piuttosto cospicuo il numero di **parametri** che è necessario immettere nella teoria per renderla predittiva. Tra questi i più semplici da comprendere sono le masse delle particelle fondamentali.

Dato che si ritiene che – fissato il tipo di quark – le masse che competono ai differenti colori siano esattamente uguali e che identiche siano pure le masse delle particelle con le corrispondenti antiparticelle, giungiamo alla conclusione devono essere definite **12 masse**.

Per quanto riguarda le interazioni abbiamo la seguente situazione. Le interazioni forti richiedono la **costante di accoppiamento α_s** (gli 8 gluoni sono assunti a massa nulla). L'interazione elettromagnetica la **costante di accoppiamento α** nota anche come costante di struttura fina (il fotone è assunto a massa nulla). L'interazione debole, invece, richiede la **costante di accoppiamento di Fermi G_F** , la **massa del mediatore Z_0** e la **massa del bosone di Higgs**. Ricordando poi che le interazioni deboli sono 'oblique' rispetto alle generazioni di quark (matrice CKM) dobbiamo aggiungere altri **4 parametri**.

Il modello standard richiede in totale 21 parametri e con essi spiega l'immensa mole di dati raccolti in oltre 60 anni di esperimenti sulle macchine acceleratrici.

Bisogna però tenere conto che nell'ultimo decennio informazioni sempre più rilevanti sulle particelle provengono dalla **cosmologia osservativa** che già oggi lascia emergere sostanziali incompletezze del MS. I due grandi problemi riguardano **la materia oscura** e **la energia oscura** dovute certamente a particelle e campi non compresi nel MS. Dato che questi contribuiscono rispettivamente con il 23% e il 72% alla densità di massa ed energia del cosmo osservabile per un totale del 95%, mentre solo al 5% ammonta il contributo della materia ordinaria, comprendiamo l'entità delle novità che in un prossimo futuro dovrebbero interessare il MS.

Le interazioni forti

la forza forte non dipende dalla carica elettrica

Il primo che intuì **l'esistenza della forza forte** fu Rutherford il quale, avendo chiarito la struttura dell'atomo, comprese che protoni e neutroni potevano coesistere in una struttura compatta come il nucleo solo postulando l'esistenza di una forza di natura attrattiva più intensa di quella coulombiana repulsiva dei protoni.

Una proprietà della interazione forte che Heisenberg e Majorana (1932) compresero sin dall'inizio riguardava la sostanziale coincidenza della intensità della forza forte che si esercitava tra le coppie neutrone-neutrone, neutrone-protone, protone-protone, un fatto che mostrava **che l'interazione forte era indipendente dalla carica elettrica**. Dato che neutrone e protone avevano approssimativamente la stessa massa, Heisenberg e Majorana proposero che, dal punto di vista delle interazioni forti, neutrone e protone potevano essere descritti come due stati interni differenti della stessa particella che chiamarono **nucleone**. Data la sua analogia formale con lo spin, i numeri quantici interni necessari per descrivere tali stati interni vennero detti **isospin** (nome proposto da Wigner nel 1936).

non tutte le particelle interagiscono fortemente

Una idea allora quasi implicita era che l'elettrone che sentiva la carica elettrica dei protoni nucleari non sentisse, invece, la loro 'carica forte'. Ciò voleva dire che l'elettrone, a differenza dei protoni e dei neutroni, non era una particella capace di interagire fortemente il che significava che **solo certe particelle sono capaci di interagire fortemente**. In questo modo si introduceva l'attuale distinzione in particelle fortemente interagenti dette **adroni** (dal greco adros=forte) e particelle non fortemente interagenti dette **leptoni** (dal greco leptos=leggero poiché solitamente più leggeri degli adroni).

Nei decenni seguenti le macchine acceleratrici studiarono a fondo le proprietà della interazione forte che si manifestarono con una fenomenologia molto complessa che resistette per lungo tempo ad ogni tentativo di inquadramento teorico.

la forza forte tra nucleoni

Attraverso esperimenti di diffusione di protoni non troppo energetici su bersagli materiali, risulta possibile sondare **l'andamento spaziale della forza forte** che si trova essere molto complesso: al di sotto di 0.7 fm la forza è repulsiva, oltre i 0.7 fm diventa attrattiva per raggiungere il massimo a circa 1 fm dopodiché diminuisce esponenzialmente fino ad esaurirsi a circa 2 fm. Possiede inoltre componenti sia centrali che non centrali (dette tensoriali) dipendenti dall'allineamento relativo degli spin.

la produzione di adroni instabili

Salendo in energia, la collisione di protoni con bersagli comincia a dare luogo a particelle non presenti nello stato iniziale (protone collidente e bersaglio materiale) fino a giungere **alla produzione di una vasta tipologia di 'particelle' dalla brevissima vita media (dell'ordine di $10^{-22}s$ o anche più)**, dette **risonanze**, che decadono, via interazione forte, in particelle più leggere, sempre instabili, che a loro volta decadono, via interazione forte, in un insieme definito ma molto numeroso di **diverse tipologie di particelle 'quasi stabili'** con vite medie dai 10^{-8} ai $10^{-12}s$.

	<p>Con la costruzione di acceleratori di energia via via crescente, il numero e la tipologia di questi stati fortemente interagenti instabili e quasi stabili crebbe rapidamente superando il centinaio ed originando quel fenomeno piuttosto sconcertante ricordato con il nome di ‘proliferazione degli adroni’. Tale fenomeno caratterizzava la sola interazione forte poiché non si osservò una corrispondente proliferazione dei leptoni i quali, invece, si manifestavano in un numero molto limitato di differenti tipi particelle (maggiori dettagli li daremo parlando delle interazioni deboli).</p>
<p>alcune proprietà degli adroni osservati</p>	<p>Naturalmente, le proprietà di questi adroni instabili e quasi stabili furono studiate con grande dettaglio misurando spin, masse, modi decadimento, tempi di decadimento etc. etc. Si tratta di un lavoro monumentale durato decine d’anni che qui non possiamo richiamare. Diciamo solo che: i) gli adroni si presentavano in due grandi gruppi ben distinti; ii) un gruppo di adroni tendenzialmente più leggeri, di <i>spin intero</i>, formato sia da particelle che da antiparticelle detti mesoni (dal greco mesos=mezzo); iii) un gruppo di adroni tendenzialmente più pesanti, di <i>spin semintero</i>, formato da particelle detti barioni (dal greco barys= pesante), ben separato da uno speculare gruppo di adroni di spin semintero formato da antiparticelle detti antibarioni; iv) sia i mesoni che i barioni e gli antibarioni si presentano in famiglie di sapore di varia numerosità, massa approssimativamente uguale, ma cariche elettriche differenti.</p>
<p>il modello a quark</p>	<p>Il problema degli adroni venne risolto gradualmente a partire dalla metà degli anni ’60. Un primo passo decisivo fu la formulazione del modello a quark da parte di M. Gell-Mann e G. Zweig nel 1964 che ebbe un ruolo simile alla tavola periodica degli elementi in chimica.</p> <p>L’ipotesi basilare del modello è che gli adroni osservati non siano particelle fondamentali ma, piuttosto, composti di particelle fondamentali. L’analisi dettagliata degli adroni allora noti li condusse alla conclusione che si poteva spiegare in modo soddisfacente le proprietà degli adroni (masse, con certe approssimazioni; spin, perfettamente; altri numeri quantici, perfettamente) postulando l’esistenza:</p> <ul style="list-style-type: none"> • di tre diversi tipi o sapori di particelle elementari dette quark (un nome di fantasia proposto da Gell-Mann e tratto dai Finnegans Wake di J. Joyce) ed indicate con i nomi up, down e strange; • di spin $s=1/2$; • dotate di masse opportune; • dotate di carica elettrica frazionaria; • capaci di interagire fortemente; • con una interazione strutturata in modo tale da formare stati stabili legando quark-antiquark, quark-quark-quark, antiquark-antiquark-antiquark.

Una delle conclusioni più rilevanti cui il modello perveniva era quella di identificare i **mesoni** con **stati legati quark-antiquark** ed i **barioni** (antibarioni) con **stati legati quark-quark-quark** (antiquark-antiquark-antiquark).

Inoltre, essendo stati legati, risultava naturale immaginare uno **stato fondamentale**, che poteva essere identificato con gli **adroni quasi stabili**, e numerosi **stati eccitati**, che potevano essere identificati con gli **adroni risonanti instabili** chiarendo che gli **adroni** osservati altro non erano che la manifestazione di una assai complessa **spettroscopia di 'atomi' di quark**.

Nonostante i suoi pregi, non mancarono **alcune resistenze** legate al fatto che **nessuno aveva mai osservato i quark liberi** (ne riuscì ad osservarli, nonostante i numerosi tentativi con adroni collidenti ad energie sempre maggiori dove, piuttosto che spezzare gli adroni nei quark componenti, l'energia andava a creare nuovi adroni o addirittura getti di adroni riproponendo il 'paradosso' della calamita spezzata).

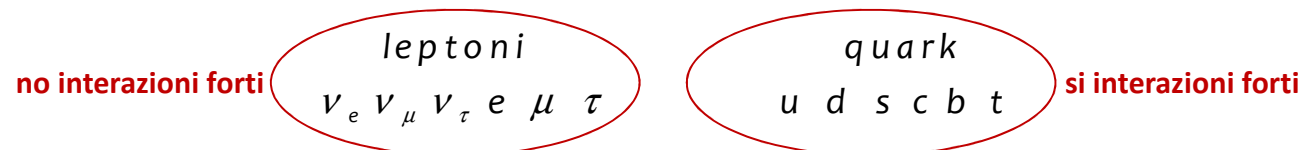
nasce la fisica dei quark

Comunque il modello si impose ed avviò un completo ripensamento della fisica degli adroni e della forza forte che di fatto divenne la fisica degli stati legati di quark e della forza tra quark. Non fu un caso, infatti, che pochi anni dopo la formulazione del modello a quark si pervenne, nei primi anni '70, ad una teoria di campo quantizzato delle interazioni forti: la **Cromodinamica Quantistica**, la cui accettazione è in larga misura basata sul fenomeno della libertà asintotica (cui accenneremo), prevista teoricamente da D. Gross, D. Politzer e F. Wilczek (premi Nobel nel 2004) e confermata sperimentalmente negli anni successivi.

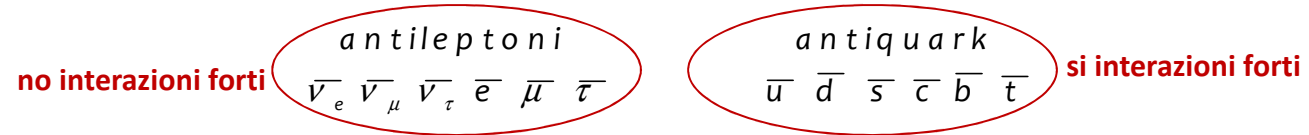
tre nuovi quark

I nuovi adroni scoperti dopo gli anni '70, da macchine acceleratrici di energia sempre maggiore, sono stati interpretati cercando di ricondurne le proprietà ai quark costituenti. In questo modo è stato però necessario introdurre un **certo numero di nuovi quark** per spiegare le proprietà dei nuovi adroni. La J/Ψ , formata da due nuovi quark **charm** e **anticharm** legati tra loro, fu scoperta da B. Richter e S. Ting nel 1974 (premi Nobel nel 1976). Il quark charm fu anticipato teoricamente da Glashow, Iliopoulos e Maiani. La Y , formata da due quark **bottom** e **antibottom** legati tra loro, fu scoperta da L. Lederman nel 1977 (prese il Nobel nel 1988 ma per le scoperte sui neutrini) mentre il quark **top** (che sostanzialmente non forma adroni) fu scoperto dall'esperimento CDF nel 1995. I quark bottom e top furono anticipati teoricamente da Kobayashi e Maskawa (premi Nobel nel 2008).

Si giunge in questo modo al quadro attuale che divide le particelle fondamentali in leptoni e quark



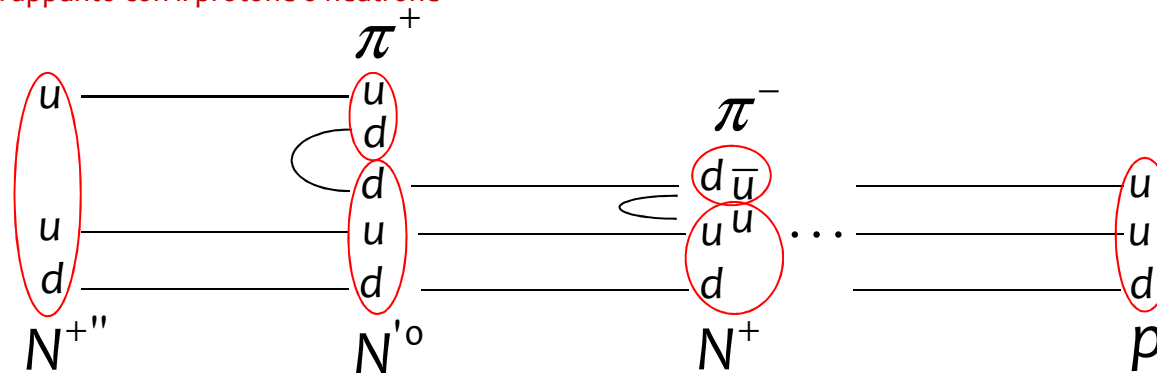
e in antileptoni ed antiquark



le interazioni forti conservano il sapore dei quark

Reinterpretata attraverso i quark la complessa fenomenologia delle interazioni forti diventava più comprensibile. Ad esempio, il fatto che nei processi ad interazione forte certi adroni venissero sempre prodotti assieme (produzione associata) oppure che valessero certe regole di conservazione del sapore trova una semplice spiegazione nella proprietà delle **interazioni forti di conservare rigorosamente l'identità o sapore dei quark**. Il che significa che non è possibile che la interazione forte trasformi un quark charm in un quark strange o un quark bottom in un quark up etc. etc. Analogamente si trova che è possibile che nello stato **finale compaiano coppie quark-antiquark** non presenti in quello iniziale oppure che, nello stato finale **spariscano coppie quark-antiquark** presenti nello stato iniziale (la creazione/distruzione di coppie particella-antiparticella è una proprietà generale di tutte le interazioni). Tutto ciò, ovviamente, nel quadro delle leggi generali di conservazione per cui una coppia quark-antiquark potrà effettivamente comparire nello stato finale solo se l'energia è sufficiente.

In questo modo si comprendono facilmente molti processi adronici. Ad esempio un barione pesante della serie N che ha la struttura a quark di un protone (N^+) o di un neutrone (N^0) ed è quindi un loro stato eccitato, può decadere in una serie di barioni più leggeri della stessa serie fino a giungere allo stato fondamentale che si identifica appunto con il protone o neutrone



i numeri quantici di sapore nel modello standard

Si noti che nel processo vengono prodotti diversi pioni. Ciò rende conto del fatto osservato che le collisioni tra barioni sono accompagnate da una copiosa produzione di mesoni che in un certo senso vengono irradiati nel corso del processo di diseccitazione del barione come i fotoni vengono irradiati nel corso del processo di diseccitazione dell'atomo. E' naturale attendersi che tutti gli stati barionici del processo di diseccitazione abbiano una cortissima vita media, data la intensità della interazione forte, al contrario di quello fondamentale che, per quanto riguarda le interazioni forti, deve essere assolutamente stabile e durare in eterno. Considerazioni assolutamente analoghe valgono per i mesoni.

Queste semplici proprietà della interazione forte possono essere espresse attraverso una *legge di conservazione* essenzialmente attribuendo a ciascun tipo di quark uno specifico *numero quantico di sapore* conservato dalla interazione stessa.

- La convenzione adottata nel Modello Standard, in gran parte risultato della storia, assume la seguente attribuzione di *numeri quantici di sapore* alle *particelle fondamentali*

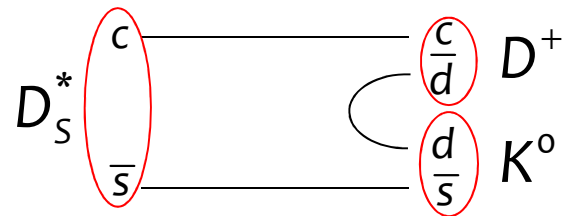
		Numeri di sapore dei quark					
		u	d	c	s	t	b
I, I₃	Isospin	1, 1/2	0	0	0	0	0
I, I₃	Isospin	0	1, -1/2	0	0	0	0
C	Charm	0	0	1	0	0	0
S	Strangeness	0	0	0	-1	0	0
T	Topness	0	0	0	0	1	0
B	Bottomness	0	0	0	0	0	-1

- per quanto riguarda i *numeri quantici di sapore* delle *antiparticelle* conviene attribuirgli (come vedremo tra poco) valori opposti in segno, dunque **C=-1, S=1, T=-1, B=1** nel caso degli *antiquark charm, strange, top, e bottom* rispettivamente (un discorso a parte va fatto per l'isospin come accenneremo tra breve);

- poi va postulata l'**additività dei numeri quantici di sapore** il che significa che i numeri quantici di sapore C, S, B e T presenti in uno stato si sommano algebricamente (un discorso a parte va fatto per l'isospin come accenneremo tra breve);
- infine si deve postulare la **conservazione del sapore nelle interazioni forti** il che significa che il sapore dello stato iniziale è sempre uguale a quello dello stato finale.

Esempio

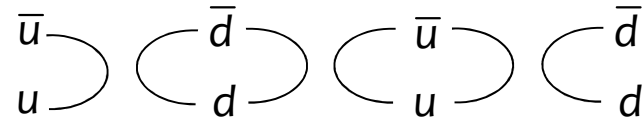
Con queste convenzioni la semplice dinamica cui abbiamo accennato risulta garantita. Infatti, consideriamo il seguente decadimento del mesone D_S^* (2573)



lo stato iniziale ha $C=1$ ed $S=1$, lo stato finale ha $C=1$ ed $S=1$, dunque la conservazione del sapore complessivo descrive correttamente il fatto che i quark charm e antistrange vengono conservati dalla interazione forte. Il fatto che nello stato finale venga creata la coppia down-antidown è sempre in accordo con la legge di conservazione proprio perché abbiamo scelto di attribuire numeri quantici di sapore opposti alle antiparticelle. Infatti l'isospin dello stato iniziale è nullo come quello dello stato finale.

Perché si arrangiano i quark up e down in doppietti d'isospin

Accenniamo ora al numero quantico d'isospin. Per vedere il problema concretamente, consideriamo i possibili stati legati mesonici che è possibile formare con i quark up e down. Questi sono gli stati (up-antiup), (up-antidown), (down-antiup) e (down-antidown). Tra questi consideriamo lo stato (up-antiup). Ricordando che nel corso di una interazione forte si può avere la creazione o distruzione di una coppia quark-antiquark possiamo pensare che tale coppia potrebbe annichinarsi per creare una coppia top-antitop. Un attimo di riflessione chiarisce però che un tale processo, pur in accordo con la conservazione del sapore, non è energeticamente possibile a causa della forte differenza di massa tra i quark up e top. Se le cose stanno in questo modo però, nulla può impedire alla coppia up-antiup di convertirsi in una coppia down-antidown data la prossimità delle loro masse. D'altra parte la coppia down-antidown potrà convertirsi nuovamente in una coppia up-antiup e così via, dando luogo al processo di oscillazione tra up-antiup e down-antidown indicato nella figura seguente



In questa situazione non possiamo dire che lo stato legato sia up-antiup o down-antidown, una ipotetica misura avrebbe eguali probabilità di trovarvi una coppia up-antiup o down-antidown per cui un tale stato si deve descrivere con una combinazione lineare di eguale peso delle due coppie, ovvero con una delle due combinazioni seguenti

$$\frac{u\bar{u} + d\bar{d}}{\sqrt{2}} \quad \frac{u\bar{u} - d\bar{d}}{\sqrt{2}} \quad (10)$$

Un tale fenomeno non avviene invece nel caso dei rimanenti stati legati

$$u\bar{d} \quad d\bar{u} \quad (11)$$

Se non fosse per l'accidentale coincidenza delle masse tra i quark up e down, gli stati legati sarebbero stati quelli derivanti dalla semplice combinazione, ovvero i seguenti quattro (ciò è quello che succederebbe, infatti, qualora combinassimo le coppie di quark s e c, ad esempio, dove la differenza di massa è molto forte)

$$u\bar{u} \quad d\bar{d} \quad u\bar{d} \quad d\bar{u} \quad (12)$$

Tutto ciò ci fa capire che a causa: i) della prossimità delle masse tra quark up e down; ii) della possibilità di processi di creazione/distruzione di coppie quark-antiquark (possibile in tutte le interazioni); le regole di composizione degli stati legati a partire dai quark non sono più quelle semplicemente combinatorie (che porterebbero alle 12) ma diventano più complicate dovendo portare alla formazione di stati come quelli indicati dalle (11) e (10). Quali sono queste nuove regole? Un minimo di conoscenza della teoria dei gruppi continui suggerisce la risposta che si articola nei seguenti passi: i) disporre i quark up e down e gli antiquark up e down nelle due componenti di due vettori complessi di C^2

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix}$$

ii) ricordare che l'osservabile in meccanica quantistica è sempre il modulo quadrato della funzione d'onda per cui una qualunque trasformazione lineare, unitaria e unimodulare su tali vettori (ovvero una trasformazione del gruppo SU(2)) porta a nuovi vettori associabili agli stessi stati (abbiamo già mostrato altrove questi passaggi). Ciò significa che dobbiamo sviluppare le nostre considerazioni fisiche in accordo con la simmetria rispetto a trasformazioni di SU(2);

iii) costruire il prodotto tensoriale tra questi due vettori

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\bar{u} & u\bar{d} \\ d\bar{u} & d\bar{d} \end{pmatrix}$$

iv) estrarre dalla matrice i sottospazi invarianti rispetto a trasformazioni del gruppo SU(2). Dato che i vettori (up,down) e (antiup, antidown) si trasformano diversamente per trasformazioni di SU(2) (si tratta di vettori 2 e 2*) dobbiamo ridurre la matrice sfruttando l'invarianza della traccia e non la simmetria o antisimmetria che non è una proprietà invariante nel caso di tensori $2 \otimes 2^*$. Otteniamo allora

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u\bar{u} & u\bar{d} \\ d\bar{u} & d\bar{d} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{u\bar{u} - d\bar{d}}{2} & u\bar{d} \\ d\bar{u} & -\frac{u\bar{u} - d\bar{d}}{2} \end{pmatrix} + \frac{u\bar{u} + d\bar{d}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{u\bar{u} - d\bar{d}}{\sqrt{2}} & u\bar{d} \\ d\bar{u} & -\frac{u\bar{u} - d\bar{d}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{u\bar{u} + d\bar{d}}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

v) negli stati cerchiati riconosciamo in effetti quelli delle (10) e (11).

Dunque, nel caso dei quark up e down, per i motivi sopra elencati (prossimità delle masse dei quark up e down, possibilità di processi di creazione/distruzione di coppie quark-antiquark) la costruzione degli stati legati va effettuata arrangiandoli in un vettore complesso a due componenti ed operando secondo le regole i)-iv). E' questo il motivo per cui, **nel modello standard up e down sono presentati in un doppietto di stati** e non come

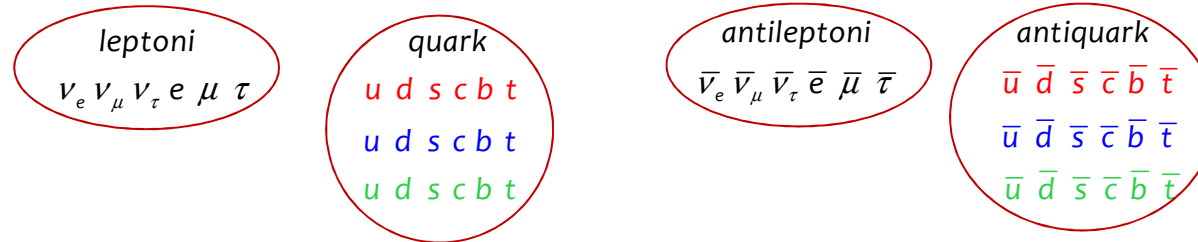
quark singoli come invece accade nel caso dei quark **c, s, t e b** le cui masse sono molto differenti. La nomenclatura degli stati ed il relativo formalismo ricalca alla lettera quella dello spin cui rimandiamo.

La costruzione di una teoria di gauge delle interazioni forti

Il comportamento delle interazioni forti rispetto al sapore dei quark è determinante nel fissare la struttura della sottostante teoria di gauge. Infatti costruire una teoria di gauge delle interazioni forti significa in prima battuta: i) ammettere che l'interazione forte, analogamente a quella elettromagnetica, è dovuta all'accoppiamento tra i campi di certe particelle materiali elementari di spin 1/2, portatrici di un certo numero di cariche di gauge, con un certo numero di campi di gauge di spin 1 (in questo modo, attraverso il meccanismo dei quanti virtuali di tali campi di gauge, ha luogo l'interazione forte tra le particelle); ii) individuare i portatori delle cariche di gauge; iii) individuare il numero di cariche di gauge necessarie; iv) verificare la consistenza della teoria interna della teoria (rinormalizzabilità, etc.etc.) e, soprattutto, esterna (consistenza con i dati sperimentali). Naturalmente diremo qualche parola solo sui punti ii) e iii).

Per quanto riguarda ii), accettando l'indicazione del modello a quark, secondo il quale l'interazione forte tra adroni, che è quella che si osserva sperimentalmente, è in realtà il risultato della interazione forte primaria tra i quark costituenti ***i portatori delle cariche forti devono essere i quark*** stessi. Tuttavia dobbiamo osservare che in una teoria di gauge, l'interazione, ovvero il processo di irradiazione del campo accoppiato, cambia la carica irradiante. D'altra parte sappiamo che l'interazione non modifica il sapore dei quark, per cui dobbiamo concludere che le cariche di gauge sono 'interne' al sapore. Ciò significa che ***ciascun sapore di quark deve esistere in un numero di versioni, di uguale massa e spin, pari al numero di cariche di gauge necessarie per descrivere l'interazione forte.***

Per quanto riguarda iii) il numero di cariche di gauge necessarie per descrivere l'interazione forte non è deducibile sulla base di una argomentazione semplice e diretta. E' invece necessario fondarsi sulle indicazioni provenienti da processi di collisione tra adroni e da considerazioni sulla struttura degli adroni le quali indicano ***che il numero di cariche necessario è 3*** e vengono dette ***cariche di colore*** e nominate con i colori rosso, blu e verde (naturalmente ***i leptoni non devono possedere cariche di colore***)



libertà asintotica e confinamento

Se le cariche di gauge sono le tre cariche di colore ciò comporta che l'interazione forte venga mediata da ben $3 \times 3 - 1 = 8$ diversi campi di forza detti **campi gluonici dotati essi stessi di carica di colore**. Questi sono i presupposti basilari della **Cromodinamica Quantistica (QCD)**, la teoria di campo quantizzato della interazione forte, costruita postulando **l'invarianza della teoria rispetto a trasformazioni del gruppo SU(3) delle cariche di colore**.

Come già accennato in precedenza, il fatto che i campi gluonici abbiano carica di colore comporta una dinamica ben più complessa di quella del campo elettromagnetico che, invece, non possiede carica elettrica.

Completamente diverso è l'andamento dei campi con la distanza. Mentre i campi elettromagnetici decrescono con la distanza secondo la legge $1/r^2$, i corrispondenti campi gluonici aumentano con la distanza (in certi regimi quasi linearmente). In particolare la loro **intensità è piccola in prossimità della carica di colore mentre aumenta allontanandosi**. In questo modo le particelle dotate di carica di colore possono essere considerate quasi libere a piccole distanze (ovvero alle corte lunghezze d'onda di De Broglie ovvero alle alte energie), una proprietà riferita come **libertà asintotica**, osservata sperimentalmente e spiegata teoricamente per mezzo della QCD da D. Gross, D. Politzer e F. Wilczek a metà degli anni '70.

Allo stesso tempo si può pensare che l'aumento della intensità della forza con la distanza renda di fatto i quark non separabili spiegando il fatto empirico che i quark non si osservano liberi ma solo legati negli adroni dando luogo a quella proprietà nota con il nome di **confinamento**. E' possibile che tutto ciò sia corretto tuttavia è bene precisare che a tutt'oggi non esiste una prova rigorosa che a partire dalla QCD si possa dedurre il confinamento dei quark (uno dei Millennium Prize Problems, proposto da A. Jaffe ed E. Witten). Ad ogni modo è accettato da

<p>il corto raggio della interazione forte</p>	<p>tutti che sia proprio a causa del confinamento che non risulti possibile osservare quark liberi ma solo legati all'interno di sistemi aventi carica di colore complessiva nulla (detti di colore 'neutro' o 'bianco' ed analoghi ai sistemi elettromagnetici di carica elettrica totale nulla come gli atomi).</p> <p>Il confinamento ci permette anche di capire per quale motivo la forza nucleare è una forza a corto raggio operante essenzialmente all'interno del nucleo. A causa del confinamento, infatti, i quark risultano chiusi all'interno del protone e del neutrone a formare un sistema neutro di colore. I campi gluonici percepibili al di fuori degli adroni avranno un tipico andamento multipolare dipendenti in modo complesso dalla posizione (come in effetti accade nel caso della forza nucleare) e tendenti ad estinguersi rapidamente. Da questo punto di vista, il corto raggio delle interazioni forti risulta essere un effetto dovuto al confinamento che maschera la natura a lungo raggio della interazione forte.</p>
<p>gli stati bianchi della QCD</p>	<p>Per quanto detto, è naturale identificare gli adroni osservati sperimentalmente con gli stati legati di colore nullo previsti dalla QCD. Nel compiere questa identificazione sorge però un problema.</p> <p>L'esistenza di tre diverse cariche di colore rende possibile la formazione di numerosi sistemi con carica di colore nulla o bianca. Sulla base dei metodi della teoria dei gruppi, si può mostrare che risulta possibile formare sistemi di colore nullo combinando quark-antiquark (analoghi agli stati neutri dell'elettromagnetismo formati da due cariche opposte +1 e -1), quark-quark-quark o antiquark-antiquark-antiquark (possibilità che invece non esistono in elettromagnetismo) ma anche stati a 4-quark, 4-antiquark, 5-quark, 5-antiquark e molte altre combinazioni ancora. Infine è possibile formare stati di colore nullo, detti glueballs, combinando solo campi gluonici (si ricordi che essendo carichi, i gluoni possono formare stati legati autonomi, anche questa una possibilità che non esiste in elettromagnetismo poiché non risulta possibile costruire uno stato legato con il solo campo elettromagnetico!).</p>
<p>gli adroni osservati</p>	<p>Ragionando sugli adroni osservati e sulle loro proprietà (spin, masse, numeri quantici di sapore, ed altri numeri quantici quali parità spaziale, parità di carica etc. etc.) si riesce ad individuare la possibile composizione degli adroni in termini di quark elementari (ad esempio, lo spin pari dei mesoni può essere ottenuto solo combinando coppie di quark, i numeri quantici di sapore richiedono poi che si tratti di un quark ed un antiquark. Analogamente lo spin dispari dei barioni può essere ottenuto combinando tre quark, i numeri quantici di sapore richiedono poi che si tratti di tre quark o tre antiquark). Si scopre allora che la ricchissima varietà di stati legati di colore nullo prevista dalla QCD trova una corrispondenza negli adroni osservati solo nel caso degli stati quark-antiquark (mesoni), quark-quark-quark (barioni) o antiquark-antiquark-antiquark (antibarioni). Degli stati rimanenti, benché cercati lungamente anche con esperimenti dedicati, non esiste a tutt'oggi una evidenza certa, un fatto probabilmente legato alla difficoltà sperimentale di individuare tali stati altamente instabili dalla brevissima vita media.</p>

**la spettroscopia
adronica**

Un aspetto delle interazioni forti che lo schema delineato è perfettamente in grado di descrivere riguarda il numero di diversi tipi di mesoni e barioni instabili e quasi stabili che ci si deve attendere. Infatti, tenuto conto che i quark sono di sei differenti sapori, abbiamo $6 \times 6 = 36$ combinazioni quark-antiquark di diverso sapore le quali, tenuto conto di alcuni effetti (il quark top ha una vita media così breve che non forma stati legati quark-antiquark; inoltre bisogna tenere conto del fenomeno del miscelamento del sapore) portano comunque a **24 mesoni di diverso sapore**. Con simili conteggi si aggiungono circa 40 combinazioni quark-quark-quark e 40 combinazioni antiquark-antiquark-antiquark che portano a circa **40 barioni e 40 antibarioni di diverso sapore!** Dunque, in totale, **oltre 100 diversi tipi o sapori di atomi di quark tutti neutri di colore!** Come ogni sistema legato (si pensi all'atomo), i mesoni barioni e antibarioni di diverso sapore possono esistere sia nello **stato fondamentale** che in un qualunque **stato eccitato**. Quando vengono prodotti nelle collisioni di alta energia gli adroni si trovano in stati risonanti altamente eccitati. Da questi, attraverso una fitta e complessa rete di decadimenti passanti per gli stati eccitati intermedi, discendono in **tempi rapidissimi** (l'interazione forte è assai intensa) verso le diverse tipologie o sapori di adroni quasi stabili del livello fondamentale. Questi stati vanno a costituire quella ricchissima ed articolatissima **spettroscopia adronica** che è la tipica manifestazione della interazione forte emersa in modo dirompente con il fenomeno della proliferazione degli adroni. Di questi, quelli corrispondenti allo stato fondamentale del sistema legato quark-antiquark, sono stati quasi tutti individuati sperimentalmente e con le caratteristiche attese. Per quanto riguarda gli stati eccitati, quasi sempre il primo stato eccitato risulta ben identificato con le caratteristiche attese ma gli stati successivi sono pieni di lacune essenzialmente a causa di fenomeni fisici inevitabili, come il mixing degli stati, che rende assai più difficile l'identificazione, e la elevata instabilità che rende i decadimenti così rapidi che, a causa del principio di indeterminazione, la massa si allarga fino a rendere difficilmente riconoscibile lo stato stesso.

**I numeri quantici di
sapore dei quark sono
incompleti**

Sulla base di quanto detto **gli oltre 100 adroni di diverso sapore dello stato fondamentale sono stabili rispetto alle interazioni forti a causa della conservazione del sapore**. Dato poi che tali adroni stabili interagiscono fortemente, possono senz'altro legarsi a formare nuclei stabili in una enorme varietà di sapori. Tali nuclei possono infine catturare elettroni per formare atomi stabili di una altrettanto enorme varietà di sapori. La materia stabile dovrebbe quindi avere una enorme varietà di tipologie! In realtà le cose non stanno così. Infatti nessuno ha mai trovato un qualche tipo di materia mesonica stabile e nemmeno 40 diversi sapori di materia barionica stabile, oppure una materia altamente esotica con nuclei formati da mesoni e barioni! La realtà sembra essere molto più semplice poiché la materia osservata sembra ridursi a quella dei due barioni più leggeri: il **neutrone** (che è stabile solo all'interno del nucleo atomico ma instabile, con vita media del quarto d'ora, quando invece è libero) ed il **protone** che è **l'unico adrone davvero stabile** (molto longevo se non eterno). Evidentemente la nostra descrizione dei quark non è ancora completa.

Dato che la conservazione del sapore nelle interazioni forti è fuori di dubbio dobbiamo concludere che la suddetta materia barionica non esiste a causa di altre interazioni che si inseriscono nel gioco rendendola instabile. In effetti sperimentalmente si vede che gli adroni di diverso sapore dello stato fondamentale sono instabili ma con vite medie assai più lunghe di quelle degli stati adronici eccitati che decadono per interazione forte. Ciò indica che l'interazione che rende instabili gli adroni dello stato fondamentale è diversa da quella forte e di intensità assai inferiore. Possiamo inferire alcune proprietà di questa interazione con qualche semplice ragionamento.

Il fatto che non esista materia mesonica o barionica ad eccezione di quella formata da protoni e neutroni indica che la quasi totalità di questa materia è instabile. In particolare ciò significa che tutti i mesoni dello stato fondamentale e tutti i barioni dello stato fondamentale ad eccezione del protone (il neutrone è stabilizzato dal nucleo ma decade quando è libero) decadono per effetto della interazione debole o elettromagnetica.

E' evidente che solo una interazione che viola la conservazione del sapore può fare decadere gli adroni dello stato fondamentale. Ora, l'interazione elettromagnetica non può violare la conservazione del sapore (quando una carica elettrica irradia un campo elettromagnetico modifica solo il proprio stato cinematico e non la propria identità, dune nemmeno il proprio sapore) per cui deve trattarsi della interazione debole.

Se l'interazione debole può modificare il sapore dei quark dobbiamo attenderci che gli adroni dello stato fondamentale più pesanti possano trasformarsi in quelli più leggeri fino a raggiungere i mesoni ed i barioni dello stato fondamentale più leggeri in assoluto: il pione ed il protone. Ora il protone è effettivamente stabile ma non il pione poiché non si osserva la materia pionica. Come mai il pione è instabile? Dato che il pione positivo, ad esempio, è formato da un quark up ed un quark antidown, si potrebbe ipotizzare che ciò sia dovuto al fatto che attraverso una interazione debole i quark possono trasformarsi nei leptoni più leggeri. Ciò farebbe decadere il pione in effetti ma anche il protone che, invece, è stabile. Per uscirne bisogna valutare con più precisione la situazione. Un pione, come tutti mesoni, è uno stato legato quark-antiquark mentre un protone uno stato legato quark-quark-quark. Si deve allora concludere che l'interazione debole è tale da permettere la conversione in leptoni di una coppia quark-antiquark ma non di un sistema quark-quark-quark per cui a livello elementare abbiamo i seguenti processi vietati e permessi



il numero barionico

Questa situazione rappresenta un dato di fatto che possiamo cercare di descrivere, come al solito, introducendo un opportuno numero quantico di sapore. E' evidente che è sufficiente: i) **introdurre un numero quantico B tale che B=1/3 per i quark, B=-1/3 per gli antiquark e B=0 per il leptoni; ii) postulare che tale numero quantico sia**

conservato da tutte le interazioni naturali; iv) postulare che tale numero quantico sia additivo.

In questo modo la conservazione di B impedirà ai quark di decadere in leptoni e quindi anche al protone (B=1) di decadere in leptoni (B=0). Ma non impedirà alle coppie quark-antiquark di decadere in leptoni e quindi ai mesoni (B=0) di decadere in leptoni (B=0). Si noti che le regole di attribuzione del numero quantico B fanno sì che i mesoni abbiano B=0 (come i leptoni), i barioni B=1 e gli antibarioni B=-1, un fatto che spiega perché il numero quantico B venga chiamato **numero barionico** (per fare in modo che ai barioni abbiano B=1 si sceglie di attribuire B=1/3 a ciascun quark).

Nel modello standard, l'assegnazione dei numeri quantici dei quark è allora riassunta dalla seguente tabella

		Numeri quantici dei quark					
		u	d	c	s	t	b
I, I₃	Isospin	1, 1/2	0	0	0	0	0
I, I₃	Isospin	0	1, -1/2	0	0	0	0
C	Charm	0	0	1	0	0	0
S	Strangeness	0	0	0	-1	0	0
T	Topness	0	0	0	0	1	0
B	Bottomness	0	0	0	0	0	-1
B	Barionico	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3

con la convenzione di attribuire agli antiquark numeri quantici opposti.

**Accenni sulla
costruzione dei mesoni
nel modello a quark**

Tralasciando il problema del calcolo degli stati di momento angolare dei mesoni che procedono in modo simile a ciò che si fa in fisica atomica, qui daremo qualche cenno al calcolo dei numeri quantici di sapore ricorrendo, quando necessario, al metodo tensoriale.

Se ordiniamo i quark in un vettore colonna seguendo i valori delle masse otteniamo (vedi figura) dove con i colori abbiamo indicato il fatto che i quark up e down si differenziano solo nella terza componente dell'isospin ($u=1/2, 1/2$; $d=1/2, -1/2$) poiché sono pensati come due stati diversi della stessa particella a causa della prossimità della loro massa (simmetria approssimata di isospin), mentre i rimanenti quark si comportano come particelle differenti a causa della grande differenza nel valore delle loro masse.

$$\begin{array}{c}
 I = 1/2 \\
 S = +1 \\
 C = -1 \\
 B = +1 \\
 T = -1
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \bar{u} \\
 \bar{d} \\
 \bar{s} \\
 \bar{c} \\
 \bar{b} \\
 \bar{t}
 \end{array}
 \otimes
 \begin{array}{c}
 I = 1/2 \\
 S = -1 \\
 C = +1 \\
 B = -1 \\
 T = +1
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 u \\
 d \\
 s \\
 c \\
 b \\
 t
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 B = 1/3
 \end{array}$$

La struttura di sapore dei mesoni si ottiene facendo il prodotto tensoriale dei due 'vettori' da cui risulta evidente che si ottengono 36 diverse combinazioni, che identifichiamo con i mesoni, ripartiti in famiglie identificate da specifici valori del sapore ovvero di isospin, stranezza, incanto, etc. etc. (vedi tabella pagina seguente).

$$\begin{array}{c}
I=1/2 \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \\
S=+1 \begin{pmatrix} \bar{s} \\ \bar{c} \end{pmatrix} \\
C=-1 \begin{pmatrix} \bar{b} \\ \bar{t} \end{pmatrix} \\
B=+1 \\
T=-1
\end{array}
\otimes
\begin{array}{c}
I=1/2 \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \\
S=-1 \begin{pmatrix} s \\ c \end{pmatrix} \\
C=+1 \begin{pmatrix} b \\ t \end{pmatrix} \\
B=-1 \\
T=+1
\end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}u & \bar{u}d \\ \bar{d}u & \bar{d}d \end{pmatrix}^{**} \quad I=0,1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} s \\ \bar{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}s \\ \bar{d}s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K^- \\ \bar{K}^0 \end{pmatrix} \quad I=1/2 \quad S=-1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{s} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}\bar{s} \\ \bar{d}\bar{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix} \quad I=1/2 \quad S=+1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \\ \bar{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}c \\ \bar{d}c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D^- \\ \bar{D}^0 \end{pmatrix} \quad I=1/2 \quad C=+1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{c} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}\bar{c} \\ \bar{d}\bar{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D^+ \\ D^0 \end{pmatrix} \quad I=1/2 \quad C=-1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b \\ \bar{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}b \\ \bar{d}b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^- \\ \bar{B}^0 \end{pmatrix} \quad I=1/2 \quad B=-1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{b} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}\bar{b} \\ \bar{d}\bar{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^+ \\ B^0 \end{pmatrix} \quad I=1/2 \quad B=+1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} t \\ \bar{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}t \\ \bar{d}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix} \quad I=1/2 \quad T=+1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}\bar{t} \\ \bar{d}\bar{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix} \quad I=1/2 \quad T=-1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{s} \\ \bar{c} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} s \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{s}s \\ \bar{s}c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ** \\ D_s^+ \end{pmatrix} \quad S=0 \quad S=+1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{s} \\ \bar{c} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{s}c \\ \bar{s}s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_s^+ \\ D_s^- \end{pmatrix} \quad C=+1 \quad S=+1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{c} \\ \bar{s} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} s \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{c}s \\ \bar{c}c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_s^- \\ D_s^0 \end{pmatrix} \quad S=-1 \quad C=-1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{s} \\ \bar{c} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b \\ \bar{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{s}b \\ \bar{s}\bar{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_s^0 \\ B_s^- \end{pmatrix} \quad S=+1 \quad B=-1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{b} \\ \bar{c} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} s \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b}s \\ \bar{b}c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_s^0 \\ B_s^- \end{pmatrix} \quad S=-1 \quad B=+1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{s} \\ \bar{t} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} t \\ \bar{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{s}t \\ \bar{s}\bar{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix} \quad S=+1 \quad T=+1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{s} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} s \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{t}s \\ \bar{t}c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix} \quad S=-1 \quad T=-1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{c} \\ \bar{t} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{c}c \\ \bar{c}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_c \\ \eta_c \end{pmatrix} \quad C=0 \quad C=0$$

$$\begin{pmatrix} \bar{c} \\ \bar{t} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b \\ \bar{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{c}b \\ \bar{c}\bar{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_c^- \\ B_c^- \end{pmatrix} \quad C=-1 \quad B=-1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{b} \\ \bar{c} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b}c \\ \bar{b}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_c^+ \\ B_c^+ \end{pmatrix} \quad C=+1 \quad B=+1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{c} \\ \bar{t} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} t \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{c}t \\ \bar{c}c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix} \quad C=+1 \quad T=+1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{c} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{t}c \\ \bar{t}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix} \quad C=-1 \quad T=-1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{b} \\ \bar{t} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b}b \\ \bar{b}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \\ * \end{pmatrix} \quad B=0 \quad B=+1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{b} \\ \bar{t} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b}t \\ \bar{b}b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix} \quad T=+1 \quad T=+1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{b} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{t}b \\ \bar{t}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix} \quad B=-1 \quad T=-1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{b} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{t}t \\ \bar{t}b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix} \quad T=0 \quad T=0$$

Le lettere si riferiscono al nome del mesone corrispondente allo stato legato fondamentale tale $J^{PC}=0^{++}$.

Tutti gli stati sono osservati, e molti studiati a fondo.

Quelli indicati con * sono stati che è noto non possano esistere a causa della enorme **massa del quark top** che rende l'interazione debole così intensa che il top decade debolmente prima di potere formare uno stato legato via interazione forte.

Infine gli stati indicati con ** hanno una struttura di sapore tensoriale e richiedono considerazioni aggiuntive che faremo tra poco.

Ci sono alcuni commenti che vale la pena fare sullo schema delineato nella pagina precedente

- il fatto che i quark up e down risultino disposti in un doppietto d'isospin (spinore d'isopin) con masse molto determina una **corrispondente ripartizione dei mesoni in doppietti di isospin di massa prossima**. Naturalmente sono possibili anche molti singoletti d'isospin ($I=0$) come pure tensori d'isospin ($I=1$) che discuteremo tra poco. In questo modo si spiega il fatto, sperimentalmente osservato sin dagli inizi, che i mesoni (come del resto anche i barioni) spesso si presentano in famiglie di massa molto prossima e carica differente;
- lo schema prevede l'esistenza di un certo numero di **mesoni realmente neutri** (autostati della coniugazione di carica). In linea di principio dovremmo attenderci 6 mesoni realmente neutri formati dalle coppie $u\bar{u}$, $d\bar{d}$, ..., $t\bar{t}$, tuttavia la coppia del quark top è esclusa a causa della grande massa (vedi pag. prec.), quelle dei quark up, down e strange sono soggette a fenomeni di miscelamento particolari e per ora le escludiamo, rimangono allora le coppie dei quark charm (η_c) e beauty (Y). Tutti **gli altri mesoni non sono realmente neutri ma, al più, elettricamente neutri** e risultano corrispondersi in **sistemi particella-antiparticella sia che si tratti di singoletti d'isospin che di doppietti**. Tra i singoletti abbiamo allora le corrispondenze $D_S^+ D_S^-$, $B_S^0 \bar{B}_S^0$, $B_c^+ B_c^-$ mentre tra i doppietti abbiamo le caratteristiche corrispondenze dei doppietti di **K, D e B** (mancano al solito quelli associati al top);
- si noti che i doppietti del **K, D e B** contengono altre particelle elettricamente neutre ma non realmente neutre come le coppie $K^0 \bar{K}^0$, $D^0 \bar{D}^0$, $B^0 \bar{B}^0$, che vanno ad aggiungersi alla coppia $B_S^0 \bar{B}_S^0$. Queste quattro coppie sono di eccezionale interesse! Si tratta di stati fisici elettricamente neutri che si differenziano dal solo punto di vista del sapore ($S=\pm 1$, $C=\pm 1$ e $B=\pm 1$ rispettivamente). Dato che solo le interazioni forti conservano il sapore dobbiamo attenderci che la loro identità sia differente solo dal punto di vista di queste interazioni: nulla impedisce che altre interazioni non percepiscano questa differenza! In questo caso, dato che la carica elettrica è la stessa, si osserverebbero fenomeni di interferenza tra le due identità ideali per **lo studio di aspetti fondamentali della fisica delle particelle e della meccanica quantistica**.
- dobbiamo attenderci che le masse dei mesoni aumentino mano a mano che entrano i quark strange, charm e bottom. Un criterio orientativo per ottenere la massa del mesone è quello di sommare le masse dei quark costituenti e di sottrarre il contributo della energia di legame. Le prime sono riportate all'inizio del capitolo, la seconda ha un valore che va da 100 a 300 MeV (di più, a questo livello, non si può fare!);

Le interazioni deboli

la complessa struttura di sapore delle interazioni deboli

Dato che più avanti torneremo sulle interazioni deboli qui daremo solo alcuni rapidi cenni per completare il quadro complessivo del Modello Standard.

La teoria di campo quantizzato delle interazioni deboli ed elettromagnetiche, capace di spiegare i dati sperimentali fino ad oggi noti, viene detta **Teoria Elettrodebole** (ElectroWeak Theory, EWT).

Si tratta di una teoria di gauge la cui struttura accoglie alcuni fatti empirici fondamentali;

- tutte le particelle materiali, leptoni, quark, antileptoni e antiquark, possono interagire attraverso l'interazione debole;
- nel corso di una interazione debole viene modificata l'identità o sapore delle particelle partecipanti al processo per cui **l'interazione debole non conserva il sapore**. In particolare un leptone viene trasformato in un leptone di sapore differente ed un quark in un quark di sapore differente secondo il seguente schema approssimato (le trasformazioni possono avvenire sia dall'alto al basso che dal basso all'alto)

<i>leptoni</i>	<i>quark</i>
$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$
<i>antileptoni</i>	<i>antiquark</i>
$\begin{pmatrix} \bar{\nu}_e \\ \bar{e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_\mu \\ \bar{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_\tau \\ \bar{\tau} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{c} \\ \bar{s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{b} \end{pmatrix}$

- è inoltre possibile la creazione di coppie particella antiparticella per ciascuna delle dodici particelle materiali del MS.

E' necessario rimarcare bene che tale schema di appaiamento tra le particelle risulta approssimato **nel caso dei leptoni** (ciò è diventato chiaro negli ultimi anni) e **fortemente approssimato nel caso dei quark** (ciò è chiaro da molto tempo) **tuttavia la separazione tra leptoni e quark è assoluta** nel senso che **un leptone è sempre trasformato in un leptone ed un quark è sempre trasformato in un quark** senza eccezioni note. Dato che i quark hanno numero barionico $B=1/3$ ed i leptoni $B=0$, si comprende che questo fatto garantisce **la conservazione del numero barionico nelle interazioni deboli**.

Si possono descrivere queste proprietà empiriche delle interazioni deboli introducendo opportuni numeri quantici interni.

il numero leptonic

In analogia con i quark si può introdurre un numero quantico L che descriva il fatto che nessun leptone può essere trasformato in quark. Basterà allora attribuire L=1 a tutti i leptoni ed L=0 a tutti i quark. Inoltre, per tenere conto del fatto che sono comunque possibili processi deboli dove vengono create coppie leptone antileptone, si dovrà attribuire L=-1 a tutti gli antileptoni e, ovviamente, L=0 a tutti gli antiquark.

Si definisce allora **numero leptonic L, il numero quantico additivo conservato dalle interazioni deboli e da tutte le interazioni ed associato ai leptoni ed agli antileptoni nel modo seguente**

numero leptonic						
	e	ν_e	μ	ν_μ	τ	ν_τ
L	1	1	1	1	1	1

numero leptonic						
	\bar{e}	$\bar{\nu}_e$	$\bar{\mu}$	$\bar{\nu}_\mu$	$\bar{\tau}$	$\bar{\nu}_\tau$
L	-1	-1	-1	-1	-1	-1

i numeri leptonic di famiglia

Dobbiamo ora descrivere il fatto che l'interazione debole appaia le particelle nel modo ricordato. Dato che tale appaiamento è fortemente approssimato nel caso dei quark mentre è ragionevolmente approssimato nel caso dei leptoni ci limiteremo solo a questi ultimi. E' chiaro che per descrivere quanto ricordato in b) è sufficiente introdurre un numero quantico conservato per ciascuna coppia di leptoni e di antileptoni ovvero i numeri L_e , L_μ ed L_τ . Ora, attribuendo $L_e=1$ sia all'elettrone che al neutrino ed $L_e=0$ a tutti gli altri leptoni, postulando la conservazione di tale numero nelle interazioni deboli, si ha che l'unico processo possibile diventa la conversione elettrone-neutrino elettronico o viceversa come verificato dai fatti sperimentali. Per rendere possibile i processi deboli dove vengono create coppie leptone-antileptone è ancora una volta necessario attribuire $L_e=-1$ alla coppia positone neutrino ed $L_e=0$ a tutti rimanenti antileptoni. In modo analogo funzionano i numeri quantici L_μ ed L_τ . Naturalmente dobbiamo ricordare che la struttura di sapore della interazione debole a coppie è, anche nel caso dei leptoni, approssimata, come gli esperimenti hanno dimostrato in modo ormai definitivo. Ciò comporta che i numeri quantici di famiglia non possano essere esattamente conservati, un fatto che li rende oggi superflui e che riportiamo solo per completezza.

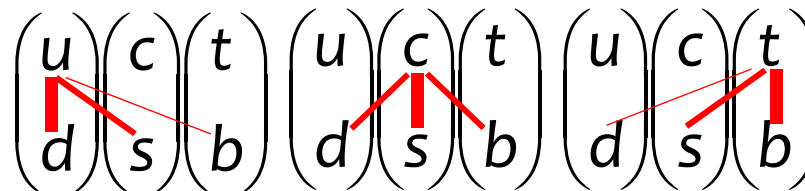
Si definiscono allora *numeri leptonici di famiglia* i numeri leptonico-elettronico L_e , leptonico-muonico L_μ e leptonico-tauonico L_τ , i numeri quantici additivi conservati in modo approssimato dalle interazioni deboli ed in modo esatto dalle altre interazioni associati ai leptoni ed agli antileptoni nel modo seguente

numeri leptonici di famiglia							numeri leptonici di famiglia						
	e	ν_e	μ	ν_μ	τ	ν_τ	\bar{e}	$\bar{\nu}_e$	$\bar{\mu}$	$\bar{\nu}_\mu$	$\bar{\tau}$	$\bar{\nu}_\tau$	
L_e	1	1	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0	0	
L_μ	0	0	1	1	0	0	0	0	-1	-1	0	0	
L_τ	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	-1	-1	

**l'interazione debole
miscela il sapore dei
quark**

Abbiamo introdotto i numeri leptonici di famiglia per rendere conto del peculiare appaiamento dei leptoni che si osserva nelle interazioni deboli mentre non abbiamo introdotto alcunché nel caso dei quark perché, come accennato, tale schema risulta violato in modo marcato. Su tutto ciò dobbiamo dire alcune parole.

Il fatto che nel caso di quark l'appaiamento fosse più complesso che nel caso dei leptoni è un fatto sperimentale che trovò la prima descrizione teorica nei lavori di N. Cabibbo a metà degli anni '60 e fu poi sviluppata da Kobayashi e Maskawa. Da allora si sono accumulate molte evidenze sperimentali ed è emerso che lo schema è del tipo seguente



dove lo spessore della linea è indicativa della probabilità. Ciò significa che in una interazione debole il quark up ha una probabilità dominante di convertirsi in un quark down, una probabilità non trascurabile di convertirsi in un quark strano ed una probabilità molto piccola di convertirsi in un quark bottom. Analogamente per i quark c e t. In sostanza **l'interazione debole miscela il sapore dei quark** nel modo peculiare appena ricordato.

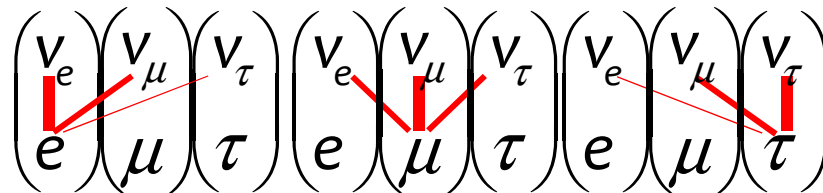
In questa situazione è impossibile introdurre un numero quantico come nel caso dei leptoni piuttosto serve qualcosa di più complicato. Evidentemente una **matrice 3x3 unitaria** può assolvere benissimo questo compito e viene detta **Matrice di Cabibbo-Kobayashi-Maskawa** della quale riportiamo i moduli dei suoi elementi complessi

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} |V_{ud}| & |V_{us}| & |V_{ub}| \\ |V_{cd}| & |V_{cs}| & |V_{cb}| \\ |V_{td}| & |V_{ts}| & |V_{tb}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.975 & 0.225 & 0.004 \\ 0.225 & 0.973 & 0.04 \\ 0.009 & 0.004 & 0.999 \end{pmatrix}$$

Esistono varie parametrizzazioni di questa matrice ma il punto cruciale, messo in luce da Kobayashi e Maskawa nel 1973 e che valse loro il Nobel nel 2008, è che essendo di rango 3 (il che è dovuto al fatto che esistono tre doppie o famiglie o generazioni di quark) essa **dipende da tre angoli ed una fase complessa** la quale può dare luogo al fenomeno della **violazione della simmetria CP a sua volta riducibile alla violazione di T** (fenomeno scoperto nel settore dei mesoni K ed incorporato nel Modello Standard attraverso la Matrice CKM).

**l'interazione debole
miscela anche il sapore
dei leptoni**

Negli ultimi anni si è chiarito che il fenomeno del mixing del sapore è una proprietà generale delle interazioni deboli e riguarda pure il settore leptonic. Ciò significa che nel corso di una interazione debole un elettrone si trasforma preferenzialmente in neutrino elettronico ma ha anche una piccola probabilità di trasformarsi in neutrino muonico o tauonico. Analogamente per il muone ed il tau. Questo fatto comporta che la conservazione dei numeri leptonici di famiglia abbiano solo un valore approssimato. Il Modello Standard può accogliere facilmente questo fenomeno attraverso una matrice unitaria 3x3 del tutto simile a quella di CKM.



Si tratta della **Matrice di Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata o Matrice PMNS** (il fenomeno del miscelamento fu intuito da B. Pontecorvo nel 1959 mentre la matrice fu proposta da Maki, Nakagawa e Sakata nel 1962) che spiega il rimarchevole fenomeno della **oscillazione dei neutrini**.

**la costruzione di una
teoria di gauge delle
interazioni deboli**

Costruire una teoria di gauge delle interazioni deboli significa ammettere che l'interazione debole, analogamente a quella elettromagnetica, è dovuta all'accoppiamento tra i campi di certe particelle materiali elementari di spin $1/2$, portatrici di un certo numero di cariche di gauge, con un certo numero di campi di gauge di spin 1 . In questo modo, attraverso il meccanismo dei quanti virtuali di tali campi di gauge, ha luogo l'interazione debole tra le particelle.

La prima domanda che dobbiamo porre è: chi sono i portatori delle cariche di gauge della interazione debole?

Ricordando che l'interazione debole riguarda sia i leptoni che gli adroni e che questi ultimi, sulla base del modello a quark, sono costituiti da quark elementari, dobbiamo concludere che **tutte le particelle del modello standard, sia i leptoni che i quark, sono portatori delle cariche di gauge della interazione debole.**

Quante sono le cariche di gauge della interazione debole e come sono distribuite sui diversi sapori di leptoni e quark?

Mentre nel caso delle interazioni forti, a causa della conservazione del sapore, le cariche di gauge erano 'interne' al sapore dei quark, con le interazioni deboli accade il contrario poiché queste non conservano il sapore né dei quark né dei leptoni. Infatti, nel corso di un processo debole un elettrone, ad esempio, si trasforma in neutrino-elettronico per cui se si vuole descrivere l'interazione debole per mezzo di una teoria di gauge si deve per forza ipotizzare che elettrone e neutrino-elettronico siano due stati di carica debole esattamente come lo sono un quark-up rosso ed un quark-up blu nel caso della interazione forte. Lo stesso dicasi per tutte le altre particelle appaiate dalla interazione debole: muone e neutrino-muonico, tau e neutrino-tauonico, quark up e down, charm e strange, top e bottom, sono tutte coppie di stati diversi di carica debole ovvero coppie di cariche di gauge.

Da ciò consegue che le interazioni deboli richiedono **due cariche di gauge** dette **cariche di isospin debole** [la estesa analogia con il concetto di spin permette di indicare i due stati di carica debole con $(I=1/2, I_3=1/2)$ e $(I=1/2, I_3=-1/2)$] che hanno lo stesso ruolo delle tre cariche di colore in QCD.

La complessa struttura di sapore delle interazioni deboli ora comporta una complessa distribuzione di tali cariche di gauge sui diversi sapori. Per cominciare possiamo dire che i membri delle sei coppie (ν_e, e) , (ν_μ, μ) , (ν_τ, τ) , (u, d) , (c, s) , (t, b) sono portatrici delle due cariche di gauge delle interazioni deboli. Ciò significa che le particelle (sapori) $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, u, c, t$ hanno tutte la prima carica di gauge della coppia $(I=1/2, I_3=1/2)$ mentre le particelle (sapori) e, μ, τ, d, s, b hanno tutte la seconda carica di gauge della coppia $(I=1/2, I_3=-1/2)$. Ora, però dobbiamo tenere conto del miscelamento del sapore nelle interazioni deboli sia dei leptoni che dei quark. Tale fatto comporta che non siano proprio i neutrini ν_e, ν_μ, ν_τ i portatori della carica debole $(I=1/2, I_3=1/2)$ ma,

una grave difficoltà:
le interazioni deboli
sono di cortissimo
raggio d'azione

la necessità di un
nuovo meccanismo
capace di rendere le
interazioni a corto
raggio

piuttosto, loro combinazioni lineari. Analogamente non sono i quark **d**, **s**, **b** i portatori della carica debole ($I_3=1/2, I_3=-1/2$) ma, piuttosto, loro combinazioni lineari.

Se le cariche di gauge sono le due cariche di isospin debole ciò comporta che l'interazione debole venga mediata da ben $2 \times 2 - 1 = 3$ diversi campi di forza nominati **W_+ , W_- e Z_0 dotati essi stessi di carica di isospin debole.**

Questi sono i presupposti basilari della **Teoria Elettrodebole** (EWT), la teoria di campo quantizzato della interazione debole, costruita postulando **l'invarianza della teoria rispetto a trasformazioni del gruppo $SU(2)$ delle cariche di isospin debole.**

A questo punto sorge una grave difficoltà! Infatti le teorie di gauge, che pure estendono al massimo grado il concetto di carica elettrica dell'elettromagnetismo, condividono con esso, in modo inevitabile, la proprietà che i tutti i campi di gauge abbiano massa nulla e quindi un andamento della forza con la distanza del tipo $1/r^2$ analogo a quello della forza elettromagnetica (raggio infinito della interazione). Molto semplicemente, la conseguenza pratica di questo fatto è che i campi di forza deboli **W_+ , W_- e Z_0** dovrebbero essere osservati a grande distanza e quindi anche a livello macroscopico, un fatto che contraddice nel modo più evidente l'esperienza (infatti macroscopicamente si osserva solo l'interazione gravitazionale ed elettromagnetica. Inoltre, già la prima descrizione delle interazioni deboli, quella di Fermi, partiva dall'assunto, anche in seguito in accordo con i fatti sperimentali, che la interazione debole fosse addirittura di contatto ovvero a cortissimo raggio d'azione). Dunque **deve esserci un meccanismo che oscura i campi di forza deboli rendendo l'interazione a corto raggio.**

Nel caso delle interazioni forti (che pure sono a corto raggio ma i cui mediatori, i campi gluonici, hanno massa nulla e dunque raggio d'azione infinito) i campi gluonici sono oscurati dal confinamento che lega le cariche di colore (i quark) all'interno di adroni di colore nullo per cui i campi gluonici esterni all'adrone sono essenzialmente dmultipolari con un rapido andamento a zero. Un simile meccanismo non è pensabile nel caso delle interazioni deboli poiché le coppie di cariche di isospin (ν_e-e), ($\nu_\mu-\mu$), ($\nu_\tau-\tau$), ($u-d$), ($c-s$), ($t-b$), almeno nel caso dei leptoni, sono osservabili come particelle libere il che dimostra che **nel caso delle interazioni deboli non opera alcun meccanismo di confinamento.**

Se si vuole insistere nel descrivere le interazioni deboli con una teoria di gauge, l'unica possibilità è quella di ammettere che, a causa di un qualche meccanismo, i campi deboli W_+ , W_- e Z_0 irradiati da una certa carica d'isospin debole non riescano mai a raggiungere una seconda carica d'isospin debole per creare uno stato legato.

Dato che nelle QFT l'unico modo per accorciare il raggio d'azione di un campo è quello di ammettere che tale

campo abbia massa (scoperto da Yukawa nel 1936), ***l'unica possibilità è quella di ammettere che i campi deboli W^+ , W^- e Z^0 , pur irradiati dalle cariche d'isospin debole senza massa, appena irradiati, attraverso un qualche meccanismo, acquisiscano una massa che impedisce loro di propagarsi.*** Dunque il destino delle teorie di gauge nella descrizione delle interazioni deboli è legato al superamento di un passaggio molto stretto, l'esistenza di un meccanismo capace di conferire massa ai campi deboli W^+ , W^- e Z^0 .

Un po' di storia

Questa era più o meno la situazione in cui si trovava la nascente EWT quando Yang e Mills proposero nel 1954 le teorie di gauge e Pauli, che lavorava su problemi simili, fece quasi subito notare che si trattava di teorie che potevano produrre solo interazioni di raggio infinito e dunque incapaci di descrivere sia le interazioni deboli che forti.

La situazione cambiò gradualmente per merito di un fenomeno della fisica delle basse temperature, la ***superconduttività***. Una delle caratteristiche salienti del fenomeno è che in un materiale superconduttore il campo magnetico interno è nullo (effetto Meissner) il che comporta l'impossibilità, da parte di un'onda elettromagnetica, di penetrarvi. Poiché il coefficiente di penetrazione di un'onda nel mezzo materiale è assimilabile all'inverso di una massa, in termini formali è come se i fotoni, propagandosi nel superconduttore, acquisissero una massa efficace che ne accorcia il cammino a valori piccolissimi. Sempre da un punto di vista formale tale massa efficace determina una perdita della simmetria di gauge dell'elettromagnetismo. In termini fisici, dunque, si capiva che ***un mezzo materiale poteva conferire una massa efficace al fotone conferendogli un raggio d'azione finito.***

Un modello puramente fenomenologico di questo meccanismo, nel caso della superconduttività, fu fornito da Landau e Ginzburg nel 1950 mentre il meccanismo microscopico dettagliato fu compreso da J. Bardeen, L. Cooper e J. Schrieffer nel 1957 che misero in luce che gli elettroni, correlati da una interazione residua a formare coppie (***coppie di Cooper***), andavano a formare un 'mezzo materiale' che conferiva massa efficace alle onde elettromagnetiche (quest'ultimo fatto fu mostrato da Anderson).

Dalla superconduttività, il meccanismo fece il suo ingresso nella fisica delle particelle attraverso i lavori di Y. Nambu, nel 1960, che lo utilizzò per spiegare alcune proprietà delle interazioni forti. Una ***versione relativistica nel contesto di teorie di Yang e Mills*** fu invece discussa, a partire dal 1964, da ***R. Brout e F. Englert, P. Higgs e G. Guralnik, C. Hagen e T. Kibble.*** Essi chiarirono che introducendo un opportuno ***campo scalare nella funzione di mezzo materiale (campo di Higgs)*** i mediatori non massivi di un campo di Yang e Mills potevano acquisire una massa efficace.

Si trattava di lavori di carattere molto generale e gli scopritori di questo meccanismo, curiosamente, non pensarono di applicarlo davvero alle interazioni fondamentali allora note.

A quel tempo molti aspetti delle interazioni deboli erano stati correttamente intuiti da S. Glashow. In particolare la possibilità che la interazione debole ed elettromagnetica potessero essere la manifestazione di una stessa interazione [fu Glashow, nel 1961, a proporre che il gruppo di trasformazioni della teoria di gauge dovesse essere $SU(2) \times U(1)$ estendendo i lavori in tal senso di Schwinger].

Curiosamente, non fu lui a capire il profondo significato dei lavori di Englert ed Higgs (diremo così dato che loro sono stati premiati con il Nobel), bensì S. Weinberg e A. Salam che trapiantarono il meccanismo di Higgs all'interno della EWT di Glashow pervenendo ad una teoria unificata delle interazioni deboli ed elettromagnetiche capace di giustificare il corto raggio d'azione della interazione debole ed il lungo raggio d'azione della interazione elettromagnetica. Si giungeva così alla formulazione della teoria elettrodebole nella sua forma attuale (1967).

Il cerchio teorico si chiuse nel 1971 con i lavori di G. 'tHooft e M. Veltman i quali mostrarono che la EWT era rinormalizzabile (gli inevitabili infiniti della EWT, propri di ogni teoria di campo quantizzato, potevano essere curati nello stesso modo del QED fornendo una teoria capace di fare previsioni quantitative definite e precisissime).

Il cerchio sperimentale si è chiuso, invece, solo lo scorso anno! Nel 1974 vengono scoperte al CERN le correnti deboli neutre (camera a bolle Gargamelle) che dimostrano indirettamente l'esistenza del campo debole Z_0 e della struttura $SU(2)$ della EWT. Nel 1984, C. Rubbia con l'esperimento UA1 presso il CERN, osserva direttamente i campi deboli W^+ , W^- e Z_0 . Nel 2012, gli esperimenti ATLAS e CMS presso il CERN, individuano un segnale compatibile con l'osservazione diretta della particella di Higgs la quale conferma l'intera impalcatura su cui si regge la EWT confermandola come teoria definitiva delle interazioni deboli.

Notevole è pure la quantità di Nobel profusi per premiare i fisici impegnati nella costruzione della EWT: Glashow, Weinberg e Salam (1979), C. Rubbia e S. Van Der Meer (1984), 'tHooft e M. Veltman (1999), Englert e Higgs (2013).

Le interazioni elettromagnetiche

La teoria di campo quantizzato delle interazioni elettromagnetiche, capace di spiegare con enorme precisione i dati sperimentali fino ad oggi noti, viene detta **Elettrodinamica Quantistica** (Quantum Electrodynamics, QED). Come accennato, oggi la QED è parte di una teoria più vasta che descrive anche le interazioni deboli, la EWT.

Come noto alcune semplici caratteristiche della interazione elettromagnetica sono le seguenti:

- i) tutte le particelle materiali (leptoni e quark) dotati di carica elettrica possono interagire elettromagneticamente;
- ii) i processi elettromagnetici sono di due tipi: a) **creazione particella-antiparticella** per ciascuna delle particelle elettricamente cariche del MS (un fotone genera una coppia particella-antiparticella aventi cariche elettriche opposte); b) **una particella carica irradia un campo elettromagnetico mantenendo inalterata la propria identità** (cioè un elettrone rimane un elettrone etc. etc.) il che significa che **l'interazione elettromagnetica conserva il sapore** (in ciò è simile alla interazione forte e diversa da quella debole);

Dal punto di vista del sapore quindi l'interazione elettromagnetica è assai semplice e non richiede l'introduzione di specifici numeri quantici come accade nel caso della interazione debole e, in misura minore, con l'interazione forte.

Quante sono le cariche interne dell'elettromagnetismo? Ora nella QCD dove l'interazione non cambia il sapore queste sono tre, un fatto che non ha una evidenza immediata a causa del confinamento (che nasconde le cariche di colore dentro adroni di colore nullo) ma che è richiesto dai dati sperimentali. Nella EWT, dove il confinamento non opera, le cariche interne immediatamente evidenti poiché devono essere identificate con le particelle che partecipano al processo di irradiazione, vale a dire elettrone neutrino-elettronico etc. etc. Anche nell'elettromagnetismo il confinamento non opera (almeno in senso assoluto) poiché sono osservabili particelle cariche libere come l'elettrone, il muone ed il tau (potremmo citare anche i quark ma questi non sono mai osservati come particelle libere). D'altra parte, come già osservato, il processo di irradiazione non modifica l'identità della particella carica irraggiante per cui dobbiamo concludere che l'elettromagnetismo ha una sola carica interna. Dunque come teoria di gauge esso viene costruito sul gruppo di trasformazioni $SU(1)=U(1)$ di carica elettrica. Da ciò segue che una carica elettrica possa irradiare un solo tipo di campo, il campo elettromagnetico, di carica elettrica nulla. Tale campo è non massivo per cui l'interazione ha raggio infinito. Poiché tutto ciò è in accordo con le proprietà osservate della interazione elettromagnetica non risulta necessario ricorrere a nessun tipo di meccanismo ausiliario. Nella interazione elettromagnetica le teorie di gauge si manifestano nella forma più semplice ed immediata!

Le cariche elettriche delle particelle materiali del Modello Standard sono riportate nelle seguenti tabelle (in unità del modulo della carica dell'elettrone)

leptoni						
	e	ν_e	μ	ν_μ	τ	ν_τ
Q	-1	0	-1	0	-1	0

antileptoni						
	\bar{e}	$\bar{\nu}_e$	$\bar{\mu}$	$\bar{\nu}_\mu$	$\bar{\tau}$	$\bar{\nu}_\tau$
L	1	0	1	0	1	0

quark						
	u	d	c	s	t	b
Q	$2/3$	$-1/3$	$2/3$	$-1/3$	$2/3$	$-1/3$

antiquark						
	\bar{u}	\bar{d}	\bar{c}	\bar{s}	\bar{t}	\bar{b}
Q	$-2/3$	$1/3$	$-2/3$	$1/3$	$-2/3$	$1/3$

Un accenno alle Teorie di Campo Quantizzato

Il concetto di campo quantizzato

La *fisica delle particelle elementari* studia processi che rispondono alle seguenti caratteristiche generali:

- a) coinvolgono particelle di *dimensione subatomica* (scala microscopica);
- b) le energie delle particelle sono spesso molto superiori alle loro energie a riposo collocandosi nel *regime relativistico* ($p \sim mc$) o *ultrarelativistico* ($p \gg mc$);
- c) sono preponderanti i processi nel corso dei quali le particelle si trasformano in altre particelle di diverso numero e tipo (processi di *produzione* o *decadimento*).

In base al punto a) tali processi si collocano nel dominio dei fenomeni quantistici tuttavia i punti b) e c) escludono che la loro descrizione possa avvenire nel contesto della meccanica quantistica classica. Infatti l'equazione di Schroedinger non è valida nel regime relativistico e ultrarelativistico ed inoltre l'interpretazione di Born della funzione d'onda non si presta alla trattazione di processi nei quali avvengono trasformazioni nella tipologia e nel numero delle particelle.

Una versione della meccanica quantistica capace di superare tutte queste limitazioni fu costruita nel ventennio compreso tra il 1925-27 (lavori di Dirac, Heisenberg, Jordan, Pasqual) ed il 1948-49 (lavori di Dyson, Feynman, Schwinger, Tomonaga) con la formulazione della teoria di campo quantizzato della interazione elettromagnetica (Quantum ElectroDynamics, QED).

I concetti di base su cui si fonda la descrizione dei fenomeni quantistici da parte di una teoria di campo quantizzato differiscono radicalmente da quelli che fondano invece la descrizione quantomeccanica classica. Sotto il profilo concettuale sottolineiamo i seguenti aspetti:

- **Il campo.** Si rifiuta la suddivisione classica degli enti fisici in particelle materiali e campi di forza e si afferma *il campo* come unico **ente fisico fondamentale** (es: la particella elettrone deve essere pensata come la manifestazione di un campo elettronico). Come quello classico, **il campo quantizzato è un ente fisico che si estende nello spazio e che può modificare il proprio stato nel tempo** (dinamica del campo);
- **Quantizzazione.** A differenza del campo macroscopico classico, quello della fisica microscopica è soggetto al fenomeno della *quantizzazione* (formalmente imposta attraverso un certa procedura) la quale comporta che *l'energia, la quantità di moto, il momento angolare, etc. etc. posseduto o scambiato dal campo sia sempre multipla di certe quantità minime non divisibili dette **quanti** del campo.*

Alcuni concetti sulle
teorie di campo
quantizzato

Essendo 'frazioni' del campo, tali quanti soddisfano il **principio di sovrapposizione** e danno luogo ai tipici fenomeni della interferenza, diffrazione etc. etc. classicamente definiti come **ondulatori**. Essendo però **portatori di frazioni definite di energia, quantità di moto, etc. etc.** danno luogo anche a fenomeni classicamente definiti come **corpuscolari**. In questo senso, **il quanto è un ente portatore sia di proprietà ondulatorie che corpuscolari** come d'altra parte richiesto dagli esperimenti con particelle microscopiche (si pensi alla interferenza quantomeccanica di due fenditure in regime di singola particella);

- **Accoppiamento tra campi.** Campi diversi possono occupare la stessa regione di spazio. Se, in aggiunta a ciò, sono accoppiati tra loro, allora possono scambiarsi quanti. Si assume sempre che **lo scambio di quanti tra campi accoppiati avvenga in un certo punto dello spazio e del tempo attraverso un processo di natura intrinsecamente statistica.**

Le particelle osservate negli esperimenti altro non sono che i quanti scambiati dai campi con gli apparati di osservazione.

I processi dove il numero e la tipologia delle particelle varia vengono interpretati come trasferimenti di quanti tra campi differenti accoppiati tra loro (un fatto che semplifica in modo determinante la loro descrizione).

Sotto il profilo formale vale la pena richiamare i seguenti fatti:

- **Lo stato del campo.** Lo stato fisico di un campo classico viene descritto precisando, per ciascuno dei suoi modi normali, il valore dell'ampiezza. Lo stato fisico di un campo quantizzato viene descritto precisando, per ciascuno dei suoi modi normali, il numero di quanti. Ciò significa che per descrivere lo stato fisico del campo è necessario, per ciascun modo normale k , descrivere l'insieme dei possibili stati con $n_k=1,2,3,\dots,N,\dots$ quanti. Uno stato con un singolo quanto, analogamente alla singola particella della meccanica quantistica classica, è descritto da un vettore nello spazio di Hilbert H (uno stato senza quanti, invece, da un semplice numero complesso C). Uno stato con due quanti può essere costruito nello spazio prodotto $H \otimes H$, con tre quanti nello spazio prodotto $H \otimes H \otimes H$, con n quanti nello spazio prodotto $H^{\otimes n}$. Nel costruire gli stati a due, tre o più quanti bisogna tenere conto del **principio di indistinguibilità** il quale impone che gli stati siano simmetrici (bosoni) o antisimmetrici (fermioni) rispetto allo scambio dei quanti stessi. Indicheremo tali stati correttamente simmetrizzati con $(H \otimes H)'$, $(H \otimes H \otimes H)'$, etc. etc. Uno spazio dove sia possibile costruire stati con un numero arbitrario di quanti può allora essere costruito attraverso la somma $C \oplus (H) \oplus (H \otimes H)' \oplus \dots \oplus (H^{\otimes n})' \oplus \dots$

Uno spazio di questo tipo deve essere poi costruito per ogni modo normale sicché lo spazio finale è del tipo $[\mathbf{C} \oplus (\mathbf{H}) \oplus (\mathbf{H} \otimes \mathbf{H})' \oplus \dots \oplus (\mathbf{H}^{\otimes n})' \oplus \dots]_1 \oplus [\mathbf{C} \oplus (\mathbf{H}) \oplus (\mathbf{H} \otimes \mathbf{H})' \oplus \dots \oplus (\mathbf{H}^{\otimes n})' \oplus \dots]_2 \oplus \dots$ dove a pedice è indicato il primo modo, il secondo modo, etc. etc. Dunque, partendo dagli stati di singola particella della meccanica quantistica è possibile costruire lo spazio degli stati del campo. Tale spazio prende il nome di **spazio di Fock** e lo stato del campo è rappresentato da un certo **vettore di stato** $|s\rangle$ in tale spazio;

- **La dinamica del campo.** Si intuisce che, in questo tipo di formalismo, la **dinamica del campo** può essere descritta per mezzo di un 'ente' che agendo sullo 'stato del campo' lo modifica. Dunque da un 'operatore' che opera sul 'vettore di stato' del campo. Dato che una variazione dello stato del campo può avvenire in ogni punto dello spazio \vec{r} ed in ogni istante di tempo t per mezzo di un processo intrinsecamente statistico, il suddetto operatore deve dipendere da \vec{r} e t . Giungiamo allora alla conclusione che **il campo è descritto da un operatore $\hat{\Psi}(\vec{r}, t)$ in generale complesso** (i campi classici sono descritti da funzioni dipendenti da \vec{r} e t , quelli quantistici da operatori dipendenti da \vec{r} e t);
 - **Come opera $\hat{\Psi}(\vec{r}, t)$, particelle e antiparticelle.** Un modo per capire come opera $\hat{\Psi}(\vec{r}, t)$ sul vettore di stato è quello di esprimerlo come serie di Fourier complessa (magari in un volume limitato così da avere una distribuzione discreta di modi normali). Si trova allora che i) è necessario introdurre, in corrispondenza di ogni **particella**, una **antiparticella** avente *stessa massa e spin ma 'cariche interne' opposte* (ad esempio elettrone e positone che hanno la stessa massa ma carica elettrica opposta); ii) le ampiezze di Fourier dei diversi modi normali di $\hat{\Psi}(\vec{r}, t)$ devono essere interpretate come operatori capaci di **distuggere una particella** (o quanto) o di **creare una antiparticella** nel modo normale corrispondente. Analogamente si trova che le ampiezze di Fourier dei diversi modi normali dell'operatore aggiunto $\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}, t)$ devono essere interpretate come operatori capaci di **creare una particella** (o quanto) o di **distuggere una antiparticella** nel modo normale corrispondente. Siccome i nostri ragionamenti saranno del tutto qualitativi, nel seguito, quando necessario, in modo sintetico useremo i simboli
 - $\hat{\Psi}$ per indicare **distruzione di una particella** o **creazione di una antiparticella** $\Psi = D_p + C_{\bar{p}}$
 - $\hat{\Psi}^\dagger$ per indicare **creazione di una particella** o **distruzione di una antiparticella** $\bar{\Psi} = D_{\bar{p}} + C_p$
-

-
- **Indistinguibilità.** Si deve ricordare che già nella meccanica quantistica classica i fatti sperimentali richiedono che le particelle dello stesso tipo (ad esempio gli elettroni) non solo siano tra loro identiche ma anche fisicamente indistinguibili. L'indistinguibilità delle particelle identiche è un requisito che deve essere soddisfatto anche nelle teorie dei campi quantizzati dove oltretutto appare essere un concetto assai più naturale dato che le particelle sono identificate con i quanti di specifici campi. Si può mostrare che **per soddisfare l'indistinguibilità quantomeccanica delle particelle identiche è sufficiente costruire gli stati a più particelle in modo che siano simmetrici o antisimmetrici rispetto allo scambio delle particelle stesse** (lo spazio di Fock degli stati del campo deve essere costruito in accordo con questa prescrizione). Da questo fatto discende immediatamente che **due particelle identiche del tipo antisimmetrico non possono coesistere nello stesso stato** ma solo in stati differenti o, equivalentemente, che **il numero di occupazione di uno stato di un campo costituito da particelle del tipo antisimmetrico può essere solo 0 ed 1.**

Nessun limite di questo tipo invece sussiste per le particelle del tipo simmetrico per cui affermiamo che **un numero arbitrario di particelle identiche del tipo simmetrico possono coesistere nello stesso stato** o, equivalentemente, che **il numero di occupazione di uno stato di un campo costituito da particelle del tipo simmetrico può essere qualunque.** Le particelle o quanti del primo tipo sono dette **Fermioni** mentre quelle del secondo tipo sono dette **Bosoni**.

- **Connessione spin-statistica.** All'interno della teoria dei campi quantizzati si riesce a stabilire una fondamentale connessione tra la proprietà di simmetria degli stati e lo spin dei suoi quanti. Si tratta di uno dei teoremi più importanti e generali delle teorie di campo quantizzato, il **teorema spin-statistica** (dimostrato in forma sempre più generale da Fierz, 1939; Pauli, 1940; Schwinger, 1950): **gli stati simmetrici rispetto alla permutazione degli indici di particella sono sempre associati a particelle di spin intero (bosoni) mentre gli stati antisimmetrici rispetto alla permutazione degli indici di particella sono sempre associati a particelle di spin semintero (fermioni);**

- il passaggio dalla meccanica quantistica classica alla teoria di campo quantizzato può essere interpretato come trasformazione della funzione d'onda (che fornisce la densità di probabilità di localizzazione di una particella microscopica) in un campo operatoriale (associato alla distruzione di particelle o creazione di antiparticelle)

operatore di campo nella forma di 'onda' piana

$$\hat{\psi}(\vec{r}, t) = \hat{A}_{\vec{k}, \omega} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

operatore di campo $\hat{A}_{\vec{k}, \omega}$ comprende una parte operatoriale che opera sugli stati ed una parte di spin $s = \sqrt{s(s+1)} \hbar \quad s = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$

parte spazio-temporale : onda piana in campo complesso
parametri dell'onda piana
 $\vec{k} = (2\pi / \lambda) \vec{n} \quad \omega = 2\pi / T$

relazione tra i parametri dell'onda piana e l'energia e l'impulso : relazioni di De-Broglie $E = \hbar \omega \quad \vec{p} = \hbar \vec{k}$

relazioni relativistiche per la energia e l'impulso $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$

relazioni relativistiche + relazioni di De Broglie $\hbar \omega = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad \hbar \vec{k} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad \omega^2 = k^2c^2 + \frac{m^2c^4}{\hbar^2}$

- L'evoluzione temporale degli operatori di campo è data dalle equazioni del campo che possono essere espresse nella forma di **equazioni di evoluzione tipo Schroedinger o Heisenberg**

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi} = H \hat{\psi} \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi} = -(H\hat{\psi} - \hat{\psi}H)$$

Quando il numero di particelle non cambia gli operatori di campo possono essere reinterpretati come funzioni complesse della posizione e del tempo il cui modulo quadro fornisce la densità di probabilità di localizzazione della particella (funzione d'onda della meccanica quantistica classica).

Le interazioni nei campi quantizzati

Le interazioni nel campo classico

Nelle teorie di campo classico, valide macroscopicamente, le interazioni tra particelle materiali vengono descritte per mezzo di uno scambio continuo di energia, quantità di moto etc. etc. attraverso l'intermediazione del campo.

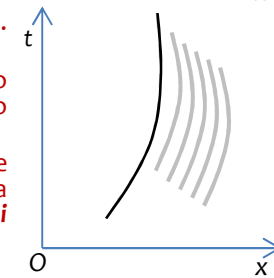
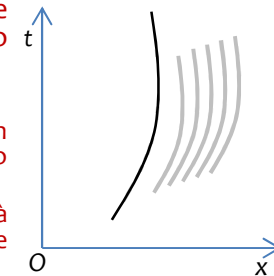
Ad esempio, nel caso dell'elettromagnetismo, una carica elettrica posizionata in un certo punto con una certa velocità, si accoppia con una certa *intensità caratteristica* al campo elettrico e magnetico innalzandone il valore in tutto lo spazio circostante.

Una seconda carica elettrica, posizionata in un secondo punto, si accoppia con la stessa intensità caratteristica a tali campi elettrico e magnetico ricevendone una forza che si traduce in una variazione della sua velocità.

Attraverso questo meccanismo, la prima carica trasferisce frazioni di energia, quantità di moto etc. etc. al campo elettromagnetico che, a sua volta, le trasferisce alla seconda carica.

Il processo elementare su cui si basa l'interazione consiste quindi nella cessione (prima figura) o acquisizione (seconda figura) dal campo elettromagnetico, di frazioni di energia, quantità di moto etc. etc. da parte delle cariche.

Secondo l'elettromagnetismo classico, le frazioni di energia, quantità di moto etc. etc. che le cariche cedono o acquisiscono dal campo possono variare in modo continuo per cui lo scambio risulta assimilabile ad una **sequenza continua di processi elementari e deterministici** di scambio di **frazioni infinitesime** di energia, quantità di moto etc. etc.



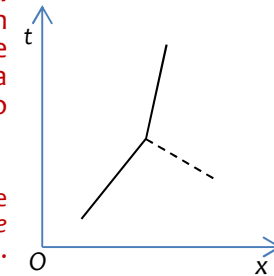
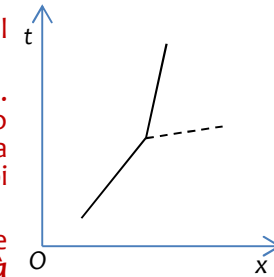
Le interazioni nel campo quantizzato

I fatti sperimentali in ambito microscopico impongono alcune rilevanti modifiche del meccanismo d'interazione del campo classico.

In primo luogo risulta necessario ammettere che le frazioni di energia, quantità di moto etc. etc. scambiate tra particelle e campi, possano variare solo in modo discontinuo attraverso **porzioni minime indivisibili dette quanti** (storicamente questo fatto fu messo in luce da Plank con la sua rivoluzionaria interpretazione della radiazione di cavità ma fu poi confermato come caratteristica generale dei fenomeni microscopici).

In secondo luogo è anche necessario ammettere che lo scambio di tali quanti tra particelle e campi sia **istantaneo e regolato da una legge di natura statistica** con **probabilità proporzionale alla intensità caratteristica della interazione**. Ciò significa che il processo non è deterministico, e, a priori, ciò che è definita è solo la probabilità che avvenga un tale scambio (vastissima è la base empirica di questo fatto, ma potremmo citare l'interferenza quantomeccanica di elettroni ovvero la distribuzione statistica degli elettroni su di uno schermo fotografico preceduto da due fenditure nanometriche).

Ad esempio, nel caso della interazione elettromagnetica lo scambio tra carica e campo deve strutturarsi in una **sequenza discreta** di processi elementari ciascuno corrispondente ad una **cessione (terza figura) o acquisizione (quarta figura) finita ed istantanea** di energia, quantità di moto etc. etc. dal campo da parte della carica.



**l'interazione tra campi
come sequenza di eventi
di creazione e distruzione
di quanti**

Dato che nelle teorie di campo quantizzato, non solo le forze ma anche le particelle materiali sono ricondotte ad altrettanti campi, l'interazione viene di fatto descritta come una sequenza di processi di emissione (creazione) o assorbimento (distruzione) di specifici quanti.

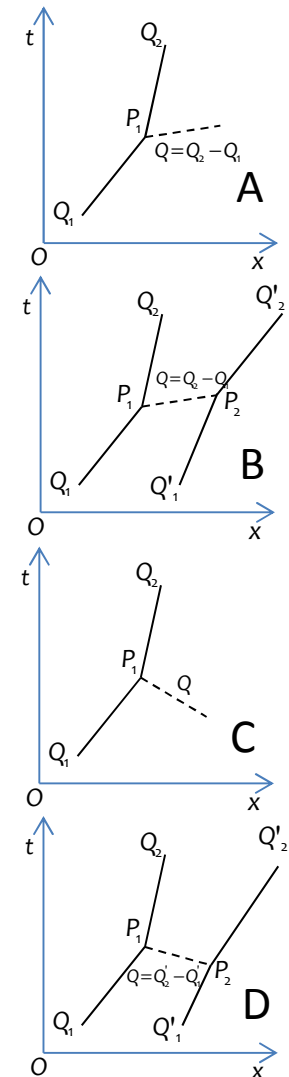
Ad esempio il processo elementare di emissione di un quanto elettromagnetico da parte di un elettrone viene descritto nel modo seguente (A):

- inizialmente l'elettrone si muove con un certo quadrimpulso Q_1 ;
- in un certo punto P_1 dello spazio e del tempo viene *distru*to un quanto del campo elettronico nello stato di quadrimpulso Q_1 e *creato* un quanto elettronico nello stato di quadripulso Q_2 (si noti che l'intero processo corrisponde ad un quanto elettronico che perde un quadripulso Q_2-Q_1);
- contemporaneamente, sempre in P_1 , viene *creato* un quanto del campo elettromagnetico nello stato di quadripulso $Q=Q_2-Q_1$ che si 'propaga' per un certo spazio e per un certo tempo ;
- la distruzione dell'elettrone iniziale e la creazione dell'elettrone e del fotone finali avvengono nel punto P_1 con una probabilità dipendente dalla intensità caratteristica della interazione;
- l'intero processo corrisponde al trasferimento del quadripulso $Q=Q_2-Q_1$ dall'elettrone al quanto del elettromagnetico con una certa definita probabilità.

Se sul cammino del quanto del campo elettromagnetico così emesso si trova un secondo elettrone che si muove con un certo quadripulso Q_2 , allora potranno aversi i seguenti processi (B):

- nel punto P_2 vengono *distru*tti un quanto elettronico nello stato di quadripulso Q_1' ed un quanto del campo elettromagnetico di quadripulso $Q=Q_2-Q_1$; contemporaneamente viene *creato* un quanto elettronico di quadripulso $Q_2'=Q_1'+Q=Q_1'+(Q_2-Q_1)$;
- la distruzione dell'elettrone e del fotone iniziale e la creazione dell'elettrone finale avvengono nel punto P_2 con una probabilità dipendente dalla intensità caratteristica della interazione;
- l'intero processo corrisponde ad un trasferimento del quadripulso $Q=Q_2-Q_1$ tra i due elettroni attraverso lo scambio di un quanto elettromagnetico o fotone.

In modo analogo si descrive il processo di assorbimento di un quanto elettromagnetico da parte di un elettrone (C). Se questo, a sua volta, è stato emesso da un secondo elettrone, allora può aversi il processo del diagramma (D) che si configura anch'esso come un trasferimento di quadripulso tra i due elettroni attraverso i quanti del campo elettromagnetico e che va a contribuire, assieme al diagramma (B), alla interazione tra i due elettroni.



processi associati alle antiparticelle

Come accennato la formulazione relativistica porta inevitabilmente ad introdurre in posizione simmetrica, accanto alle particelle, le antiparticelle aventi stessa massa e spin ma cariche interne opposte.

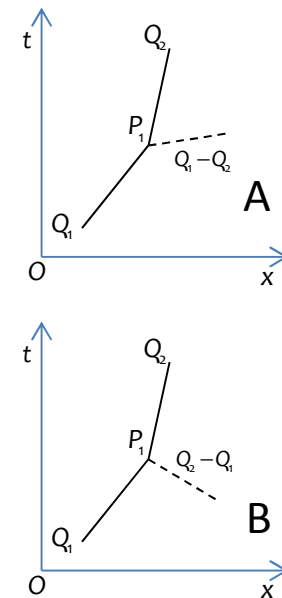
In generale le antiparticelle sono diverse e perfettamente distinguibili dalle particelle (come nel caso degli elettroni e dei positoni). Tuttavia può accadere che, per certi campi, esse coincidano e allora si parla di **campo realmente neutro** ovvero di un campo dove tutte le cariche interne sono nulle (ad esempio il fotone è realmente neutro, mentre il neutrone è solo elettricamente neutro poiché altre 'cariche interne' sono non nulle. Da ciò comprendiamo che la reale neutralità è la condizione di neutralità più forte in assoluto). Da un punto di vista formale si trova che un campo realmente neutro è descritto da *operatori di campo autoaggiunti* mentre un campo non realmente neutro è descritto da *operatori di campo non autoaggiunti*. E' naturale attendersi che l'esistenza delle antiparticelle accanto alle particelle introduca nel gioco della interazione nuovi processi.

Ad esempio l'esistenza del positone accanto all'elettrone introduce la possibilità di processi sconosciuti all'elettromagnetismo classico. Per averne una idea inventiamo una notazione che descriva rapidamente i due diagrammi elementari di emissione e assorbimento di un fotone da parte di un elettrone noti dalla analogia con il campo classico. Riassumiamo il diagramma A con la notazione **DeCeCf** che significa distruzione di un elettrone iniziale e creazione di un elettrone ed un fotone finale. Analogamente il diagramma B sarà indicato con **DeDfCe**.

Come accennato sviluppando coerentemente la teoria si trova che lo stesso operatore di campo $\hat{\Psi}$ descrive sia la distruzione di particelle (**De**=distruzione di un elettrone) che la creazione di antiparticelle (**Cp**=creazione di un positone) mentre l'operatore di campo $\hat{\Psi}^\dagger$ descrive sia la creazione di particelle (**Ce**=creazione di un elettrone) che la distruzione di antiparticelle (**Dp**=distruzione di un positone).

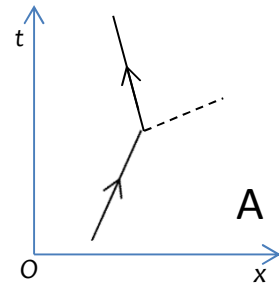
Fatta questa premessa, possiamo pensare di sostituire **De** con **Cp** e **Ce** con **Dp** in tutte le possibili combinazioni nei diagrammi A e B in modo da ottenere altri diagrammi possibili. Otteniamo allora i seguenti processi

$$\begin{aligned}
 & D_e C_e C_f \quad C_p C_e C_f \quad D_e D_p C_f \quad D_p C_p C_f \\
 & D_e D_f C_e \quad D_f C_p C_e \quad D_e D_p D_f \quad D_p D_f C_p
 \end{aligned}$$

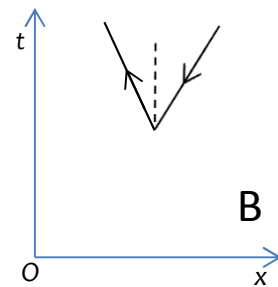


Prima di tradurli in altrettante figure dobbiamo introdurre un qualche segno grafico per distinguere il positone dall'elettrone nel nostro diagramma spaziotemporale. Si potrebbe semplicemente introdurre una linea di tipo diverso ma conviene citare un altro risultato importante secondo il quale **la propagazione di un positone è formalmente equivalente alla propagazione di un elettrone con il tempo invertito**. Ciò significa che possiamo usare una linea continua per rappresentare la propagazione sia di elettroni che di positoni con l'accortezza di inserire una freccia concorde con il tempo nel caso degli elettroni ed una freccia opposta al tempo nel caso dei positoni. A questo punto siamo in grado di costruire facilmente i seguenti otto diagrammi

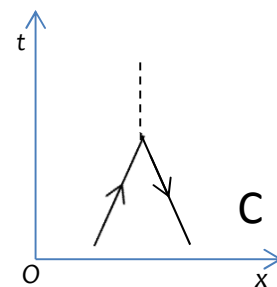
NOTA: vale la pena osservare che in ciascuno di questi diagrammi l'elettrone partecipa sempre con gli operatori Ψ e Ψ^\dagger . Dal punto di vista dell'elettrone dunque il vertice ha la forma $(\Psi^\dagger \dots \Psi)$ dove i puntini indicano altre grandezze associate al vertice che non riportiamo



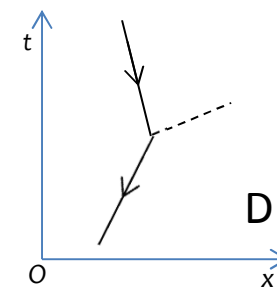
A
elettrone che emette un fotone



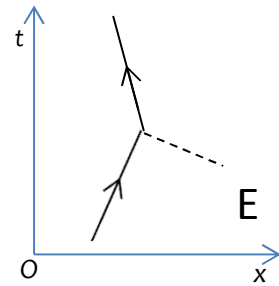
B
creazione di un elettrone, positone e fotone



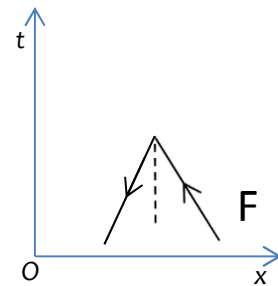
C
annichilazione elettrone positone in un fotone



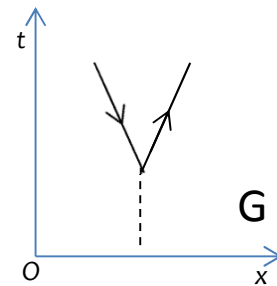
D
positone che emette un fotone



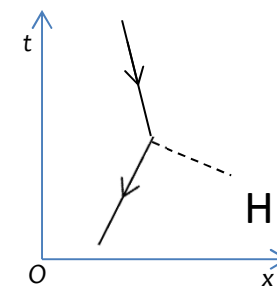
E
elettrone che assorbe un fotone



F
annichilazione di un elettrone, positone e fotone



G
creazione elettrone-positone da un fotone



H
positone che assorbe un fotone

NOTA: non sarà sfuggito che si potrebbero ottenere questi otto diagrammi assumendo A come fondamentale e considerando l'elettrone ed il fotone sia in posizione iniziale che finale in tutte le combinazioni (con l'avvertenza che un elettrone iniziale si scambia in un positone finale e viceversa mentre un fotone iniziale si scambia in un fotone finale).

I diagrammi di assorbimento ed emissione A ed E e D ed H rappresentano processi che hanno un analogo classico mentre i diagrammi B, C, F e G sono processi del tutto nuovi che emergono dal formalismo della teoria dei campi quantizzati combinando la meccanica quantistica e l'invarianza relativistica.

processi di irradiazione e leggi di conservazione

Consideriamo ora un aspetto delicato ma cruciale: i processi elementari rappresentati nei diagrammi della pagina precedente, ed in generale **i processi di emissione od assorbimento di quanti da parte di particelle libere, sono incompatibili con le leggi di conservazione della energia e dell'impulso** e come tali, essendo tali leggi di conservazione fuori discussione, non possono avvenire nel modo indicato.

Per vederlo nel caso più generale immagineremo che a causa dell'accoppiamento esistente tra due campi massivi X e Y, una particella libera massiva (quanto di X) irradia una particella massiva (quanto di Y) secondo un processo che Mandelstam chiamò **canale t**. Dalla **conservazione del quadrimpulso nel vertice P₁** otteniamo

$$Q_1 = Q_2 + Q \quad (\varepsilon_1, c\vec{p}_1) = (\varepsilon_2, c\vec{p}_2) + (\varepsilon, c\vec{p}) \quad \varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \quad \vec{p} = \vec{p}_1 - \vec{p}_2$$

dove Q₁ e Q₂ sono i quadrimpulsi delle particelle libere che devono pertanto soddisfare le relazioni energia-impulso della teoria della relatività ristretta

$$\varepsilon_1 = \sqrt{p_1^2 c^2 + m^2 c^4} \quad \varepsilon_2 = \sqrt{p_2^2 c^2 + m^2 c^4}$$

Da queste possiamo calcolare la massa M' con cui il quanto Y viene irradiato

$$M'^2 c^4 = \varepsilon^2 - p^2 c^2 = 2(m^2 c^4 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 c^2)$$

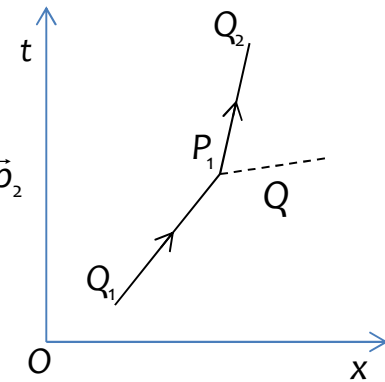
Notiamo che il secondo membro dipende dalla cinematica ed è inoltre sempre negativo. Infatti nel riferimento in cui la particella iniziale è ferma si ha

$$\varepsilon_1 = mc^2 \quad \vec{p}_1 = 0 \quad \varepsilon_2 = \sqrt{p_2^2 c^2 + m^2 c^4} \quad \vec{p}_2 = -\vec{p}$$

da cui

$$M'^2 c^4 = \varepsilon^2 - p^2 c^2 = 2 mc^2 (mc^2 - \sqrt{p_2^2 c^2 + m^2 c^4}) < 0 \text{ se } p_2 \neq 0 \quad (1)$$

dove l'ultima condizione indica che è avvenuta l'emissione. Dunque, **la massa M' della quanto emesso nel canale t è variabile ed immaginaria.**



In modo analogo possiamo affrontare il caso in cui due particelle annichilano emettendo il quanto di un campo massivo secondo un processo che Mandelstam chiamò **canale s**. Dalla **conservazione del quadrimpulso nel vertice P1** otteniamo

$$Q_1 + Q_2 = Q \quad (\varepsilon_1, c\vec{p}_1) + (\varepsilon_2, c\vec{p}_2) = (\varepsilon, c\vec{p}) \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad \vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

dalle quali otteniamo la massa M' con cui il quanto Y viene irradiato

$$M'^2 c^4 = \varepsilon^2 - p^2 c^2 = 2(m^2 c^4 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 c^2)$$

Il secondo membro dipende dalla cinematica ed è sempre maggiore di $4m^2 c^4$. Infatti nel riferimento del centro di massa si ha

$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$$

da cui

$$M'^2 c^4 = \varepsilon^2 - p^2 c^2 = 4(m^2 c^4 + p_2^2 c^2) > 4 m^2 c^4 \quad \text{se } p_2 \neq 0 \quad (3)$$

dove l'ultima condizione indica che è avvenuta l'emissione. Dunque, **la massa M' del quanto emesso nel canale s è variabile, reale e tale che $M' > 2m$.**

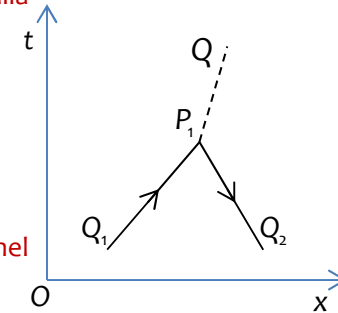
Trovata la massa dei quanti che intervengono nel processo di irradiazione ovvero dei **quanti interagenti**, ricordiamo che invece la massa dei quanti che non intervengono nel processo di irradiazione ovvero dei **quanti liberi** devono avere una massa **M costante, reale e positiva** tale da soddisfare la relazione

$$\varepsilon^2 - p^2 c^2 = M^2 c^4 \quad (5)$$

quanti virtuali e quanti reali

Sulla base della conservazione della energia e dell'impulso concludiamo che **la massa con cui il quanto di un campo massivo Y si propaga nello stato libero è costante reale e positiva e soddisfa la relazione relativistica energia-impulso mentre quella con cui si 'propaga' nello stato interagente è variabile reale o complessa e viola la relazione relativistica energia-impulso.**

Nel primo caso si parla di **quanti reali** o di **quanti on-shell** mentre nel secondo di **quanti virtuali** o di **quanti off-shell**. Il fatto che nella teoria dei campi quantizzati, accanto ai quanti reali, debbano esistere corrispondenti quanti virtuali fu una delle cause che maggiormente ne ostacolarono l'accettazione da parte della comunità scientifica. Le resistenze si attenuarono gradualmente quando risultò chiaro **che i quanti virtuali erano ammessi dalle leggi della meccanica quantistica** e che, oltretutto, trovavano una conferma in alcuni piccoli ma fondamentali effetti misurati sperimentalmente (vedi più avanti).



i quanti virtuali sono ammessi dalla meccanica quantistica

Possiamo cercare di capire questo punto tenendo conto della meccanica quantistica attraverso le **relazioni di indeterminazione**

$$\Delta \varepsilon \Delta t \sim h \quad \Delta p \Delta x \sim h \quad (6)$$

che possono essere rilette affermando **su intervalli spaziali e temporali via via più piccoli, un fenomeno microscopico è soggetto a fluttuazioni spontanee dell'impulso e della energia sempre più grandi.**

Immaginiamo allora che il fenomeno microscopico consista nella emissione di un quanto Y da parte del quanto libero X a causa dell'accoppiamento tra i rispettivi campi. Siccome vale la conservazione della energia e dell'impulso nel vertice di emissione, sappiamo che il quanto emesso Y deve necessariamente essere virtuale. Ora si tratta di stabilire se un simile quanto virtuale possa in qualche modo esistere oppure no.

A questo proposito ricordiamo che un quanto esistente come particella reale soddisfa la relazione energia-impulso data dalla (5) per cui la risposta parrebbe essere negativa. Osserviamo però che, secondo la meccanica quantistica, a scale temporali e spaziali sempre più corte esistono fluttuazioni spontanee della energia e dell'impulso sempre più grandi. Tali fluttuazioni alterano in modo incontrollato i valori dell'impulso e della energia trasportate dal quanto reale e quindi anche il valore della massa calcolata attraverso la (5). Entro scale spaziali e temporali sempre più corte il quanto reale assume quindi sempre più le caratteristiche di un corrispondente quanto virtuale. Differenziando rispetto ad E e p, dalla (5) otteniamo facilmente

$$\Delta M = \frac{E}{Mc^4} \Delta E \quad \Delta M = \frac{p}{Mc^2} \Delta p \quad (7)$$

Assumendo come **condizione di virtualità** che le fluttuazioni sulla massa siano almeno dell'ordine della massa stessa

$$\Delta M \geq M \quad (7a)$$

e sostituendo nella (7) otteniamo le seguenti **condizioni approssimate sull'ampiezza delle fluttuazioni spontanee necessarie a creare uno stato virtuale la cui massa (calcolata come stato libero) vale M**

$$\Delta E \geq \frac{M^2 c^4}{E} \quad \Delta p \geq \frac{M^2 c^2}{p}$$

Tenendo ora conto delle relazioni di indeterminazione (6) otteniamo dalle (7)

$$c\Delta t \leq \frac{h}{Mc} \quad \Delta x \leq \frac{h}{Mc} \quad (8)$$

dove il quoziente h/Mc viene detta **lunghezza Compton**. Concludiamo allora che secondo **la meccanica quantistica i quanti reali di un campo massivo possono sussistere illimitatamente nel tempo e propagarsi illimitatamente nello spazio mentre i corrispondenti quanti virtuali possono esistere solo entro intervalli temporali e spaziali dell'ordine della lunghezza Compton. Nel caso particolare in cui il campo non sia massivo i corrispondenti quanti virtuali possono esistere senza limitazioni spaziali e temporali.**

Non può sfuggire come tutto ciò suggerisca l'idea che i quanti virtuali massivi siano coinvolti nelle interazioni naturali a corto raggio come quelle deboli e forti (?) mentre quelli non massivi nelle interazioni naturali a lungo raggio come quelle elettromagnetiche o gravitazionali.

I PROCESSI OSSERVABILI. Quando due campi sono accoppiati tra loro, le particelle libere dell'uno possono irradiare solo quanti virtuali dell'altro. Come più volte detto, tali quanti virtuali possono esistere solo per intervalli temporali e spaziali limitati dopodiché devono essere necessariamente riassorbiti o dalla particella che li ha emessi o da una seconda particella dello stesso tipo che si trovi all'interno del raggio della interazione.

Questo significa che, nel caso di particelle libere, i processi con un solo vertice di emissione non possano realizzarsi essendo richiesto almeno un secondo vertice di assorbimento. Dunque **i processi osservabili più semplici devono avere almeno due vertici.**

Nel caso della interazione elettromagnetica, possiamo cercare di costruire tutti processi a due vertici con le semplici prescrizioni di pag 38.

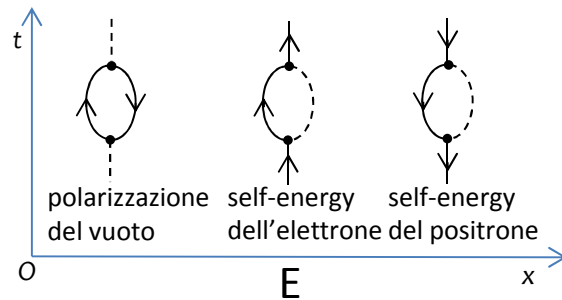
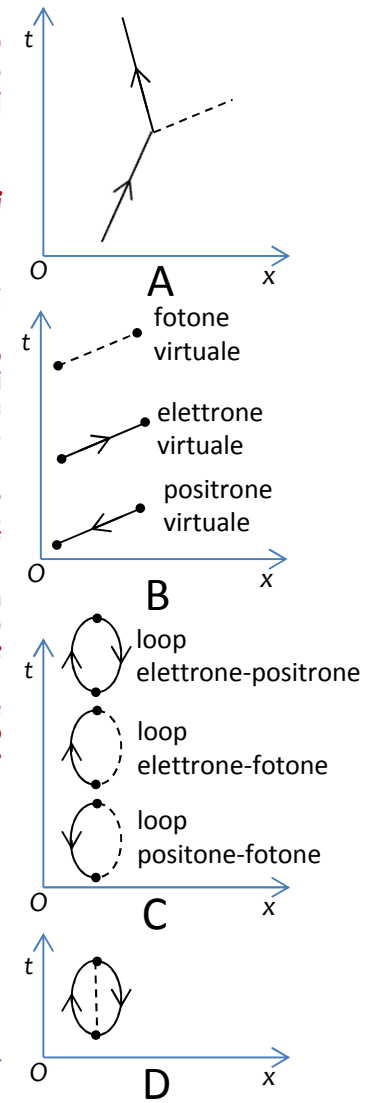
Assumendo il diagramma A come rappresentativo del vertice della interazione elettromagnetica, notiamo che da esso arrivano o si dipartono tre particelle di cui un fotone e due elettroni. Ciò significa che tra due vertici elettromagnetici potranno trovarsi uno, due o al massimo tre particelle virtuali. Nel caso di una particella virtuale abbiamo le possibilità rappresentate in B, con due particelle virtuali quelle rappresentate in C e con tre particelle virtuali solo il diagramma D. Naturalmente i diagrammi rappresentati in B, C e D vanno completati in modo da avere i giusti vertici elettromagnetici.

Notiamo subito che il diagramma D è già completo. Esso rappresenta un processo che può avvenire sempre e comunque, indipendentemente da tutti altri (diagramma sconnesso) gli nel quale spontaneamente dal vuoto si generano un elettrone, un positrone ed un fotone virtuali che vengono poco dopo distrutti. Si può mostrare che *tale processo non da mai contributi osservabili* (inessenziale fattore di fase nell'ampiezza del processo).

I diagrammi C possono essere completati solo nei modi indicati in E. Il primo, detto **polarizzazione del vuoto**, descrive un processo dove un preesistente campo elettromagnetico (fotone) irradia una coppia virtuale elettrone-positrone subito dopo assorbita. Un tale processo dovrebbe produrre effetti osservabili dato che farebbe comparire un dipolo transiente che potrebbe orientarsi nel campo elettrico generato dalla carica stessa che ha prodotto il campo iniziale schermandola.

Il secondo ed il terzo sono detti **self-energy dell'elettrone e del positrone** e descrivono il processo di emissione e riassorbimento di un fotone virtuale da parte di elettroni e positroni liberi. Un tale processo rappresenta di fatto un campo elettromagnetico transiente associato alle cariche, portatore, come tutti i campi, di una energia addizionale che dovrebbe contribuire alla inerzia complessiva dell'elettrone e del positrone.

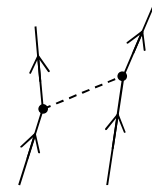
Naturalmente il destino della teoria si gioca sulla sua capacità di fornire una previsione quantitativa degli effetti citati e, soprattutto, sulla conferma in sede sperimentale degli stessi. Furono entrambi problemi formidabili perché il calcolo dell'ampiezza di diagrammi come quello della polarizzazione del vuoto e della self energia forniva una **probabilità infinita** priva di senso e gli esperimenti per verificarne gli effetti di una difficoltà proibitiva. Come diremo tra non molto entrambi i problemi si risolsero quasi contemporaneamente sul finire degli anni '40 con la formulazione della teoria di campo quantizzato della interazione elettromagnetica (QED) capace di previsioni di una precisione sbalorditiva.



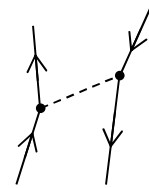
Naturalmente il destino della teoria si gioca sulla sua capacità di fornire una previsione quantitativa degli effetti citati e, soprattutto, sulla conferma in sede sperimentale degli stessi. Furono entrambi problemi formidabili perché il calcolo dell'ampiezza di diagrammi come quello della polarizzazione del vuoto e della self energia forniva una **probabilità infinita** priva di senso e gli esperimenti per verificarne gli effetti di una difficoltà proibitiva. Come diremo tra non molto entrambi i problemi si risolsero quasi contemporaneamente sul finire degli anni '40 con la formulazione della teoria di campo quantizzato della interazione elettromagnetica (QED) capace di previsioni di una precisione sbalorditiva.

Completiamo ora i diagrammi B. Hanno luogo diverse classi di processi quali **la diffusione elettrone-elettrone (Moller scattering), elettrone-positone (Bhabha scattering), positone-positone, elettrone-fotone e positone-fotone (Compton scattering) ed infine la produzione di coppie elettrone-positone da due fotoni e l'annichilazione di coppie elettrone-positone in due fotoni**. E' importante sottolineare che di questi processi **la teoria fornisce previsioni verificate sperimentalmente con grande precisione**.

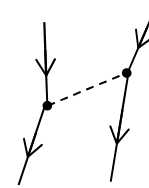
Dunque, premesso che alcuni diagrammi a due vertici pongono il problema delle ampiezze di valore infinito, rimane il fatto che la teoria prevede correttamente altri processi fornendo un modello microscopico della interazione. Come si può vedere, **dati due campi interagenti (in questo caso elettrone-positone e campo elettromagnetico) l'interazione tra particelle libere di questi campi (fotone, elettrone o positone) è sostanzialmente basata sullo scambio di quanti virtuali degli stessi campi**.



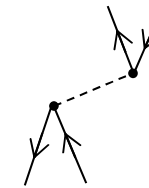
diffusione
elettrone-elettrone
(Moller Scattering)



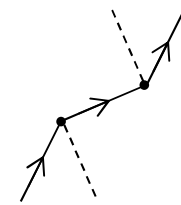
diffusione
elettrone-positone
(Bhabha Scattering)



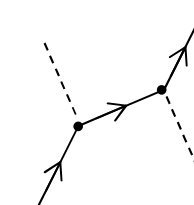
diffusione
positone-positone



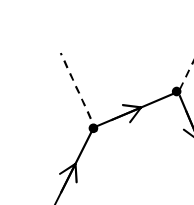
diffusione
elettrone-positone
(Bhabha Scattering)



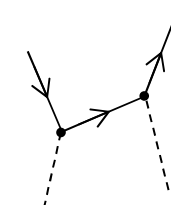
diffusione
elettrone-fotone
(Compton Scattering)



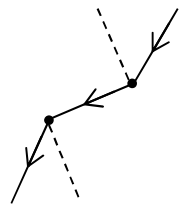
diffusione
elettrone-fotone
(Compton Scattering)



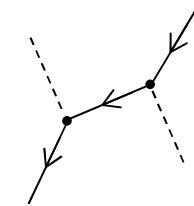
annichilazione
elettrone-positone
in due fotoni



produzione di una coppia
elettrone-positone
da due fotoni



diffusione
positone-fotone
(Compton Scattering)



diffusione
positone-fotone
(Compton Scattering)

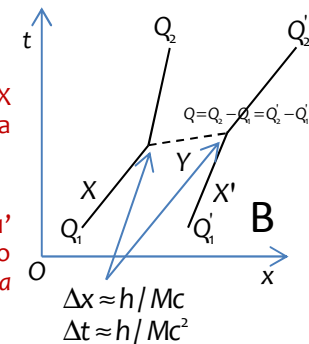
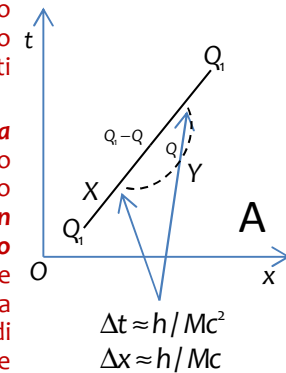
UN MODELLO MICROSCOPICO PER LA INTERAZIONE. Il primo ad intuire che il modello d'interazione microscopica emergente dai processi elettromagnetici poteva rappresentare un modello generale per le interazioni naturali fu H. Yukawa. In un fondamentale lavoro pubblicato nel 1936, egli mostra che estendendo tale modello al caso di quanti virtuali di campi massivi si possono descrivere all'interno dello stesso schema sia le interazioni a corto raggio che quelle a lungo raggio. Si tratta di un avanzamento decisivo verso una interpretazione unitaria delle interazioni naturali, poiché si intuisce che le proprietà assai differenti con le quali si manifestano possono essere ricondotte a diverse proprietà dei quanti virtuali scambiati e non al sottostante meccanismo che è invece sempre lo stesso.

Immaginiamo che un **campo massivo X** sia accoppiato ad un secondo **campo massivo Y** con una certa **accoppiamento caratteristico**. Se X è soggetto ad una forza esterna, la validità delle leggi di conservazione della energia e dell'impulso sono assicurate dalla forza stessa, ed X potrà certamente emettere o assorbire quanti reali di Y con il suddetto accoppiamento caratteristico. Se, invece, X è libero, potrà emettere o assorbire (con lo stesso accoppiamento caratteristico) solo quanti virtuali di Y che possono sussistere solo per intervalli spaziali e temporali dell'ordine della loro lunghezza Compton.

Se X è libero ed isolato, in tali intervalli non cadrà alcuna altra particella ed **il quanto virtuale Y non potrà che essere riassorbito da X** stesso. Se, invece, X è libero ma non isolato, in tali intervalli potrà cadere una seconda particella libera X' (magari quanto dello stesso campo X) che potrà assorbire il quanto virtuale Y (con lo stesso accoppiamento caratteristico della interazione) dando luogo ad un processo che, nel complesso, si configura come **una interazione tra X e X' mediata dal quanto virtuale Y, con raggio d'interazione finito dell'ordine della lunghezza Compton di Y, e intensità data dal quadrato dell'accoppiamento caratteristico della interazione**. Nel caso particolare in cui il campo Y sia non massivo, il corrispondente raggio della interazione diventa infinito (come nel caso dell'elettromagnetismo). In questo modo si descrivono, con un solo modello, le interazioni sia a lungo che a corto raggio. È importante sottolineare che, in tutti questi casi, il processo di assorbimento e/o di emissione di quanti virtuali (ma anche reali) si assume sia **intrinsecamente probabilistico** con una probabilità che misura l'intensità di ciò che abbiamo chiamato accoppiamento caratteristico.

Da un punto di vista formale il processo viene descritto nel modo seguente:

- inizialmente un *quanto libero* di X si muove con un certo quadrimpulso (o stato) Q_1 ;
- in un certo punto P_1 dello spazio e del tempo viene distrutto un quanto reale X nello stato Q_1 , creato un quanto reale X nello stato Q_2 , creato un quanto virtuale Y nello stato $Q=Q_2-Q_1$ che si 'propaga' per spazi e per tempi dell'ordine della sua lunghezza Compton. Tutto ciò con la *probabilità caratteristica della interazione*;
- se X è isolato, il quanto Y non può che essere riassorbito da X stesso (A);
- se X non è isolato può accadere che all'interno di tali lunghezze Compton cada un secondo quanto X' di quadrimpulso Q_1' (B). In tal caso, in un certo punto P_2 potrà essere distrutto, sia il quanto virtuale di Y di quadrimpulso Q_2-Q_1 che il quanto reale X' di quadrimpulso Q_1' , e creato il quanto reale finale di quadrimpulso Q_2' . Il tutto con la *probabilità caratteristica della interazione*.



In modo euristico risulta anche possibile stimare le forze macroscopiche che insorgono per mezzo di questo **meccanismo microscopico** basato sullo scambio di quanti virtuali.

Ricordiamo che la condizione di virtualità di uno stato libero massivo sono date dalle

$$\Delta E \geq \frac{M^2 c^4}{E} \quad \Delta p \geq \frac{M^2 c^2}{p}$$

Ponendoci sul limite inferiore in entrambi i casi, otteniamo facilmente la seguente *relazione tra le intensità delle fluttuazioni nella energia e nell'impulso*

$$\Delta E \approx \frac{pc^2}{E} \Delta p$$

Tenendo conto delle relazioni di indeterminazione della energia otteniamo la seguente stima del **tempo di emissione del quanto virtuale**

$$\Delta t_e \approx \frac{hE}{pc^2} \frac{1}{\Delta p_e}$$

e quindi anche la seguente espressione della **forza dovuta alla emissione del quanto elementare**

$$\Delta F_e \approx \frac{\Delta p_e}{\Delta t_e} \approx \frac{c}{h} \frac{pc}{E} \Delta p^2 \approx \frac{c}{h} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{mc}{p}\right)^2}} \Delta p^2 \approx \frac{c}{h} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{mc}{\Delta p}\right)^2}} \Delta p^2$$

dove abbiamo posto i valori centrali dell'impulso uguali al valore delle fluttuazioni. **Tenendo ora conto delle relazioni di indeterminazione dell'impulso otteniamo**

$$\Delta F_e \approx \frac{hc}{\sqrt{1 + \left(\frac{mc}{h} \Delta x\right)^2}} \frac{1}{\Delta x^2} \quad (8)$$

Notiamo subito che nel caso di quanti non massivi si ottiene un andamento spaziale della forza del tipo $1/r^2$ mentre nel caso di quanti massivi la forza si spegne più rapidamente in un modo controllato essenzialmente dalla lunghezza Compton.

Ora possiamo cercare di scrivere l'espressione macroscopica della forza intercorrente tra due particelle libere accoppiate al medesimo campo Y massivo immaginando che ciascuna di esse possa emettere o assorbire quanti virtuali di Y secondo un processo statistico dove il tempo medio tra due emissioni-assorbimenti successivi vale ΔT_{ee} . Ipotizzando che nell'intervallo di tempo macroscopico vi siano N atti di emissione o assorbimento otteniamo

$$F^{macro} \approx \frac{\Delta P^{macro}}{\Delta T} \approx \frac{\sum_{j=1}^N \Delta P_j^{micro}}{\Delta T} \approx \frac{\sum_{j=1}^N \Delta T_{je} \frac{\Delta P_j^{micro}}{\Delta T_{je}}}{N \Delta T_{ee}} \approx \frac{N \Delta T_e \Delta F_e}{N \Delta T_{ee}} \approx \left(\frac{\Delta T_e}{\Delta T_{ee}} \right) \Delta F_e \quad (9)$$

dove, abbiamo preso gli elementi della sommatoria tutti uguali e di valore ΔF_e pensato come valore medio. Notiamo che l'intensità della forza dipende dal quoziente adimensionale $(\Delta T_e / \Delta T_{ee})$ tra il tempo medio di emissione o assorbimento del quanto ed il tempo medio intercorrente tra due successive emissioni-assorbimenti. E' naturale assumere tale quoziente come una *misura della intensità della interazione* poiché assume un valore elevato quando il tempo tra due emissioni-assorbimenti successivi è breve, ovvero l'interazione è intensa, e viceversa. Per avere una quantità definita nel singolo vertice di emissione o assorbimento introdurremo la seguente **intensità adimensionale della interazione**

$$\delta^2 = \left(\frac{\Delta T_e}{\Delta T_{ee}} \right) \quad (10)$$

Sostituendo, otteniamo la seguente espressione della **forza macroscopica tra due particelle dovuta agli atti elementari di emissione e/o assorbimento di quanti virtuali del campo Y**

$$F^{macro} \approx \delta^2 \frac{hc}{\sqrt{1 + \left(\frac{mc}{h} \Delta x \right)^2}} \frac{1}{\Delta x^2} \quad (11)$$

Il profilo spaziale, invece, risulta essenzialmente regolato dalla massa m del campo cui appartengono i quanti virtuali emessi/assorbiti. Nel caso di massa m non nulla l'interazione diminuisce rapidamente oltre la lunghezza compton mentre nel caso di massa nulla diminuisce con un profilo $1/r^2$.

Nel caso della forza elettromagnetica l'espressione (9), ponendo $m=0$, può essere confrontata con la legge di Coulomb. Si ottiene

$$F^{Coulomb} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\Delta x^2} \approx \delta^2 \frac{hc}{\Delta x^2}$$

da cui

$$\delta^2 = \left(\frac{\Delta T_e}{\Delta T_{ee}} \right) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{hc} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c}$$

La quantità adimensionale a secondo membro occupa un ruolo fondamentale nella teoria di campo quantizzato della interazione elettromagnetica (ed in generale in tutte le trattazioni quantistiche del campo elettromagnetico) e viene detta **costante di struttura fina** indicata con il simbolo α

$$\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c} = 1/137.035999074(44)$$

Otteniamo allora che l'intensità della interazione elettromagnetica, nel senso precisato poco fa, è proprio misurato dalla costante adimensionale di struttura fina

$$\left(\frac{\Delta T_e}{\Delta T_{ee}} \right) \approx \alpha \approx \frac{1}{137}$$

Tale formula interpreta la costante di struttura fina chiarendo che **nella interazione elettromagnetica il tempo intercorrente tra due successive emissioni/assorbimenti è in media 137 volte più lungo del tempo di emissione del singolo quanto.**

Consideriamo ora il caso di una interazione con $m \neq 0$ che da luogo ad una interazione a corto raggio. A distanze **molto maggiori della lunghezza compton** la forza assume la forma seguente

$$F^{macro} \approx \delta^2 \frac{hc}{\sqrt{1 + \left(\frac{mc}{h} \Delta x \right)^2}} \frac{1}{\Delta x^2} \approx \left(\delta^2 \frac{1}{m} \right) \frac{h^2}{\Delta x^3}$$

da cui si vede che **a tali distanze non risulta possibile stabilire se l'intensità osservata della forza sia dovuta ad una certa intensità della interazione nel vertice di emissione/assorbimento oppure ad una certa massa del quanto virtuale emesso.**

Ad esempio, vedremo nel caso della interazione debole che ciò comporta che a grandi distanze, ovvero attraverso processi con basso impulso trasferito, non sia possibile stabilire se la debolezza della interazione sia dovuta ad una piccola intensità al vertice o ad una grande massa del mediatore dell' interazione. La teoria unificata delle interazioni deboli ed elettromagnetiche mostrerà che l'intensità al vertice è quella del processo elettromagnetico e che l'interazione appare debole solo perché mediata da quanti virtuali molto massivi.

Tornando alla (9) possiamo ottenere una **espressione approssimata all'interno della lunghezza Compton** sviluppando in serie

$$F^{macro} \approx \delta^2 \frac{hc}{\sqrt{1 + \left(\frac{mc}{h} \Delta x\right)^2}} \frac{1}{\Delta x^2} \approx \delta^2 \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{h} \Delta x\right)^2\right] \frac{1}{\Delta x^2} \approx \delta^2 \left[\frac{1}{\Delta x^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{h}\right)^2\right]$$

da cui ricaviamo il potenziale

$$V^{macro} \approx \delta^2 \left[\frac{1}{\Delta x} + \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{h}\right)^2 \Delta x\right] \approx \delta^2 \frac{1}{\Delta x} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{h} \Delta x\right)^2\right] \approx \delta^2 \frac{1}{\Delta x} \left[1 - \left(\frac{mc}{h} \Delta x\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{h} \Delta x\right)^2\right]$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo aggiunto un ininfluente termine costante nel potenziale che però ci permette di riconoscere i primi tre termini dello sviluppo in serie di $\exp\left(-mc \frac{\Delta x}{h}\right)$. Otteniamo allora

$$V^{macro} \approx \delta^2 \frac{1}{\Delta x} e^{-\frac{mc}{h} \Delta x} \approx \delta^2 \frac{1}{x} e^{-\frac{x}{h/mc}} \quad (12)$$

che è in effetti il **potenziale di Yukawa** introdotto per descrivere le forze mediate dallo scambio di quanti virtuali massivi.

Queste considerazioni di natura qualitativa dovrebbero comunque avere chiarito che le particelle virtuali giocano un ruolo fondamentale nei processi microscopici che sono alla base del meccanismo della interazione tra particelle. E' utile riassumere ciò che abbiamo detto

- i) quando due campi X e Y sono accoppiati tra loro, una *particella X emette o assorbe quanti di Y* (e viceversa);
- ii) il processo di emissione e assorbimento di Y da parte di X è *intrinsecamente probabilistico* e regolato da una *intensità caratteristica adimensionale* δ sostanzialmente connessa al tasso dei processi di emissione o assorbimento ;

-
- i) se la particella X è soggetta ad una *forza esterna* allora può irradiare *quanti reali di Y* ma se è *libera* può irradiare solo *quanti virtuali di Y* ;
 - ii) mentre i quanti reali di Y (se stabili) possono propagarsi liberamente nello spazio e nel tempo, i quanti virtuali possono sussistere solo attraverso le *fluttuazioni spontanee* della energia e dell'impulso esistenti alle piccole scale temporali e spaziali descritte dalle relazioni di indeterminazione. Tali fluttuazioni spontanee sono in grado di sostenere gli stati virtuali entro limiti spaziali e temporali stimati dalla *lunghezza compton di Y* ;
 - iii) se la particella X è *isolata* il quanto virtuale Y viene riassorbito da X stessa, ma se X non è isolata, allora Y può essere assorbito da una seconda particella X' realizzando un trasferimento netto di energia e quantità di moto tra X e X' per mezzo di Y che rappresenta l'evento microscopico alla base del processo di interazione;
 - iv) l'intensità ed il profilo spaziale della interazione è governato da due parametri, l'intensità adimensionale δ di emissione o assorbimento al vertice e la massa m del quanto virtuale irradiato;
 - v) se la massa m del quanto irradiato è nulla allora gli stati virtuali possono estendersi illimitatamente nello spazio e nel tempo (ovvero i quanti virtuali possono essere scambiati tra particelle infinitamente distanti nello spazio e nel tempo) e si ha una interazione di *raggio infinito* inversamente proporzionale al quadrato della distanza;
 - vi) se la massa m del quanto irradiato è non nulla, gli stati virtuali possono estendersi solo entro i limiti spaziali e temporali stimati dalla *lunghezza compton di Y* (ovvero i quanti virtuali possono essere scambiati tra particelle la cui distanza nello spazio e nel tempo non eccede di troppo la lunghezza compton di Y) e si ha una interazione di *raggio finito* che scende rapidamente a zero con la distanza (il potenziale della interazione dipende da un esponenziale negativo!);
 - vii) l'intensità di una interazione di raggio finito, ad un certa distanza, dipende dalla intensità al vertice δ e dalla massa m del quanto virtuale scambiato. Ciò comporta che, se non si ha la possibilità di esplorare tutte le distanze, esistano diverse combinazioni di valori di δ ed m compatibili con l'intensità osservata per cui la stessa forza può essere spiegata con un elevato valore δ ed un grande valore di m oppure con un piccolo valore di δ ed un piccolo valore di m .

CONSEGUENZE INEVITABILI DEI QUANTI VIRTUALI. Se da una lato i quanti virtuali forniscono un meccanismo microscopico per le interazioni naturali, dall'altro comportano una serie di conseguenze che, almeno inizialmente, costituiscono una seria difficoltà per l'intera teoria.

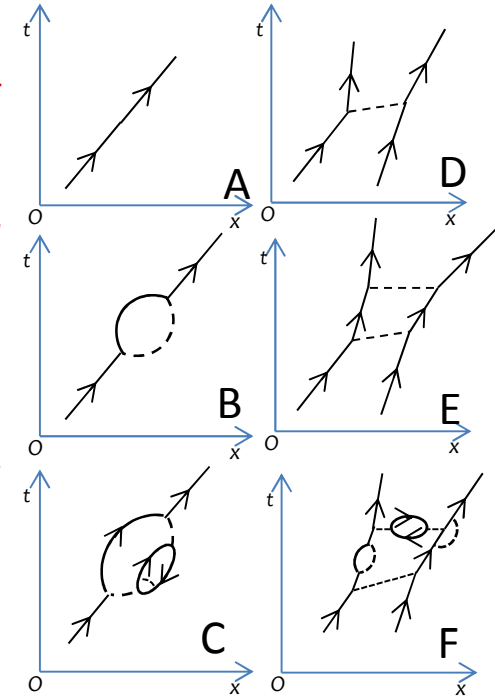
Quando due campi X e Y sono accoppiati tra loro con una certa intensità caratteristica accade che il quanto libero X abbia una certa probabilità caratteristica di irradiare quanti virtuali di Y. Se X non è isolato è possibile che tali quanti virtuali Y vengano assorbiti da X' dando luogo ad una interazione tra X e X' mediata da Y. E' evidente che tale meccanismo presuppone che **la emissione di quanti virtuali Y da parte di X sia un processo continuo ed inarrestabile** che avviene sempre anche quando X è libero (classicamente questo problema non si pone perché, non essendo riconosciuto il principio di indeterminazione, non vengono nemmeno riconosciuti gli stati virtuali del campo elettromagnetico ovvero gli stati che violano le ordinarie relazioni di dispersione dettate dalle equazioni d'onda). Tale fatto *complica enormemente sia il concetto di particella isolata che il concetto di interazione tra particelle.*

Per vederlo vogliamo considerare il caso della interazione elettromagnetica. Un elettrone libero ha sicuramente una certa probabilità di non irraggiare alcun quanto virtuale (A). Tuttavia esiste una certa probabilità che possa emettere e poi assorbire un quanto virtuale nel modo indicato dal diagramma B. Ma nulla può impedire che si realizzi il più complicato processo descritto dal diagramma C oppure che si realizzino processi ancora più complicati con un grande numero di vertici e linee interne. Siccome questi processi di emissione ed assorbimento di quanti virtuali non vengono osservati, secondo le regole della meccanica quantistica l'ampiezza complessiva si ottiene sommando in interferenza le ampiezze di tutti i processi virtuali compatibili con il processo osservato ovvero con l'elettrone libero.

Giungiamo allora alla conclusione che l'interazione tra carica e campo elettromagnetico, attraverso i processi virtuali, si riflette anche sullo stato dell'elettrone libero che **deve essere pensato come la somma di tutti i sottostanti processi virtuali possibili.**

Lo stesso accade nel caso della interazione tra due cariche elettriche che a suo tempo descrivemmo con il semplice diagramma D. Nulla impedisce che la stessa interazione avvenga con le topologie più complesse indicate nei diagrammi E ed F, oppure in modo ancora più complicato con un grande numero di vertici e linee interne. Siccome questi processi di emissione ed assorbimento di quanti virtuali non vengono osservati, secondo le regole della meccanica quantistica l'ampiezza complessiva si ottiene sommando in interferenza le ampiezze di tutti i processi virtuali compatibili con il processo osservato ovvero con la diffusione dei due elettroni.

Giungiamo allora alla conclusione che l'interazione tra carica e campo elettromagnetico, attraverso i processi virtuali, si riflette anche sulla interazione tra elettroni che **deve essere pensata come la somma di tutti i sottostanti processi virtuali possibili.**



Naturalmente ciò che abbiamo detto nel caso della interazione elettromagnetica deve essere esteso a tutte le altre interazioni. Ciò significa che, se la particella oltre ad essere soggetta alle interazioni elettromagnetiche è pure soggetta alle interazioni forti, il suo stato libero e le sue interazioni saranno il risultato della somma di tutti i sottostanti processi virtuali ad interazione elettromagnetica e forte. Si giunge così a comprendere un aspetto assai caratteristico delle teorie di campo quantizzato ovvero che **gli stati liberi ed interagenti di una particella devono essere pensati come la somma di tutti i processi virtuali caratteristici delle interazioni cui è soggetta compatibili con il processo osservato**. La somma delle ampiezze di tali processi prende il nome di **serie perturbativa**.

Questo stato di cose apre un ovvio problema computazionale poiché se si vuole calcolare l'ampiezza di un qualunque processo si dovranno prima **calcolare e poi sommare le ampiezze degli infiniti processi virtuali compatibili con il processo osservato**. Una parziale via d'uscita a questo problema può essere trovata osservando che, mano a mano che viene complicata la topologia della interazione, aumenta inevitabilmente anche il numero di vertici coinvolti (il cosiddetto ordine del diagramma). Se l'interazione è tale per cui **la probabilità di emissione del quanto virtuale al vertice risulti inferiore all'unità** allora le topologie più complesse avranno ampiezze soppresse rispetto a quelle più semplici. Ciò significa che si può pensare di ordinare le varie topologie in base al numero di vertici contenuti calcolando solo i diagrammi necessari per raggiungere una prefissata precisione. Quando ciò è possibile si dice che **l'interazione è trattabile perturbativamente** (l'interazione elettromagnetica rientra in questa categoria d'interazioni poiché la probabilità di emissione al vertice vale $\sim\sqrt{1/137}$).

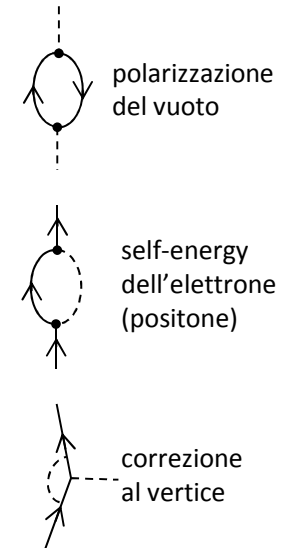
Se invece la probabilità di emissione o assorbimento di un quanto virtuale del campo di forza è superiore all'unità i diagrammi più complessi contribuiscono in misura sempre più rilevante privando la procedura di ogni valore pratico. In tale caso si dice che **l'interazione non è trattabile perturbativamente** e si deve ricorrere ad altri metodi di calcolo detti in generale *metodi non perturbativi* (poiché nel regime delle basse energie le interazioni forti rientrano in questa categoria i metodi non perturbativi nella teoria dei campi si sono sviluppati soprattutto all'interno della cromodinamica quantistica. Negli ultimi trent'anni grandi progressi sono stati fatti seguendo una tecnica introdotta da Wilson nel 1974 che consiste nell'eseguire il calcolo diretto delle ampiezze in spazi-tempo discretizzati, detti reticoli, attraverso un massiccio uso dei calcolatori. Si sono anche sviluppate tecniche analitiche assai complesse di validità però parziale. Premesso che si tratta dell'area forse più difficile della teoria dei campi è diffusa l'idea che una vasta fenomenologia di fondamentale importanza sia di natura non perturbativa).

Anche limitandosi al caso delle interazioni trattabili perturbativamente sorgono altre formidabili difficoltà poichè si scopre facilmente che **non è garantita la finitezza dei singoli termini della serie perturbativa**. In particolare si trova che i **processi con topologie contenenti 'loop' assumono un valore infinito**.

Ad esempio nel caso della interazione elettromagnetica, considerando i termini successivi della serie perturbativa, si scopre che le tre tipologie di diagrammi indicate a fianco forniscono un valore dell'ampiezza infinito.

Storicamente fu proprio questo fatto (scoperto da Heisenberg e Pauli, 1929 e da Oppenheimer, 1930) che arrestò il percorso della teoria dei campi per oltre un ventennio fino alla fine degli anni '40 quando, per merito dei lavori di Weisskopf, Bethe, Feynmann, Schwinger, Tomonaga e Dyson, si giunse a mettere a punto una elaborata tecnica di rimozione degli infiniti detta **rinormalizzazione**.

La tecnica si articola in varie parti. Nella prima, detta di **regolarizzazione**, si esegue il calcolo dell'ampiezza cercando di separare le parti finite da quelle divergenti. Questo può essere fatto inserendo tagli sugli integrali ma oggi si preferisce la cosiddetta regolarizzazione dimensionale (Giambiagi, Bollini 1972) la quale, sfruttando le proprietà della funzione gamma, esegue il calcolo degli integrali in uno spazio a $4-\epsilon$ dimensioni preservando la Lorentz invarianza (persa invece con le altre tecniche di regolarizzazione). Nella fase successiva, detta di **rinormalizzazione**, a ciascuna parte divergente trovata in fase di regolarizzazione si contrappone un opportuno diagramma (detto controtermine) che la elimina. Si ottiene allora l'ampiezza rinormalizzata e si manda ϵ a zero recuperando le 4 dimensioni dove l'ampiezza assume ora un valore finito. Dato che **la serie perturbativa è costituita da infiniti termini, un punto per niente scontato è che introducendo un numero finito di controtermini si possa di fatto rimuovere gli infiniti in tutti i suoi termini**. Quando questo accade si dice che la **teoria di campo è rinormalizzabile**. Come è facile intuire, la dimostrazione della rinormalizzabilità di una teoria può essere molto complessa, nel caso della elettrodinamica essa fu fornita da F. Dyson nel 1949 - che introdusse anche il concetto di rinormalizzabilità appena ricordato - mentre nel caso delle teorie di Yang-Mills, alla base delle teorie di campo quantizzato delle interazioni deboli e forti, la prova fu fornita da t'Hooft e Veltman nel 1971.



Notevolissime sono le conseguenze della procedura di rinormalizzazione sia sul piano delle previsioni (che diventano di una precisione sbalorditiva) che sul piano concettuale.

La rimozione degli infiniti, infatti, comporta che i parametri fisici (principalmente massa e carica) con cui la particella interviene nel calcolo dell'ampiezza (*parametri nudi*) debbano essere ridefiniti in nuovi parametri (*parametri vestiti o rinormalizzati*) oltretutto **dipendenti dal quadripulso trasferito nel processo.**

Questo fatto viene interpretato qualitativamente pensando la particella come una struttura complessa costituito da un 'core' interno caratterizzato dai parametri nudi, rivestito dalla 'nube' di processi virtuali dovuti agli accoppiamenti con gli altri campi, che porta un proprio contributo ai parametri fisici della particella modificandoli in quelli rinormalizzati. Dato che le particelle non possono essere separate dai processi virtuali dovuti ai suoi accoppiamenti ciò che osserviamo sperimentalmente sono i parametri rinormalizzati non quelli nudi. Per osservare questi ultimi si dovrebbero spegnere tutti gli accoppiamenti della particella, cosa evidentemente impossibile.

Ad esempio l'elettrone libero deve essere pensato come somma di tutti i possibili processi virtuali di emissione e riassorbimento. Tra questi processi, quelli che prevedono l'emissione di un fotone virtuale che si converte in una coppia elettrone positone che poi si annichila in un fotone che viene poi riassorbito, portano alla comparsa temporanea di un dipolo elettrico che tenderà ad essere orientato dalla carica elettrica dell'elettrone iniziale schermandone il valore. Quindi l'elettrone interviene nei diagrammi con il valore della carica non schermata mentre il valore che viene misurato in laboratorio corrisponde a quello della carica schermata.

Il fatto poi che i parametri rinormalizzati dipendano dal quadripulso trasferito comporta che i parametri fisici con cui le particelle intervengono nei processi non siano costanti ma dipendano dalla energia in gioco. Questo fatto viene interpretato qualitativamente osservando che al variare della energia del processo cambia anche la lunghezza d'onda quantomeccanica delle particelle coinvolte e con essa il loro reciproco potere risolutivo ovvero la loro reciproca capacità di risolvere in misura diversa il core dai processi virtuali. In questo modo variando l'energia varia il grado di penetrazione all'interno delle rispettive nubi di processi virtuali e con esso, quindi, il valore dei parametri fisici con cui vi intervengono. Ha così luogo un tipico effetto previsto dalle teorie di campo quantizzato che prende il nome di **'running' dei parametri.**

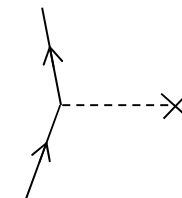
ALCUNE VERIFICHE SPERIMENTALI. Storicamente, la prova definitiva che gli stati virtuali e le elaborate tecniche di rimozione degli infiniti della teoria di campo quantizzato della interazione elettromagnetica avevano una enorme capacità predittiva fu ottenuta sul finire degli anni '40. In una ormai storica *Conference on the Foundations of quantum Mechanics* tenuta a Shelter Island (NY) nel Giugno del 1947 alcuni fisici sperimentali richiamarono l'attenzione su due piccoli ma decisivi effetti nell'atomo d'idrogeno che la teoria relativistica di Dirac non calcolava correttamente

- Willis Lamb, con una tecnica geniale, riuscì a misurare lo splitting tra i livelli $2S_{1/2}$ e $2P_{1/2}$ dell'atomo di idrogeno (circa 1000 MHz) che secondo la teoria di Dirac doveva essere assente (l'idrogeno molecolare viene dissociato termicamente in atomi singoli; questi vengono bombardati da elettroni e, in una piccola frazione, si portano sul livello metastabile $2S$; attraverso un campo magnetico ed una radiofrequenza finemente accordata vengono favorite le transizioni verso il livello $2P$ che rapidamente si diseccita sul livello $1S$; dal valore della frequenza radio si estrae la differenza di energia tra i livelli $2S$ e $2P$ dell'atomo d'idrogeno; il valore misurato da Lamb vale 1059 MHz);
- Isidor Rabi, con il metodo della risonanza magnetica da lui inventato, misurò il momento magnetico dell'elettrone (circa 1.0013) che risultava essere lievemente maggiore del valore unitario previsto da Dirac.

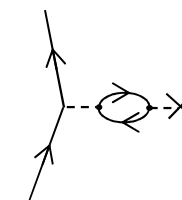
Tali esperimenti diedero un fortissimo impulso allo sviluppo al lavoro teorico che produsse subito un certo numero di lavori fondamentali.

Per quanto riguarda il Lamb shift, un primo calcolo non relativistico, che eliminava le divergenze con un semplice taglio sugli integrali, fu eseguito nel 1947 da Bethe e fornì il valore quasi corretto di 1040 MHz. Calcoli relativistici furono eseguiti negli anni seguenti da diversi autori: Feynmann 1948, Tomonaga et al. 1948, Weisskopf & French 1949, Schwinger 1949, Kroll e Lamb 1949. Tali lavori erano basati sulla idea che il semplice potenziale coulombiano che di solito veniva inserito nella equazione di Dirac per il calcolo dei livelli energetici dell'atomo d'idrogeno dovesse tenere conto dei processi virtuali indicati a lato che risultarono pesare nel modo seguente

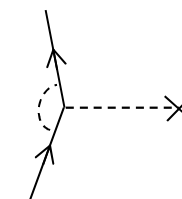
Polarizzazione del vuoto	-27 MHz	
Self energy	+1017 MHz	
Correzione al vertice	+68 MHz	+1058 MHz



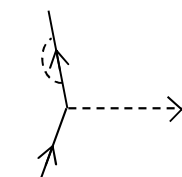
potenziale coulombiano



correzione dovuta alla polarizzazione del vuoto



correzione al vertice



è dovuta alla γ

Per quanto riguarda il momento magnetico dell'elettrone è necessario premettere che, secondo la **teoria di Dirac**, una **particella puntiforme** di spin $s=1/2$ \hbar possiede un **momento di dipolo magnetico** dato dalla formula

$$\vec{\mu} = g(e\hbar/2m)\vec{s} \quad g = 2$$

dove S è lo **spin**, la quantità tra parentesi viene detta **magnetone di Bohr** e g è il cosiddetto **rapporto giromagnetico**. Tenendo conto delle **correzioni elettrodinamiche** (il primo calcolo relativistico compiuto da Schwinger nel 1948 mostrava che la correzione al vertice doveva fornire il contributo principale) il valore del rapporto giromagnetico viene **spostato di una quantità α** molto piccola calcolabile teoricamente con grande precisione **$g=2(1+\alpha)$** . Gli specialisti, piuttosto che ragionare sul momento magnetico si confrontano direttamente con la **correzione al rapporto giromagnetico**

$$\alpha = (g - 2) / 2$$

Se le correzioni elettrodinamiche (ed in generale le correzioni apportate da tutte le interazioni cui è soggetta la particella) riescono a riprodurre correttamente il valore sperimentale della $(g-2)/2$ allora, oltre alla verifica della teoria, si ottiene anche la **prova della puntiformità o elementarità della particella** (nel senso che evidentemente si tratta di una particella che soddisfa l'equazione di Dirac, dunque elementare, cui vanno aggiunti gli inevitabili processi virtuali associati alle sue interazioni).

La situazione per quanto riguarda i tre leptoni fondamentali del modello standard è riportata nella tabella. I valori sperimentali sono medie mondiali, mentre quelli teorici tengono conto non solo delle interazioni elettromagnetiche ma anche di quelle deboli e forti. Nel caso dell'elettrone si osserva uno spettacolare accordo fino alla undicesima cifra decimale. Nel caso del muone si osserva un interessante accordo/disaccordo dell'ordine di tre sigma tra teoria ed esperimenti. Problematica infine la situazione sperimentale per quanto riguarda il tau.

		$g-2/2$
e	Esp	0.00115965218279(771)
	Teo	0.00115965218073(28)
μ	Esp	0.00116592089(63)
	Teo	0.00116591802(49)
τ	Esp	-0.052 \rightarrow 0.013
	Teo	0.00117721(5)

A partire dalla fine degli anni '40, le teorie di campo quantizzato hanno accumulato una serie impressionante di successi. Dapprima fornendo previsioni di una precisione spettacolare di tutta una serie di processi relativi alla interazione elettromagnetica poi, nella forma generalizzata proposta da Yang e Mills, dimostrandosi capace di spiegare le proprietà delle interazioni deboli (Teoria unificata delle interazioni deboli ed elettromagnetiche) e forti (Cromodinamica quantistica, QCD). Tali successi hanno posto in ombra alcune incompletezze. Ad esempio, nel caso di interazioni trattabili perturbativamente e rinormalizzabili si sa che i termini della serie perturbativa sono tutti finiti e che la serie troncata ad un qualche ordine fornisce previsioni in accordo con gli esperimenti. Tuttavia, anche nel caso della QED, non esiste una prova che la serie perturbativa sia complessivamente convergente, anzi Dyson mostrò, con una argomentazione pubblicata nel 1952, che il raggio di convergenza della serie in questo caso è addirittura nullo!

Le interazioni deboli

La teoria dei raggi beta di E. Fermi

Si può assumere l'anno **1897** come momento iniziale della storia delle interazioni deboli con le osservazioni di **A.H. Becquerel** il quale, studiando il fenomeno della *fluorescenza nei sali di uranio* (un cimelio lasciatogli dal padre), scoprì che questi **emettevano una intensa 'radiazione' anche in assenza di luce solare**. Era la prima evidenza sperimentale del fenomeno della **radioattività**, manifestazione della **interazione debole**.

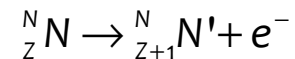
Negli anni immediatamente seguenti, lo straordinario lavoro sperimentale dei coniugi **Marie e Pierre Curie**, rese possibile la identificazione di altri elementi ancora più attivi dell'uranio: il *polonio* circa 400 volte ed il *radio* circa 100.000 volte!

Nel 1899 **E. Rutherford** scoprì che i *raggi della radioattività* non erano omogenei bensì costituiti da due componenti cariche: una poco penetrante, che chiamò **radiazione alfa**, ed una penetrante, che chiamò **radiazione beta**.

Nel 1900 **A.H. Becquerel** misura il rapporto carica massa delle particelle costituenti **la radiazione beta** e vi riconosce l'**elettrone** scoperto pochi anni prima da J.J. Thompson.

Nel 1901 **E. Rutherford e F. Soddy** dimostrano che l'emissione di radiazione beta (ed alfa) determina un **cambiamento della specie chimica del nucleo**, fenomeno indicato con il nome di **trasmutazione nucleare**.

Nel 1913 **F. Soddy e K. Fajans** enunciano la **legge del decadimento beta** che completiamo scrivendo esplicitamente l'elettrone emesso



Dato che già nel 1920 **E. Rutherford** aveva suggerito che il nucleo atomico fosse composto da protoni e neutroni, osservati poi da **J. Chadwick** nel 1932, era chiaro che tali processi erano indotti dalla seguente **trasformazione a livello dei costituenti nucleari**



Lo studio di questi processi aveva evidenziato numerose situazioni problematiche tra le quali, la più sconcertante riguardava il fatto, scoperto da **L. Meitner e O. Hahn** nel 1911, che **l'energia dell'elettrone emesso nel decadimento beta non aveva un valore definito ma variabile con continuità secondo uno spettro caratteristico** che, nel decennio successivo, sarà determinato con precisione (vedi anche **J. Chadwick 1914**). Tale fatto rappresentava un problema poiché, assumendo la conservazione della energia e dell'impulso, il decadimento in due corpi finali produce inevitabilmente due particelle di energia ed impulso definiti (vedi esercizio).

il decadimento beta

I'ipotesi del neutrino

Vi fu anche chi dubitò della validità della legge di conservazione dell'impulso e della energia per cui, l'idea di W. Pauli di risolvere il problema immaginando che **il decadimento beta producesse anche una terza particella sfuggita all'osservazione**, parve ai più la soluzione migliore. Tale particella doveva essere, *elettricamente neutra* (conservazione della carica), di *spin semintero* (conservazione del momento angolare), capace di *interagire solo debolmente* (fatto che poteva spiegare perché fosse sfuggita alla osservazione) e presumibilmente dotata di una *massa molto piccola* o, al limite, nulla (fatto che emergeva dalla analisi dettagliata della forma dello spettro elettronico). E. Fermi, che accolse l'idea di Pauli nella sua trattazione del decadimento beta, propose di chiamare la nuova particella **neutrino**.

In questo modo il processo (1) veniva ad assumere la seguente forma



$$Q_i = Q_f$$

$$Q_n = Q_p + Q_e$$

$$(\epsilon_n, \vec{p}_n) = (\epsilon_p, \vec{p}_p) + (\epsilon_e, \vec{p}_e) \text{ con gli invarianti } \epsilon_n^2 - p_n^2 = m_n^2 \quad \epsilon_p^2 - p_p^2 = m_p^2 \quad \epsilon_e^2 - p_e^2 = m_e^2$$

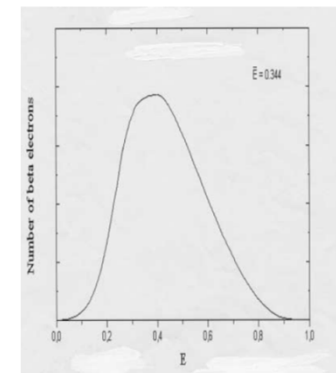
$$\begin{cases} \epsilon_n = \epsilon_p + \epsilon_e \\ \vec{p}_n = \vec{p}_p + \vec{p}_e \end{cases}$$

se il neutrone è assunto fermo

$$\begin{cases} m_n = \epsilon_p + \epsilon_e \\ \vec{0} = \vec{p}_p + \vec{p}_e = -\vec{p} \end{cases}$$

$$\epsilon_p^2 = m_p^2 + p^2 \quad \epsilon_e^2 = m_e^2 + p^2 \quad \epsilon_p^2 - \epsilon_e^2 = m_p^2 - m_e^2 \quad (\epsilon_p - \epsilon_e)(\epsilon_p + \epsilon_e) = m_p^2 - m_e^2 \quad (\epsilon_p - \epsilon_e)m_n = m_p^2 - m_e^2$$

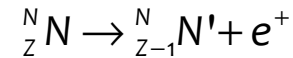
da cui $(\epsilon_p - \epsilon_e) = \frac{m_p^2 - m_e^2}{m_n}$, dato che $(\epsilon_p + \epsilon_e) = m_n$ otteniamo infine $\epsilon_e = \frac{1}{2} \left(m_n - \frac{m_p^2 - m_e^2}{m_n} \right)$



esempio di spettro energetico dell'elettrone prodotto nel decadimento beta

il decadimento beta positivo

Nel 1934 Frederic e Irene Joliot-Curie osservano il primo processo di *decadimento beta con emissione di positoni* o **decadimento beta positivo** scoperti, questi ultimi, due anni prima da C.D. Anderson nei raggi cosmici



e che veniva ad aggiungere la seguente trasformazione a livello dei componenti elementari del nucleo



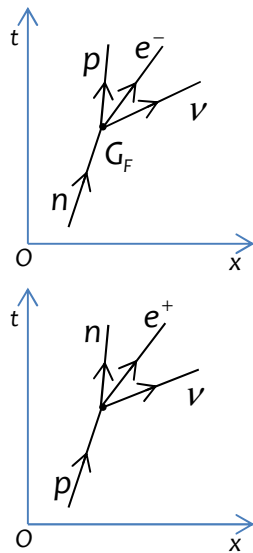
la teoria dei raggi beta di E. Fermi (1934)

Nel 1934 E. Fermi propose la **teoria dei raggi beta**, la prima teoria di campo delle interazioni deboli contenente alcune idee d'importanza decisiva.

Allora l'idea che particelle materiali e campi fossero enti intrinsecamente diversi ed irriducibili tra loro era ancora profondamente radicata, un fatto che, oltretutto, trovava piena conferma nei dati sperimentali disponibili. Infatti, mentre era ormai chiaro che il processo classico di irradiazione doveva essere interpretato come un processo di creazione di quanti da parte di una carica elettrica, non erano invece noti analoghi processi di creazione di *particelle materiali che si riteneva fossero indistruttibili e soggette ad una rigorosa legge di conservazione*. Questo fatto creava **tremende difficoltà nel caso del decadimento beta** poiché si doveva ipotizzare che il *protone, l'elettrone ed ora anche il neutrino, prodotti dal processo, esistessero già prima del decadimento legati in qualche modo all'interno del neutrone* (si pensi alle difficoltà create in questo senso dal neutrino).

Fermi intuì che si potevano superare queste difficoltà ammettendo che **le particelle materiali potessero create e distrutte proprio come i fotoni** dell'allora nascente elettrodinamica quantistica. Sulla base di questa idea, seguendo un approccio assai pragmatico, cercò di confezionare una teoria capace di spiegare i decadimenti beta negativo e positivo (quest'ultimo non era noto quando Fermi pubblicò il suo lavoro ma la sua teoria è in grado di spiegarlo ugualmente).

Fatto questo passo fondamentale, **il decadimento beta del neutrone poteva essere descritto immaginando che, in un certo punto dello spazio e con una certa definita probabilità, il neutrone iniziale fosse distrutto, ed il protone, elettrone e neutrino finali, creati**. Dunque un processo dal cui vertice arrivano e dipartono quattro particelle di spin $\frac{1}{2}$ con una *costante caratteristica* G_F che determinò in modo approssimato dai dati sperimentali (il valore preciso della **costante di Fermi** è $G_F = 1.46 \times 10^{-62} \text{ J m}^3$, per quanto riguarda le dimensioni vedi NOTA pagina seguente). In modo analogo si poteva descrivere il decadimento beta positivo che trasforma un protone in neutrone.



L'idea portante del lavoro era che **il formalismo dei campi quantizzati**, introdotto solo pochi anni prima nella descrizione quantomeccanica del campo elettromagnetico [un primo lavoro di L. De Broglie (1924), poi i lavori fondamentali di M. Born, W. Heisenberg e P. Jordan (1925), un primo lavoro generale di P. Dirac (1927)], avesse una **validità del tutto generale** e potesse quindi descrivere anche le interazioni deboli.

Si introducevano allora operatori di campo complessi ed i loro aggiunti per la descrizione dei processi di creazione e distruzione delle particelle secondo lo schema già visto nel caso della interazione elettromagnetica

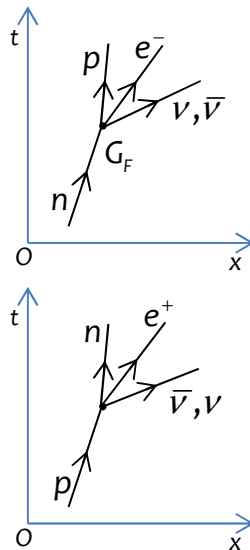
$$\Psi \sim D_p + C_{\bar{p}} \quad \bar{\Psi} \sim D_{\bar{p}} + C_p \quad (4)$$

A loro volta, **le particelle in gioco** non potevano che essere quelle di spin $\frac{1}{2}$ che prendevano parte ai decadimenti beta negativo e positivo, ovvero n, p, e^- e ν (Fermi ipotizzò per primo che il neutrino avesse spin $\frac{1}{2}$) cui andavano aggiunte le rispettive antiparticelle \bar{n}, \bar{p}, e^+ e $\bar{\nu}$. Di queste solo il positone era noto (scoperto da C. Anderson nel 1932) tuttavia ci si attendeva, più o meno esplicitamente, che esistessero anche le rimanenti. Infatti, allora, l'unica equazione relativistica nota per particelle di spin $\frac{1}{2}$ era quella di Dirac che assumeva operatori di campo complessi e dunque **particelle realmente cariche intrinsecamente diverse dalle antiparticelle** (una equazione di Dirac per particelle realmente neutre fu proposta per la prima volta da E. Majorana nel 1937).

Sulla base di queste ipotesi, si poteva scrivere espressioni con i seguenti operatori di campo

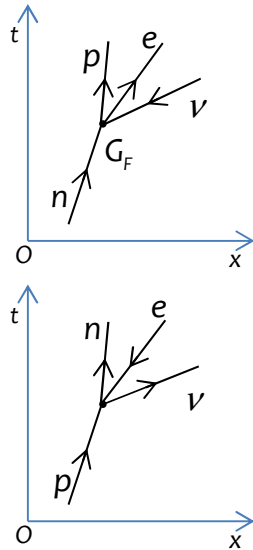
$$\begin{aligned} n \rightarrow p + e^- + \nu(\bar{\nu}) \quad H \sim D_n \dots C_p \dots C_{e^-} \dots C_{\nu}(C_{\bar{\nu}}) \sim G_F \Psi_n \dots \bar{\Psi}_p \dots \bar{\Psi}_{e^-} \dots \bar{\Psi}_{\nu}(\Psi_{\bar{\nu}}) \\ p \rightarrow n + e^+ + \bar{\nu}(\nu) \quad H \sim D_p \dots C_n \dots C_{e^+} \dots C_{\bar{\nu}}(C_{\nu}) \sim G_F \Psi_p \dots \bar{\Psi}_n \dots \Psi_{e^+} \dots \Psi_{\bar{\nu}}(\bar{\Psi}_{\nu}) \end{aligned} \quad (5)$$

dove: i) per quanto riguarda i neutrini prodotti abbiamo lasciate aperte le due opzioni rimandando la scelta al



NOTA. Le dimensioni della costante di Fermi possono essere trovate sapendo che **i campi di spin $\frac{1}{2}$ hanno dimensioni $1/L^{3/2}$** ; la densità di hamiltoniana del processo ha le dimensioni di **E/V** ed una forma data dal prodotto degli operatori di distruzione/creazione dei quattro fermioni coinvolti

$$H \sim G \varphi_p^* \varphi_n \varphi_e^* \varphi_{\nu}^* \quad [H] = [G][\varphi]^4 = [G]\left(\frac{1}{L^{3/2}}\right)^4 = \frac{[E]}{[V]} = \frac{M \frac{L^2}{T^2}}{L^3} \quad [G] = \frac{M \frac{L^2}{T^2}}{L^3} L^6 = \frac{ML^5}{T^2}$$



seguito (infatti affermare che quello prodotto nel decadimento del neutrone è un neutrino piuttosto che un antineutrino è una semplice convenzione); ii) C e D indicano operatori di creazione e distruzione delle specifiche particelle indicate a pedice mentre i puntini indicano termini di natura cinematica che per ora non ci interessano; iii) gli operatori di creazione e distruzione delle specifiche particelle sono stati sostituiti con gli operatori di creazione e distruzione dei campi p, n, e e ν sulla base della (4).

A questo punto **Fermi suggerisce di disporre gli operatori di campo in modo simile al vertice elettromagnetico** dove, nel caso dell'elettrone ad esempio, compaiono sistematicamente sia l'operatore Ψ che $\bar{\Psi}$ (vedi accenni ai campi quantizzati). In questo modo abbiamo un criterio univoco per scegliere tra le due opzioni relative al neutrino nelle espressioni (5)

$$\begin{aligned} n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu} & \quad H \sim G_F \Psi_n \dots \bar{\Psi}_p \dots \bar{\Psi}_e \dots \bar{\Psi}_{\nu} (\Psi_{\nu}) \sim G_F \Psi_n \dots \bar{\Psi}_p \dots \bar{\Psi}_e \dots \Psi_{\nu} \\ p \rightarrow n + e^+ + \nu & \quad H \sim G_F \Psi_p \dots \bar{\Psi}_n \dots \Psi_e \dots \Psi_{\nu} (\bar{\Psi}_{\nu}) \sim G_F \Psi_p \dots \bar{\Psi}_n \dots \Psi_e \dots \bar{\Psi}_{\nu} \end{aligned} \quad (6)$$

da cui risulta che **nel decadimento del neutrone viene prodotto un antineutrino mentre nel decadimento del protone viene prodotto un neutrino** (vedi figure a lato). Per rendere ancora più stringente l'analogia con l'elettromagnetismo Fermi suggerisce anche di **appaiare gli operatori Ψ e $\bar{\Psi}$ a coppie**. Assumendo la **convenzione** di tenere gli **operatori Ψ a destra ed i loro aggiunti $\bar{\Psi}$ a sinistra**, sono allora possibili le seguenti combinazioni

$$\begin{aligned} H & \sim G_F (\bar{\Psi}_p \dots \Psi_n) (\bar{\Psi}_e \dots \Psi_{\nu}) \sim G_F (\bar{\Psi}_p \dots \Psi_{\nu}) (\bar{\Psi}_e \dots \Psi_n) \\ H & \sim G_F (\bar{\Psi}_n \dots \Psi_p) (\bar{\Psi}_{\nu} \dots \Psi_e) \sim G_F (\bar{\Psi}_{\nu} \dots \Psi_p) (\bar{\Psi}_n \dots \Psi_e) \end{aligned}$$

ancora una volta Fermi intuì la soluzione che, nel futuro, si rivelerà giusta proponendo di **associare tra loro protone e neutrone da un lato ed elettrone e neutrino dall'altro** [tale intuizione gli fu suggerita dai lavori di W. Heisenberg (1932) e E. Majorana (1933) che proposero di descrivere le interazioni forti tra protoni e neutroni pensando che essi fossero differenti stati interna della particella nucleone]

$$\begin{aligned} H & \sim G_F (\bar{\Psi}_p \dots \Psi_n) (\bar{\Psi}_e \dots \Psi_{\nu}) \\ H & \sim G_F (\bar{\Psi}_n \dots \Psi_p) (\bar{\Psi}_{\nu} \dots \Psi_e) \end{aligned} \quad (7)$$

Riordiniamo ancora le nostre espressioni assumendo la ulteriore **convenzione** di scrivere **a destra le cariche elettriche superiori e a sinistra quelle inferiori**

$$H \sim G_F (\bar{\Psi}_p \dots \Psi_n) (\bar{\Psi}_e \dots \Psi_\nu) \sim G_F (\bar{\Psi}_n \dots \Psi_p)^\dagger (\bar{\Psi}_e \dots \Psi_\nu)$$

$$H \sim G_F (\bar{\Psi}_n \dots \Psi_p) (\bar{\Psi}_\nu \dots \Psi_e) \sim G_F (\bar{\Psi}_n \dots \Psi_p) (\bar{\Psi}_e \dots \Psi_\nu)^\dagger$$

Si vede allora che gli hamiltoniani del decadimento del neutrone e del protone sono uno l'aggiunto dell'altro per cui possono essere sommati a formare un unico **hamiltoniano autoaggiunto che descrive sia il decadimento del neutrone che quello del protone** (oltre ad **altri processi** come la diffusione neutrino-neutrone->protone-elettrone ad esempio, che possono essere dedotti con le stesse regole viste nel caso della elettrodinamica)

**l'hamiltoniano della
interazione debole
correntecorrente**

$$\boxed{H \sim G_F (\bar{\Psi}_n \dots \Psi_p)^\dagger (\bar{\Psi}_e \dots \Psi_\nu) + G_F (\bar{\Psi}_n \dots \Psi_p) (\bar{\Psi}_e \dots \Psi_\nu)^\dagger} \quad (8)$$

La struttura di questo hamiltoniano come prodotto delle coppie di operatori di campo protone-neutrone e neutrino-elettrone viene detta **corrente x corrente**. Come vedremo essa è **sufficientemente flessibile da accogliere senza difficoltà i nuovi leptoni ed i nuovi processi deboli che verranno scoperti** nel decennio che segue la formulazione della teoria di Fermi. Inoltre essa suggerisce quella che scopriremo essere una caratteristica peculiare delle interazioni deboli ovvero **l'appaiamento caratteristico di certe particelle** che troverà la sua spiegazione profonda solo con la formulazione della corrispondente teoria di gauge. Tra i difetti, invece, dobbiamo sottolineare il fatto che **l'interazione tra le due coppie di particelle è puntuale** e non avviene per mezzo di un campo come ci aspetta che debba essere nel caso del interazioni naturali. In tal senso si tratta di una teoria fenomenologica e provvisoria.

La scoperta di nuovi leptoni

la scoperta del muone	Pochi anni dopo il lavoro di E. Fermi si scoprì una particella che oggi sappiamo essere il muone che porrà una serie di problemi di grande impatto nello sviluppo delle interazioni deboli. Nel 1938 S.H. Neddermeyer e C.D. Anderson osservano nei raggi cosmici una nuova particella carica di circa 240 masse elettroniche (circa 120 MeV) chiamata a quei tempi <i>mesotrone</i> .
il muone mediatore delle interazioni forti?	Dato che nel 1935 H. Yukawa aveva stimato che il mediatore delle interazioni forti dovesse avere circa 200 masse elettroniche, fu lui stesso a suggerire che il mesotrone dovesse essere identificato con tale mediatore. In realtà, un fondamentale esperimento compiuto a Roma in tempo di guerra da M. Conversi, E. Pancini e O. Piccioni , i cui risultati furono pubblicati nel 1946 , trovò che <i>il tasso di assorbimento nella materia di mesotroni negativi era troppo basso per una particella che si supponeva soggetta alla interazione forte e quindi prontamente catturata dal nucleo</i> . In un lavoro del 1947 E. Fermi, E. Teller e V. Weisskopf mostreranno che il disaccordo ammontava ad un fattore 10^{12} per cui <i>il mesotrone era una particella soggetta alla sola interazione debole che non poteva essere identificata con il mediatore della interazione forte previsto da Yukawa</i> (in questo lavoro fu usata per la prima volta la lettera μ per indicare il mesotrone che d'ora in avanti chiameremo con il nome attuale di muone).
il muone non può essere il mediatore delle interazioni forti	
osservazione diretta del pione e del muone	Pochi mesi dopo, sempre nel 1947, C. Lattes, G. Occhialini e C. Powell risolveranno il problema rivelando contemporaneamente sia il pione che il muone. Infatti, alcune emulsioni fotografiche esposte ai raggi cosmici mostrano chiaramente eventi in cui una particella primaria negativa (da cui la lettera π che ancora oggi indica il pione) decade in un muone negativo che a sua volta decade in un elettrone

$$\pi \rightarrow \mu \rightarrow e$$

il decadimento del pione e del muone	Dato che i) in un processo di decadimento devono esistere almeno due particelle finali; ii) nelle emulsioni fotografiche Lattes, Occhialini e Powell risultava una sola traccia carica per volta; si doveva concludere che in entrambi i decadimenti doveva esistere almeno un compagno neutro non rivelato che si ipotizzò essere un neutrino per cui si completavano i decadimenti nel modo seguente
---	---

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \nu \quad \mu^- \rightarrow e^- + \nu$$

La conferma di questa ipotesi richiedeva lo studio dello spettro energetico sia del muone (nel decadimento del pione) che dell'elettrone (nel decadimento del muone). Quasi subito si riuscì a dimostrare che **lo spettro energetico del muone era monocromatico** confermando la forma del decadimento del pione. Maggiori difficoltà si incontrarono, invece, nel caso dell'elettrone il cui spettro fu studiato dettagliatamente nell'arco di un decennio, anche se, già **dal 1948, era ormai chiaro che lo spettro non era monocromatico** per cui era necessario postulare che l'elettrone fosse accompagnato da ben due neutrini.

Il decadimento del pione e del muone assumevano allora la seguente forma

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \nu \qquad \mu^- \rightarrow e^- + \nu + \nu$$

il problema dei neutrini La scoperta che il muone non era una delle tante particelle fortemente interagenti ma una specie di copia massiva dell'elettrone capace di interagire solo debolmente decadendo in elettrone e due neutrini (naturalmente, essendo carico, può interagire anche elettromagneticamente) rese ineludibile il problema dei neutrini che possiamo riassumere nei seguenti punti:

- stabilire in modo diretto l'esistenza del neutrino;
- stabilire se neutrino ed antineutrino sono davvero particelle differenti come ipotizzato nella costruzione della teoria delle interazioni deboli;
- stabilire se i neutrini che accompagnano i processi con elettroni sono dello stesso tipo di quelli che accompagnano i processi con muoni.

Le condizioni per compiere una simile impresa furono poste nell'immediato dopoguerra dalla disponibilità delle stesse reazioni di fissione nucleare che avevano condotto alla realizzazione della bomba atomica ed alla costruzione dei primi *reattori nucleari*. Era infatti oramai noto da tempo che la reazione di fissione di un nucleo pesante produce frammenti nucleari con eccesso di neutroni che trovano energeticamente favorevole convertirsi in protoni attraverso un decadimento beta negativo che produce un antineutrino (si ricordi il modo in cui si è costruito il vertice debole a quattro fermioni). Dato che in un reattore questi processi avvengono con un tasso elevatissimo ne risulta che, tra le altre cose, *un reattore nucleare è una potentissima sorgente di antineutrini*.

Osservazione diretta del antineutrino/neutrino, Reines e Cowan (1956). Dopo avere pensato di posizionare un rivelatore massivo nei pressi di una esplosione nucleare, F. Reines e C. Cowan scelsero un più tranquillo reattore al di sotto del quale (11 metri sotto il nocciolo) posizionarono 400 litri di acqua miscelata ad un composto del Cadmio. Il principio della misura era semplice: gli antineutrini provenienti dal reattore, in alcuni rarissimi casi avrebbero diffuso debolmente su di un protone del rivelatore producendo un positrone ed un neutrone (vedi 13 e 14)

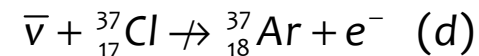
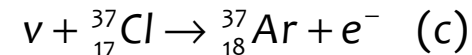
$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$$

Il positrone avrebbe quasi subito incontrato un elettrone producendo due fotoni energetici (raggi gamma) mentre il neutrone, dopo un certo tempo, avrebbe incontrato un nucleo di cadmio (capace di assorbire neutroni con elevatissima probabilità) che diseccitandosi avrebbe emesso un terzo fotone energetico (raggio gamma). *La segnatura dell'evento, pertanto, era data da due segnali simultanei di gamma seguiti da un terzo segnale di gamma dopo un tempo caratteristico.* Dopo numerosi raffinamenti, nel 1956 Reines e Cowan osservarono per la prima volta questa reazione che *provava direttamente l'esistenza dell'antineutrino/neutrino.*

Prova sperimentale della diversità tra neutrino ed antineutrino, R. Davies (1955-1960). La misura diretta della diversità tra neutrino ed antineutrino è piuttosto semplice in linea di principio ma difficilissima sotto il profilo sperimentale. Lo schema della interazione debole corrente per corrente, che assume i neutrini diversi dagli antineutrini, prevede i seguenti processi



secondo i quali i neutrini determinano sempre una conversione neutrone-protone mentre gli antineutrini la conversione inversa protone-neutrone. *Se si riesce a dimostrare che un potente fascio di antineutrini provenienti da un reattore nucleare inviato su di un bersaglio materiale non produce mai il processo (a) mentre un fascio di neutrini lo produce allora la diversità tra neutrino ed antineutrino risulta confermata.* Per ragioni sperimentali Davies scelse di osservare il processo (a) per mezzo della conversione del Cloro in Argon per cui la prova cercata consisteva nella osservazione del primo processo e nella non osservazione del secondo



Quasi dieci anni furono necessari per misurare la non osservazione del processo (d) da parte degli antineutrini di un reattore su un bersaglio di Cl posto in prossimità del nocciolo e, soprattutto, la osservazione del processo (C) da parte dei neutrini provenienti dal sole su di un bersaglio di Cl posto al riparo in profondità in una miniera di sale (R. Davies ottenne nel 2002 il premio Nobel per il ruolo che giocarono i suoi esperimenti nella rivelazione dei neutrini provenienti dal sole. Accennare al problema dei neutrini solari).

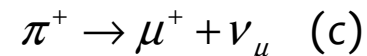
Prova sperimentale della diversità tra neutrino elettronico e neutrino muonico, L. Lederman, M. Schwartz, J. Steinberger (1962). Si tratta di una idea che B. Pontecorvo ebbe nel 1959 realizzata da Lederman, Schwartz e Steinberger in un classico esperimento presso acceleratori di particelle (Brookhaven, USA). Ancora una volta il principio è relativamente semplice ma la misura tremendamente difficile. Se il neutrino che accompagna i muoni (ν_μ) è diverso da quello che accompagna gli elettroni (ν_e) allora un fascio di neutrini muonici su di un bersaglio materiale porterà alla comparsa di muoni e non di elettroni. Lo schema della interazione debole corrente per corrente prevede i seguenti processi di diffusione neutrino neutrone



osservabili in un bersaglio materiale come



Se inviando un fascio di neutrini muonici (ovvero di neutrini prodotto assieme a muoni) su di un bersaglio materiale si osserva solo il processo (b) e non quello (a) significa che i neutrini muonici sono diversi da quelli elettronici. La scelta dei neutrini muonici è dettata dal fatto che possono essere ottenuti in grande quantità presso una macchina acceleratrice di protoni. Si fanno incidere i protoni della macchina su di un bersaglio di Berillio, l'interazione forte produce, tra le altre particelle, grandi quantità di pioni positivi che decadono quasi completamente in muoni secondo il processo



L'esperimento trovò che un bersaglio materiale sottoposto ad un flusso di neutrini muonici provenienti dal decadimento del pione positivo nel canale (c) produceva un eccesso misurabile di muoni negativi del processo (b) il che provava che i neutrini muonici ed elettronici erano di tipo diverso. Per questo esperimento Lederman, Schwartz e Steinberger ricevettero il premio Nobel nel 1988.

La inclusione delle nuove particelle nella teoria delle interazioni deboli

All'inizio degli anni '60 il settore dei leptoni aveva preso una forma non molto diversa da quella attuale. Oltre all'elettrone esisteva un secondo leptone più massivo instabile rispetto all'interazione debole, il muone. In modo del tutto analogo i processi deboli di elettroni e muoni erano accompagnati da neutrini. Questi da parte loro erano stati oramai osservati direttamente in numerosi esperimenti, si era accertato che fossero particelle realmente cariche ovvero diverse dalle antiparticelle (come sempre assunto del resto), e si era accertato che il neutrino elettronico era diverso da quello muonico. La lista dei leptoni era pertanto la seguente

$$e^- \quad e^+ \quad \mu^- \quad \mu^+ \quad \nu_e \quad \bar{\nu}_e \quad \nu_\mu \quad \bar{\nu}_\mu$$

I principali processi deboli che abbiamo considerato dovevano allora scriversi come segue

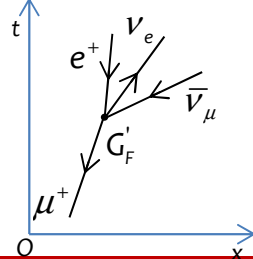
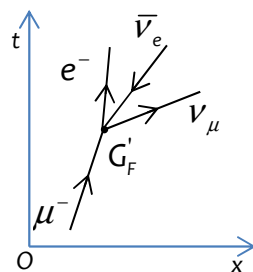
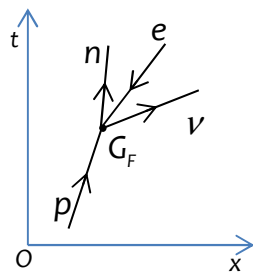
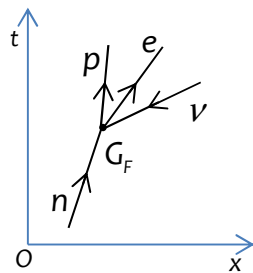
$$\begin{aligned} n &\rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e & p &\rightarrow n + e^+ + \nu_e \\ \mu^- &\rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu & \mu^+ &\rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu \end{aligned} \quad (10)$$

Per quanto riguarda il decadimento del neutrone e del protone già si era capito a suo tempo che per dare al processo una struttura simile a quella del vertice elettromagnetico **conveniva definire antineutrino quello che accompagnava l'elettrone e neutrino quello che accompagnava il positrone**. Ciò che dobbiamo fare quindi è solo aggiungere il pedice e per specificare che si tratta di neutrini associati all'elettrone.

Attenendosi alle stesse convenzioni anche nel caso del **decadimento muone** si hanno i processi nella forma riportata. Infatti, i due neutrini finali che compaiono nel decadimento saranno associati uno all'elettrone finale ed uno al muone iniziale. Quello associato all'elettrone finale deve essere un antineutrino data la corrispondenza con il decadimento del neutrone. Quello associato al muone iniziale deve invece essere un neutrino. Perché? Ragioniamo così. Se, ad esempio, il neutrino fosse nello stato iniziale assieme al muone dovremmo scrivere (diffusione antineutrino muone)

$$\bar{\nu}_\mu + \mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e \quad (10.a)$$

dato che la convenzione è di accompagnare il leptone negativo con l'antineutrino. Ora, per passare da questo processo al decadimento del muone basta ricordare che lo stesso operatore di campo descrive sia la distruzione di un antineutrino, e quindi il processo (10.a), che la creazione di un neutrino, e quindi il decadimento del muone.



Questi processi possono facilmente essere descritti con l'hamiltoniana corrente per corrente costruita a suo tempo per il decadimento del neutrone e del protone

$$H \sim G_F (\bar{\Psi}_n \dots \Psi_p)^\dagger (\bar{\Psi}_e \dots \Psi_\nu) + G_F (\bar{\Psi}_n \dots \Psi_p) (\bar{\Psi}_e \dots \Psi_\nu)^\dagger$$

Consideriamo infatti il decadimento del muone (la costante di Fermi è la stessa?)

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \quad H \sim G'_F \Psi_\mu \dots \bar{\Psi}_e \dots \Psi_{\nu_e} \dots \bar{\Psi}_{\nu_\mu} \sim G'_F \bar{\Psi}_e \dots \Psi_{\nu_e} \dots \bar{\Psi}_{\nu_\mu} \dots \Psi_\mu$$

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu \quad H \sim G'_F \bar{\Psi}_\mu \dots \Psi_e \dots \bar{\Psi}_{\nu_e} \dots \Psi_{\nu_\mu} \sim G'_F \bar{\Psi}_{\nu_e} \dots \Psi_e \dots \bar{\Psi}_\mu \dots \Psi_{\nu_\mu}$$

seguendo le stesse convenzioni con le quali descrivemmo il decadimento del neutrone e del protone ovvero appaiando gli operatori Ψ e $\bar{\Psi}$ a coppie e assumendo la **convenzione di tenere gli operatori Ψ a destra ed i loro aggiunti $\bar{\Psi}$ a sinistra** (si tenga conto che una coppia deve essere quella elettrone neutrino elettronico per cui non ci sono ambiguità nel modo di procedere!) e riordinando le nostre espressioni assumendo la ulteriore **convenzione di scrivere a destra le cariche elettriche superiori e a sinistra quelle inferiori**

$$H \sim G'_F (\bar{\Psi}_e \dots \Psi_{\nu_e}) (\bar{\Psi}_{\nu_\mu} \dots \Psi_\mu) \sim G'_F (\bar{\Psi}_e \dots \Psi_{\nu_e}) (\bar{\Psi}_\mu \dots \Psi_{\nu_\mu})^\dagger$$

$$H \sim G'_F (\bar{\Psi}_{\nu_e} \dots \Psi_e) (\bar{\Psi}_\mu \dots \Psi_{\nu_\mu}) \sim G'_F (\bar{\Psi}_e \dots \Psi_{\nu_e})^\dagger (\bar{\Psi}_\mu \dots \Psi_{\nu_\mu})$$

Si vede allora che gli hamiltoniani del decadimento del muone e dell'antimuone sono uno l'aggiunto dell'altro per cui possono essere sommati a formare un unico hamiltoniano autoaggiunto che li descrive entrambi (oltre ad altri processi che possono essere dedotti con le stesse regole viste nel caso della elettrodinamica)

$$H \sim G'_F (\bar{\Psi}_e \dots \Psi_{\nu_e})^\dagger (\bar{\Psi}_\mu \dots \Psi_{\nu_\mu}) + G'_F (\bar{\Psi}_e \dots \Psi_{\nu_e}) (\bar{\Psi}_\mu \dots \Psi_{\nu_\mu})^\dagger$$

E' utile ora confrontare le espressioni degli hamiltoniani sia dei decadimenti del neutrone e protone che dei decadimenti del muone positivo e negativo

$$H \sim G_F (\bar{\Psi}_n \dots \Psi_p)^\dagger (\bar{\Psi}_e \dots \Psi_\nu) + G_F (\bar{\Psi}_n \dots \Psi_p) (\bar{\Psi}_e \dots \Psi_\nu)^\dagger$$

$$H \sim G'_F (\bar{\Psi}_e \dots \Psi_{\nu_e})^\dagger (\bar{\Psi}_\mu \dots \Psi_{\nu_\mu}) + G'_F (\bar{\Psi}_e \dots \Psi_{\nu_e}) (\bar{\Psi}_\mu \dots \Psi_{\nu_\mu})^\dagger$$

Osserviamo allora che

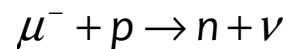
- l'hamiltoniano si presenta sempre nella forma di prodotti di certe coppie caratteristiche di termini dette correnti

$$(\bar{\Psi}_n \dots \Psi_p) \quad (\bar{\Psi}_e \dots \Psi_\nu) \quad (\bar{\Psi}_\mu \dots \Psi_{\nu_\mu})$$

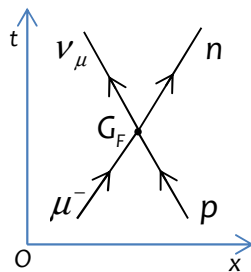
- si pone il problema se la costante di Fermi che interviene nelle tre diverse combinazioni di correnti è la stessa oppure no. A questo proposito, sulla base dei dati sperimentali allora disponibili, nel 1949, indipendentemente gli uni dagli altri, Tiomno e J.A. Wheeler da un lato e G. Puppi dall'altro avanzarono l'ipotesi della **universalità della interazione debole** che affermava che la costante di fermi che interviene nei diversi processi deboli è sempre la stessa. Ciò comporta una grande semplificazione nella struttura della interazione poiché **è sufficiente comporre a prodotto le correnti interessate ponendo davanti la stessa costante di Fermi**;
- in questo modo, se la teoria è giusta, ci si deve attendere un gran numero di nuovi processi. Ad esempio

$$H \sim G_F (\bar{\varphi}_\mu \dots \varphi_\nu)^\dagger (\bar{\varphi}_n \dots \varphi_p) + G_F (\bar{\varphi}_\mu \dots \varphi_\nu) (\bar{\varphi}_p \dots \varphi_n)^\dagger$$

dove il primo termine da luogo, tra gli altri, al processo di **cattura del muone da parte del protone**



previsto da Tiomno e Wheeler nel 1948 ed osservato per la prima volta da Hildebrand nel 1962 (accennare al notevolissimo interesse di questo processo).



la espressione generale
dell'hamiltoniano di
Fermi

In definitiva ci si rese conto che le interazioni deboli potevano dare luogo ad una moltitudine di processi che tuttavia potevano essere ottenuti sulla base di uno schema relativamente semplice consistente in un certo numero di correnti

$$J_{ev} = (\bar{\varphi}_e \dots \varphi_\nu) \quad J_{\mu\nu} = (\bar{\varphi}_\mu \dots \varphi_\nu) \quad J_{np} = (\bar{\varphi}_n \dots \varphi_p) \quad (13)$$

che si combinano tra loro in tutti i possibili modi secondo lo schema corrente per corrente

$$H \sim G_F \sum_{\alpha\beta} (J_\alpha^\dagger J_\beta + J_\alpha J_\beta^\dagger) \quad \alpha, \beta = ev, \mu\nu, np \quad (14)$$

numeri leptonici etc etc... (vedi appunti già fatti)

Un accenno al concetto di simmetria in fisica

La violazione della *simmetria di parità* nelle interazioni deboli giunse del tutto inattesa. Solo T.D Lee e C. N. Yang, in un lavoro del 1956, avevano considerato questa possibilità concludendo comunque che i dati sperimentali fino ad allora noti non erano sufficienti per stabilire né la conservazione né la violazione della simmetria. Prima di fornire qualche dettaglio su questo problema vogliamo dire qualche parola sul concetto di simmetria in fisica.

Trasformazioni di un sistema fisico e simmetrie

Per cominciare dobbiamo immaginare che vi sia un **riferimento O** con tanto di *osservatore dotato di regoli, orologi e di ogni altro strumento necessario per condurre misure*. Poi dobbiamo immaginare che vi sia un **sistema fisico S** . Quindi l'osservatore **O studia il sistema S** e determina la **legge fisica L** che governa *la sua dinamica*. Ora, immaginiamo di effettuare una qualche **trasformazione T sul sistema fisico S** che sarà così trasformato in S' e che O determini la nuova **legge fisica L'** . Se accade che (**L' 'uguale' L**) allora diremo che il sistema S è **simmetrico rispetto alla trasformazione T** .

A volte si preferisce immaginare che la trasformazione T non sia fatta sul sistema fisico S ma sull'osservatore O che sarà così trasformato in O' . In questo caso sia l'osservatore O che O' determineranno le leggi fisiche L ed L' che governano la dinamica del sistema S . Se accade che (**L' 'uguale' L**) allora diremo che il sistema S è **simmetrico rispetto alla trasformazione T** .

I due modi di intendere la trasformazione sono del tutto equivalenti e la scelta dell'uno piuttosto che dell'altro è un fatto del tutto individuale. Comunque si dice **trasformazione attiva** la trasformazione a carico del sistema fisico S mentre si dice **trasformazione passiva** la trasformazione a carico dell'osservatore O (ad esempio nella teoria della relatività ristretta la trasformazione a velocità uniforme è quasi sempre a carico dell'osservatore).

Quando le trasformazioni dipendono da uno o più parametri variabili con continuità si chiamano **trasformazioni continue** e, se connesse all'identità, vanno a costituire un gruppo continuo, nel caso contrario si parla di **trasformazioni discrete**.

Precisiamo infine ora cosa significa che le leggi fisiche L ed L' sono 'uguali'. In generale, quando ci si riferisce alle leggi fisiche, non si intende una eguaglianza in senso stretto dove ogni grandezza fisica che compare in L è identica alla corrispondente grandezza fisica che compare in L' . Un tale concetto di eguaglianza si verifica solo in certi casi (quando accade si dice che le leggi sono **invarianti**) per cui le leggi fisiche sono ritenute uguali anche quando hanno solo la medesima struttura o forma una proprietà che si esprime dicendo che tali leggi sono **covarianti**.

Fatte queste premesse domandiamoci quali possano essere le trasformazioni da considerare. Le più 'fondamentali' tra queste sono le cosiddette **trasformazioni spaziotemporali**. Assumendo la prospettiva delle trasformazioni attive, potremmo trasformare il sistema fisico S attraverso una trasformazione T che:

- **trasla S di un certo intervallo spaziale $\Delta\vec{a}$ arbitrario** trasformandolo in S' . Allora, se le leggi dinamiche di S ed S' sono tali che $L'=L$ (invarianti) si dice che S è simmetrico rispetto alle traslazioni spaziali (trasformazioni continue). Fino ad ora si è verificato che **tutti i sistemi fisici sono simmetrici rispetto alle traslazioni spaziali** per cui si pensa che tale proprietà di simmetria sia in realtà da attribuirsi allo spazio stesso piuttosto che ai sistemi fisici (questo è un punto delicato e per non fraintendere è essenziale ricordare sempre che l'unico modo per accedere alle proprietà dello spazio è quello di esaminare le proprietà dei sistemi fisici che vi sono immersi). In questo senso si dice che **la simmetria delle leggi fisiche rispetto alle traslazioni spaziali comporta l'omogeneità dello spazio**;
- **trasla S di un certo intervallo temporale Δt arbitrario** trasformandolo in S' . Allora, se le leggi dinamiche di S ed S' sono tali che $L'=L$ (invarianti) si dice che S è simmetrico rispetto alle traslazioni temporali (trasformazioni continue). Fino ad ora si è verificato che **tutti i sistemi fisici sono simmetrici rispetto alle traslazioni temporali** per cui si pensa che tale proprietà di simmetria sia in realtà da attribuirsi al tempo stesso piuttosto che ai sistemi fisici. In questo senso si dice che **la simmetria delle leggi fisiche rispetto alle traslazioni temporali comporta l'omogeneità del tempo**;
- **ruota S di un certo angolo $\Delta\alpha$ arbitrario** trasformandolo in S' . Allora, se le leggi dinamiche di S ed S' sono tali che $L'=L$ (covarianti) si dice che S è simmetrico rispetto alle rotazioni (trasformazioni continue). Fino ad ora si è verificato che **tutti i sistemi fisici sono simmetrici rispetto alle rotazioni** per cui si pensa che tale proprietà di simmetria sia in realtà da attribuirsi allo spazio stesso piuttosto che ai sistemi fisici. In questo senso si dice che **la simmetria delle leggi fisiche rispetto a rispetto alle rotazioni comporta la isotropia dello spazio**;

-
- **cambia la velocità di tutti i costituenti di S di un certa quantità arbitraria uniforme $\Delta\vec{w}$** trasformandolo in S'. Allora, se le leggi dinamiche di S ed S' sono tali che $L'=L$ (covarianti) si dice che S è simmetrico rispetto a trasformazioni di Lorentz (nel caso si assuma la teoria della relatività ristretta. Trasformazioni continue). Fino ad ora si è **sempre verificato che tutti i sistemi fisici sono simmetrici rispetto a cambiamenti uniformi della velocità** per cui si pensa che tale proprietà di simmetria sia in realtà da attribuirsi allo spazio stesso piuttosto che ai sistemi fisici. In questo senso si dice che **la simmetria delle leggi fisiche rispetto a cambiamenti uniformi delle velocità comporta la ... dello spazio (manca il termine)**, una proprietà espressa attraverso la validità del **principio di relatività**;
 - **riflette S in uno specchio** trasformandolo in S'. Allora, se le leggi dinamiche di S ed S' sono tali che $L'=L$ (invarianti) si dice che S è simmetrico rispetto a trasformazioni speculari o di parità spaziale (trasformazione discreta). Le leggi dinamiche della fisica classica e quantistica avevano sempre verificato che i sistemi fisici sono simmetrici rispetto a trasformazioni speculari per cui si pensava che tale proprietà di simmetria fosse condivisa da tutti i sistemi fisici. Enorme, quindi, fu la sorpresa quando madame Wu dimostrò che le interazioni deboli non rispettavano questa simmetria per cui, a differenza delle trasformazioni precedenti, non tutti i sistemi fisici sono simmetrici rispetto a trasformazioni di parità spaziale. In particolare diremo che **le interazioni gravitazionali, elettromagnetiche e forti rispettano la simmetria di parità spaziale** mentre **le interazioni deboli la violano**;
 - **scambia l'ordine temporale degli eventi di S** trasformandolo in S'. Allora, se le leggi dinamiche di S ed S' sono tali che $L'=L$ (invarianti) si dice che S è simmetrico rispetto alla inversione temporale (trasformazione discreta). Le leggi dinamiche della fisica classica e quantistica avevano sempre verificato che i sistemi fisici sono simmetrici rispetto a trasformazioni di inversione spaziale con la sola **eccezione della termodinamica**. Tale fatto però non era considerato decisivo poiché già Boltzmann aveva mostrato che la irreversibilità delle leggi termodinamiche era una proprietà 'emergente' del sistema (ovvero una proprietà che si origina come effetto d'insieme del sistema) che non trovava riscontro nelle leggi fondamentali che governavano la dinamica dei costituenti elementari del sistema le quali, invece, erano perfettamente reversibili e rispettavano la simmetria per inversione temporale.
-

Sulla base di questi fatti si riteneva tutti i sistemi fisici fossero simmetrici rispetto a trasformazioni di inversione temporale. Piuttosto grande fu la sorpresa quando J. Cronin e V. Fitch nel 1964 dimostrarono che nei processi deboli con kaoni neutri avevano luogo fenomeni di violazione della simmetria rispetto alla inversione temporale. Oggi sappiamo che **le interazioni gravitazionali, elettromagnetiche e forti rispettano la simmetria rispetto alla inversione temporale** mentre **le interazioni deboli la violano**.

Quando si assume la teoria della relatività ristretta, le trasformazioni spazio-temporali elencate vanno a costituire un unico insieme detto *gruppo di Poincaré*. Se ci si limita a considerare l'insieme delle rotazioni e dei *cambiamenti uniformi di velocità* si ha il *gruppo di Lorentz ristretto*, se si aggiungono le trasformazioni di parità ed inversione temporale si ha il *gruppo di Lorentz completo*, se, infine, si aggiungono anche le traslazioni spaziali e temporali si ottiene l'intero gruppo di Poincaré.

le trasformazioni interne

In un sistema fisico, oltre alle trasformazioni spaziotemporali, sono possibili anche trasformazioni a carico dei costituenti del sistema dette trasformazioni interne. Possibili esempi sono:

- lo **scambio di due o più particelle** che fanno parte del sistema. Poiché una proprietà assolutamente generale delle particelle elementari è che *le particelle dello stesso tipo sono non solo identiche ma anche indistinguibili*, si può dimostrare che **lo stato quantomeccanico di un insieme di particelle dello stesso tipo deve essere sempre simmetrico o antisimmetrico rispetto allo scambio di due particelle qualunque** (il teorema spin-statistica completa il quadro stabilendo la relazione stati antisimmetrici-spin semintero e stati simmetrici-spin intero);
- **la inversione dei numeri quantici interni delle particelle elementari**. Ad esempio la trasformazione di ogni carica elettrica del sistema con il suo opposto viene detta **coniugazione di carica**. Ancora una volta si verifica sperimentalmente che **le interazioni gravitazionali, elettromagnetiche e forti rispettano la simmetria per coniugazione di carica mentre le interazioni deboli la violano**.

Simmetrie e leggi di conservazione

Per completezza dobbiamo poi ricordare che il **teorema di Noether** connette le simmetrie dell'azione di un sistema fisico con altrettante leggi di conservazione. In particolare si possono mostrare le seguenti corrispondenze: *simmetria per traslazioni spaziali -> conservazione quantità di moto; simmetria per traslazioni temporali -> conservazione della energia; simmetria per rotazioni spaziali -> conservazione del momento angolare; simmetria per trasformazione di parità -> conservazione della parità spaziale; simmetria per inversione temporale -> conservazione della parità temporale; simmetria per coniugazione di carica -> conservazione della parità di carica.*

Tra queste, le prime tre simmetrie si ritiene siano valide senza eccezioni poiché dovute, in ultima analisi, alle proprietà di *omogeneità ed isotropia dello spazio e del tempo*, un fatto che conferisce altrettanta generalità ai corrispondenti principi di conservazione della energia, della quantità di moto e del momento angolare. Per quanto riguarda le rimanenti simmetrie la situazione è riassunta nella tabella.

La simmetria per **trasformazioni CPT** (combinazione di C, P e T) è valida senza eccezioni. D'altra parte si può mostrare che una teoria di campo, locale, lorentz invariante, descritta da un hamiltoniano autoaggiunto, deve essere simmetrica rispetto a trasformazioni CPT (teorema CPT). Dunque, il fatto che CPT sia rispettata indica che le interazioni ad oggi note sono sempre descrivibili per mezzo di teorie con le proprietà suddette.

Consideriamo le **trasformazioni CP**. Dato che la simmetria CPT è sempre soddisfatta, la esistenza di una simmetria (violazione) per CP indica una simmetria (violazione) per T. Solo alcuni processi deboli violano la simmetria CP. Per quanto riguarda la **trasformazione di parità P**, tutti i processi deboli violano la simmetria P (vedi seguito) mentre le rimanenti interazioni la soddisfano (recenti indicazioni di violazioni di P nelle interazioni forti).

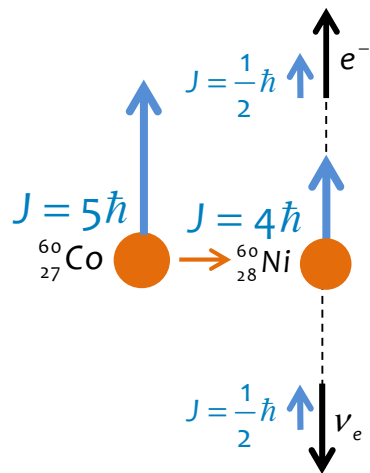
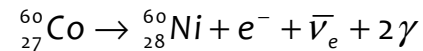
Per quanto riguarda la **trasformazione di coniugazione di carica C**, tutti i processi deboli violano la simmetria C (vedi seguito) mentre le rimanenti interazioni la soddisfano.

	Gr	Db	Em	Ft
CPT	Si	Si	Si	Si
CP/T	Si	No	Si	Si
P	Si	No	Si	Si
C	Si	No	Si	Si

La violazione della parità nelle interazioni deboli

La violazione della parità nelle interazioni deboli giunse come un fenomeno del tutto inatteso. Solo T.D Lee e C. N. Yang, in un lavoro del 1956, avevano considerato questa possibilità concludendo comunque che i dati sperimentali fino ad allora noti non erano sufficienti per stabilire né la conservazione né la violazione della parità nelle interazioni deboli.

Sulla base di questa osservazione, madame C. S. Wu, che conosceva personalmente sia Lee che Yang, progettò un nuovo esperimento basato sul decadimento beta del ^{60}Co

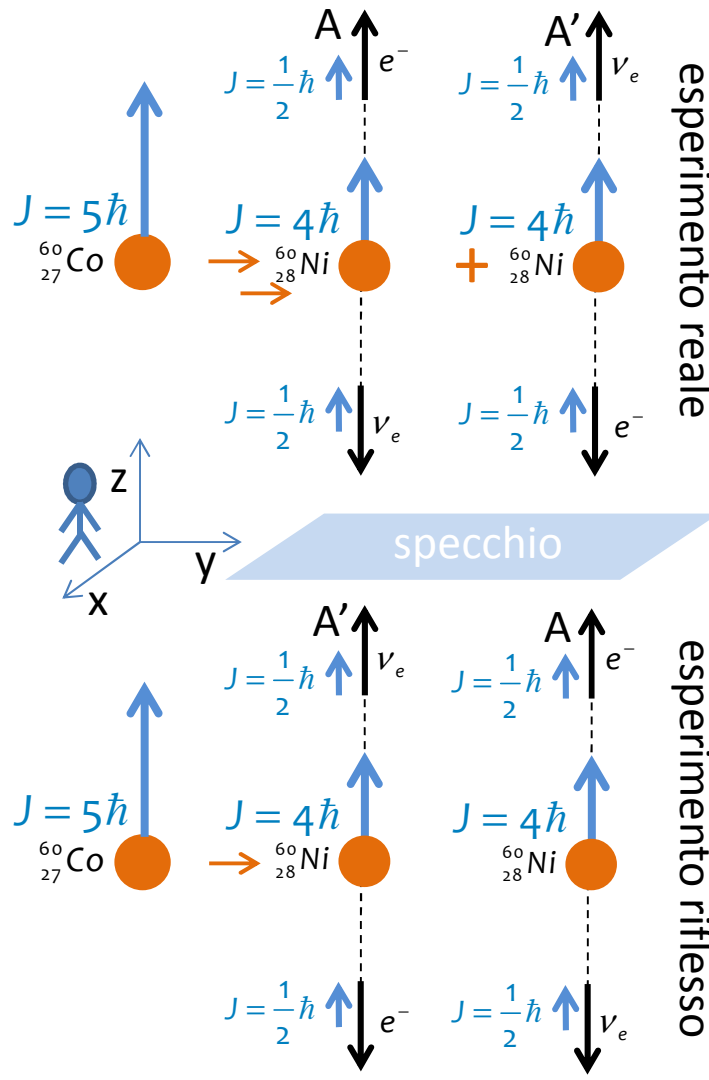


una scelta dettata dal fatto che erano ben consolidate alcune tecniche per la polarizzazione di questi nuclei i quali, oltretutto, davano luogo ad un decadimento dalle proprietà ben note ed adatte all'esperimento.

In particolare si sapeva che i) **il nucleo di ${}^{60}\text{Co}$ ha momento angolare $J = 5\hbar$** ; ii) **il nucleo di ${}^{60}\text{Ni}$ ha momento angolare $J = 4\hbar$** ; iii) **elettrone e antineutrino hanno momento angolare orbitale $l=0$** in quanto emessi per mezzo di una interazione di contatto.

Da ciò si deduceva che elettrone e antineutrino, ciascuno di spin $S = 1/2\hbar$, dovevano essere **emessi con spin paralleli**. Sulla base di queste considerazioni, la cinematica di un possibile decadimento è mostrata nella figura dove si vede un elettrone emesso lungo la direzione e nel verso del momento angolare del ${}^{60}\text{Ni}$ e l'antineutrino nella stessa direzione con verso opposto (per essere precisi bisogna dire che il nucleo di ${}^{60}\text{Ni}$ assorbe anche una frazione di momento per cui elettrone e antineutrino volano lungo direzioni angolate. Dato però che il neutrino non viene osservato trascureremo questo fatto).

Come vedremo, nell'esperimento **è cruciale conoscere la direzione ed il verso del momento angolare di ognuno dei nuclei di cobalto**. Dato che, in condizioni normali, questi sono diretti in modo del tutto casuale, risulta in primo luogo necessario allineare o polarizzare i momenti angolari dei nuclei di cobalto con un qualche sistema. Si tratta del problema tecnicamente più delicato dell'esperimento che madame Wu risolse posizionando il ${}^{60}\text{Co}$ (depositato su di un substrato) nel campo magnetico di un solenoide all'interno di un criostato raffreddato con elio liquido (punto di ebollizione a 4,24 K) e poi ulteriormente raffreddato attraverso la smagnetizzazione adiabatica (effetto magnetocalorico).



esperimento reale

esperimento riflesso

Immaginiamo che i nuclei di cobalto siano polarizzati verticalmente verso l'alto. Ciò fissa verticalmente verso l'alto anche gli spin dell'elettrone e del neutrino. Consideriamo ora eventi del tipo A dove gli elettroni vengono emessi attorno alla direzione di polarizzazione verso l'alto attraverso un'area di riferimento S_A in una frazione di casi F_A .

Osservando l'esperimento allo specchio si vedrà una frazione $F_{A'}=F_A$ di eventi A' con nuclei di cobalto e spin dell'elettrone e del neutrino polarizzati verticalmente verso l'alto (il momento angolare e gli spin lungo z non vengono modificati dalla riflessione speculare) ma elettroni emessi verticalmente verso il basso attraverso un'area di riferimento S_B immagine speculare di S_A .

Se il cobalto decadde solo in eventi di tipo A la simmetria di parità sarebbe certamente violata poiché sarebbe sempre possibile distinguere gli eventi reali dalle loro immagine speculare (infatti sarebbe sufficiente misurare l'allineamento tra spin e impulso dell'elettrone: se spin e impulso sono allineati l'evento è reale mentre se sono anti allineati l'evento è speculare). Ciò significa che la parità è conservata solo se il cobalto decade anche in eventi di tipo A' in una frazione di casi $F_{A'}=F_A$.

In questo modo comprendiamo il fatto ovvio che **se l'interazione debole è simmetrica rispetto alla parità allora ad ogni evento reale E corrisponde un evento reale E' immagine speculare di E**. Se invece l'interazione debole non è simmetrica rispetto alla parità allora questa corrispondenza non risulta soddisfatta.

$$\vec{v} \xrightarrow{R} \vec{v}'$$

$$\vec{L} \xrightarrow{R} \vec{L}'$$

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$$

$$\vec{v}' = v'_x \hat{i} + v'_y \hat{j} - v'_z \hat{k}$$

$$\vec{L} = (r_y v_z - r_z v_y) \hat{i} + (r_z v_x - r_x v_z) \hat{j} + (r_x v_y - r_y v_x) \hat{k} = L_x \hat{i} + L_y \hat{j} + L_z \hat{k}$$

$$\vec{L}' = -(r_y v_z - r_z v_y) \hat{i} - (r_z v_x - r_x v_z) \hat{j} + (r_x v_y - r_y v_x) \hat{k} = -L_x \hat{i} - L_y \hat{j} + L_z \hat{k}$$

$$\vec{v} = v_z \hat{k} \xrightarrow{R} \vec{v}' = -v'_z \hat{k}$$

$$\vec{L} = L_z \hat{k} \xrightarrow{R} \vec{L}' = L_z \hat{k}$$

l'esito dell'esperimento

E' inoltre chiaro che si può variare di grado o entità della violazione. Infatti se le frazioni di eventi reali del tipo A e A' sono molto diverse allora la violazione è molto intensa mentre se sono prossime la violazione è lieve [una possibile parametrizzazione potrebbe essere data dalla asimmetria $A = (F_A - F_{A'}) / (F_A + F_{A'})$].

Quale fu l'esito dell'esperimento? Madame Wu registrò un eccesso di elettroni emessi verso il basso, un fatto che indicava che **le interazioni deboli tendevano a produrre elettroni con spin di verso opposto alla quantità di moto** e che dimostrava che **le interazioni deboli violano la simmetria di parità spaziale**.

Come avevano notato Lee e Yang, ciò indicava anche che **le interazioni deboli violano la simmetria di coniugazione di carica**. Per vederlo proviamo ad immaginare di ripetere l'esperimento trasformando le particelle del sistema (non dell'apparato sperimentale) in antiparticelle. Gli atomi di cobalto diventeranno antiatomi di cobalto ed allineeranno i loro spin verticalmente verso il basso (il comportamento in campo magnetico dipende dal momento di dipolo magnetico che dipende dallo spin e dalla carica. Invertendo la carica si inverte il momento di dipolo e quindi l'orientamento in campo magnetico). Saranno allora prodotti antinuclei di nichel, positroni e neutrini con spin verticali verso il basso. D'altra parte ci sarà ancora un eccesso di positroni verso il basso poiché si è operato su di una proprietà interna delle particelle e non sulla cinematica. Risulta allora che le interazioni deboli tendono a produrre positroni con spin equiverso alla quantità di moto. Riassumendo, **le interazioni deboli emettono particelle con spin tendenzialmente antiallineato alla quantità di moto e antiparticelle con spin tendenzialmente allineato alla quantità di moto**. Un fatto del genere viola palesemente la simmetria per coniugazione di carica poiché uno sperimentatore dalla semplice osservazione dell'orientamento relativo tra spin e quantità di moto può capire se sta operando con atomi di cobalto o antiatomi di cobalto.

Vale però la pena notare che nell'esperimento di madame Wu **la simmetria rispetto alla trasformazione combinata CP è soddisfatta un fatto che accade per quasi tutti i processi deboli**. Quasi tutti perché sono oramai noti alcuni processi deboli che violano non solo C e P ma pure CP.

Mentre madame Wu eseguiva il suo esperimento, Lee e Yang diedero la notizia della violazione della parità ad alcuni colleghi che, in modo indipendente, verificarono l'effetto. Non si creò però alcun caso di priorità poiché R. L. Garwin, L. Lederman e R. Weinrich riconobbero il merito di madame Wu attendendo che pubblicasse per prima (il loro lavoro fu pubblicato nella stessa rivista subito in coda a quello di madame Wu).

La teoria V-A delle interazioni deboli

Il vero significato degli esperimenti sulla violazione della simmetria di parità non fu colto immediatamente a causa di una situazione conflittuale con i precedenti dati sperimentali sulle interazioni deboli. Fu E. C. G. Sudarshan, un fisico teorico indiano allora studente di R. Marshak, a trovare la giusta soluzione. Analizzando in dettaglio tutti gli esperimenti fino allora compiuti si rese conto che alcuni di questi contenevano errori. Tenendo conto di tali errori emergeva una situazione coerente spiegabile con due semplici assunti: **i) la violazione della parità nella interazione debole è massimale; ii) le particelle prodotte in un processo debole sono 'sinistrorse' mentre le antiparticelle sono 'destrorse'**. Si perveniva in questo modo alla celebrata **teoria V-A delle interazioni deboli** capace di spiegare in modo dettagliato tutta la fenomenologia delle interazioni deboli nel regime delle 'basse' energie [la teoria è detta V-A poiché, sulla base delle proprietà delle matrici di Dirac, le correnti deboli possono essere riespresse come la differenza di una corrente vettoriale (V) con una pseudovettoriale (A)]. Spesso la teoria V-A è associata ai nomi di Feynman e Gell-Mann poiché furono loro a pubblicarla per primi, tuttavia sono oramai note testimonianze che provano che Gell-Mann apprese la teoria direttamente da Sudarshan il quale, allora studente, non fu sufficientemente accorto da pubblicare il lavoro prima di discuterlo con i colleghi.

Si può notare che il carattere tendenzialmente sinistrorso delle particelle e destrorso delle antiparticelle prodotte nella interazione debole emerge con chiarezza nell'esperimento di madame Wu dove gli elettroni sono prodotti con spin antiallineato all'impulso e gli antineutrini con spin allineato all'impulso. Non è evidente, invece, il carattere massimale della violazione, ovvero il fatto che gli elettroni destrorsi e gli antineutrini sinistrorsi sono del tutto assenti. Ma cosa significa carattere sinistrorso delle particelle?

chiralità ed elicità

Premesso che si definisce **elicità positiva** uno stato in cui *lo spin è allineato alla quantità di moto* ed **elicità negativa** uno stato in cui *lo spin è antiallineato alla quantità di moto*, fino ad ora abbiamo identificato questa proprietà con il fatto che le particelle prodotte dalla interazione debole hanno lo spin antiallineato con la quantità di moto ovvero possiedono elicità negativa. Ciò non è esatto. Si può infatti mostrare che le particelle sinistrorse (destrorse) si trovano in uno stato in cui sono presenti sia l'elicità positiva che negativa e che la elicità negativa (positiva) domina su quella positiva (negativa) mano a mano che la velocità cresce per diventare l'unica componente nel caso che la particella, priva di massa a riposo, si muova alla velocità della luce. Dunque la nozione di carattere sinistrorso (destrorso) non coincide con la nozione di elicità negativa (positiva). In effetti si può mostrare (ci vuole la teoria relativistica di Dirac per le particelle di spin $s=1/2$) che il carattere sinistrorso/destrorso si riferisce in realtà ad *una certa proprietà dello spin* della particella detta **chiralità** la quale solo alle alte velocità può essere approssimata con la elicità. Alle basse velocità i due concetti sono assai differenti. Si tenga infatti presente che **la chiralità è un concetto relativisticamente invariante** mentre, soprattutto alle basse velocità, la elicità non lo è (nel momento in cui un osservatore supera una particella in volo si produce una variazione dello stato di elicità che egli osserva).

Quali modifiche bisogna apportare all'hamiltoniano corrente per corrente della teoria di Fermi affinché si possano descrivere gli effetti di violazione della simmetria di parità nelle interazioni deboli? Osserviamo in primo luogo che, sulla base della teoria di Dirac, un operatore di campo può sempre essere espresso come somma di una componente destrorsa (R) e sinistrorsa (L)

$$\psi = \psi_R + \psi_S$$

la teoria V-A delle interazioni deboli per elettroni, muoni e nucleoni

Dato che **la violazione della simmetria di parità è massimale una sola delle due componenti partecipa alle interazioni deboli ed i dati sperimentali dicono che tale componente è quella sinistrorsa**. Ciò significa che le correnti deboli di elettroni, muoni e nucleoni (neutroni e protoni) dovranno essere corrette nel modo seguente

$$J_e^L = (\bar{\varphi}_e^L \dots \varphi_\nu^L) \quad J_\mu^L = (\bar{\varphi}_\mu^L \dots \varphi_\nu^L) \quad J_n^L = (\bar{\varphi}_n^L \dots \varphi_p^L)$$

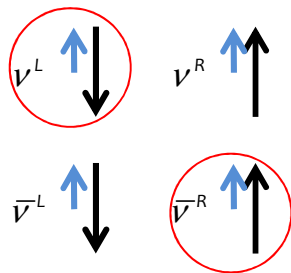
rimanendo invece valida **la struttura correntecorrente** con una sola **costante universale per tutti processi deboli**

$$H \sim G_F \sum_{\alpha\beta} (J_\alpha^\dagger J_\beta + J_\alpha J_\beta^\dagger) \quad \alpha, \beta = e, \mu, n$$

Dunque **le componenti destrorse della particelle e sinistrorse della antiparticelle non danno luogo alla interazione debole** un fatto in se assai misterioso che il modello standard accoglierà come dato di fatto postulando correnti deboli del tipo mostrato.

il problema della reale neutralità/carica dei neutrini

Secondo questa impostazione **le particelle sono diverse dalle antiparticelle** (ad esempio un elettrone è diverso da un positrone), **entrambe possiedono componenti L e R e, per quanto riguarda le interazioni deboli, le particelle hanno componente L attiva e le antiparticelle componente R attiva** (particelle con queste proprietà sono dette **particelle di Dirac**). Tale impostazione è corretta nel caso delle particelle materiali massive del modello standard (e, μ , τ , u, d, c, s, t, b) che sono certamente di Dirac mentre deve essere valutata con attenzione nel caso delle particelle con massa piccola o, al limite, nulla come i neutrini (ν_e, ν_μ, ν_τ).



Infatti, nel caso di neutrini non massivi, **la chiralità coincide con la elicità** e si ha la situazione mostrata a lato dove sono stati cerchiati in rosso i neutrini che prendono parte alla interazione debole (il discorso vale per tutti i sapori di neutrino). Ora si noti che i neutrini ν^R e $\bar{\nu}^L$ non interagiscono debolmente, ma nemmeno elettromagneticamente e fortemente per cui, se esistono, possono essere rivelati solo per mezzo dei loro effetti gravitazionali, dunque forse mai (neutrini sterili)! In questa situazione si osservano solo (e a fatica!) i neutrini ν^L e $\bar{\nu}^R$ per cui **non risulta possibile stabilire se i diversi processi cui neutrino ed antineutrino danno luogo (si pensi all'esperimento di Davis) siano dovuti alla differente elicità di cui sono portatori oppure al fatto che neutrino ed antineutrino sono intrinsecamente differenti come assunto nel modello standard (ovvero realmente carichi)**.

La faccenda cambia se i neutrini sono invece massivi, un fatto oramai certo dopo la osservazione del fenomeno della oscillazione del sapore nei neutrini che può avvenire, appunto, solo con neutrini massivi. In questo caso, infatti, la chiralità non coincide con la elicità e risulta possibile, almeno in linea di principio, stabilire per via sperimentale se: i) neutrino ed antineutrino sono particelle intrinsecamente differenti per cui il neutrino è realmente carico (descritto da un operatore di campo complesso); ii) neutrino ed antineutrino sono la stessa particella per cui il neutrino è realmente neutro (descritto da un operatore di campo reale). Nel primo caso si parla di **neutrino di Dirac** nel secondo di **neutrino di Majorana** (poiché fu Majorana che per primo scrisse, nel 1937, l'equazione di Dirac per particelle realmente neutre).

Un processo che potrebbe dirimere la questione è il doppio decadimento beta nucleare senza emissione di neutrini. E' semplice capire perché. In certi nuclei il doppio decadimento beta risulta energeticamente favorito il che significa che può avvenire il seguente doppio processo con emissione di due neutrini

$$n \rightarrow p + e^{-} + \bar{\nu}_e$$

$$n \rightarrow p + e^{-} + \bar{\nu}_e$$

Ora se i neutrini non vengono osservati ciò vuol dire che il neutrino emesso in uno dei due decadimenti viene assorbito dall'altro per cui il processo diventa

$$n \rightarrow p + e^{-} + \bar{\nu}_e$$

$$\bar{\nu}_e + n \rightarrow p + e^{-}$$

Ma se l'antineutrino induce la conversione neutrone-protone significa che neutrino ed antineutrino coincidono (si pensi all'esperimento di Davies). E' inutile sottolineare la estrema difficoltà di questi esperimenti che per ora hanno escluso processi di questo tipo su tempi dell'ordine di 10^{25} anni confermando, entro questo limite, il fatto che i neutrini sono di tipo Dirac.

**la estensione della
teoria V-A alle nuove
particelle**

La teoria V-A delle interazioni deboli si è dimostrata sufficientemente flessibile e generale da potere accogliere facilmente particelle che furono scoperte dopo la sua formulazione. In particolare, a metà degli anni '60, risultò chiaro che neutroni e protoni non erano particelle elementari ma consistenti in stati legati di tre quark: il protone uno stato legato (udu) ed il neutrone uno stato legato (udd). Ciò significa che a livello elementare la tipica conversione neutrone-protone che si osserva nel decadimento beta nasconde una conversione up-down. L'ipotesi più semplice è che la corrente debole della coppia di quark up-down sia strutturata nello stesso modo delle correnti elettrone-neutrino elettronico e muone-neutrino muonico. I fatti sperimentali confermano (sostanzialmente) questa ipotesi per cui sia i nuovi quark che i nuovi leptoni non hanno fatto altro che fare aumentare il numero di correnti deboli indipendenti senza modificare la struttura della teoria.

Abbiamo allora le seguenti correnti deboli per i leptoni

$$J_e^L = (\bar{\varphi}_e^L \dots \varphi_\nu^L) \quad J_\mu^L = (\bar{\varphi}_\mu^L \dots \varphi_\nu^L) \quad J_\tau^L = (\bar{\varphi}_\tau^L \dots \varphi_\nu^L)$$

e le seguenti correnti deboli per i quark

$$J_{ud}^L = (\bar{\varphi}_d^L \dots \varphi_u^L) \quad J_{cs}^L = (\bar{\varphi}_s^L \dots \varphi_c^L) \quad J_{tb}^L = (\bar{\varphi}_t^L \dots \varphi_b^L)$$

la complessa struttura
di sapore delle
interazioni deboli

le quali chiariscono che **l'interazione debole, al pari di quella gravitazionale, interessa tutte le particelle materiali**
note. La struttura di queste correnti mostra chiaramente che **l'interazione debole non conserva il sapore delle particelle.** Un modo utile per memorizzare la complessa struttura di sapore delle interazioni deboli è quello di organizzarle in coppie, dette anche **famiglie o generazioni**, nel modo seguente (seguiamo la convenzione di porre in prima posizione le cariche elettriche più elevate)

leptoni	quark	antileptoni	antiquark
$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bar{e} \\ \bar{\nu}_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mu} \\ \bar{\nu}_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\tau} \\ \bar{\nu}_\tau \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bar{d} \\ \bar{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{s} \\ \bar{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{b} \\ \bar{t} \end{pmatrix}$

dove risulta sottinteso che la corrente debole si costruisce solo con le componenti sinistrorse di queste coppie di particelle.

E' necessario precisare che questo schema delle correnti, che aveva lavorato con successo fino alla formulazione della teoria V-A, a partire dagli anni '60 si è complicato perché si è scoperto, ad esempio, che il quark up si trasforma in modo prevalente in un quark down ma non è escluso che possa convertirsi anche in un quark strange o bottom. Lo stesso dicasi per gli altri quark. Negli ultimi anni, poi, è diventato chiaro che un fenomeno del genere ricorre anche tra i leptoni per cui un elettrone si converte in modo prevalente in un neutrino elettronico ma non è escluso che possa convertirsi anche in neutrino muonico o tauonico.

$$\left(\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix} \right) \quad \left(\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} \right) \quad (1a)$$

la matrice CKM

La descrizione di questa complessa struttura di sapore delle interazioni deboli emerse gradualmente. Limitatamente alla terna di quark up, down e strano essa è dovuta ad lavoro di N. Cabibbo del 1963. La estensione al quark charm fu proposta da S. Glashow, J. Iliopoulos e L. Maiani nel 1970 mentre il lavoro finale fu scritto da M. Kobayashi e T. Maskawa nel 1973. Oltre ad introdurre la matrice che descrive il fenomeno (detta **matrice di Cabibbo- Kobayashi -Maskawa, matrice CKM**), i due autori sottolinearono che la struttura della matrice era tale da contenere una **fase complessa** capace di descrivere il fenomeno della **violazione della simmetria CP** effettivamente osservato in alcuni processi deboli (nel 2008 ricevettero per questo lavoro il premio Nobel). I moduli degli elementi della matrice CKM sono riportati qui sotto

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} |V_{ud}| & |V_{us}| & |V_{ub}| \\ |V_{cd}| & |V_{cs}| & |V_{cb}| \\ |V_{td}| & |V_{ts}| & |V_{tb}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.975 & 0.225 & 0.004 \\ 0.225 & 0.973 & 0.04 \\ 0.009 & 0.004 & 0.999 \end{pmatrix}$$

Dato che la somma delle probabilità di transizione da un qualunque quark ‘superiore’ (up-like) verso i quark ‘inferiori’ (down-like) deve valere uno (ad esempio la somma delle probabilità di transizione dal quark up ai quark d, s e b) la matrice CKM risulta unitaria.

Data questa situazione, ci si può chiedere in che modo si debbano costruire le correnti deboli nel settore dei quark. La risposta è semplice, basta costruire le seguenti combinazioni lineari di sapori

$$d' = V_{ud}d + V_{us}s + V_{ub}b \quad s' = V_{cd}d + V_{cs}s + V_{cb}b \quad b' = V_{td}d + V_{ts}s + V_{tb}b \quad (2a)$$

e poi costruire le seguenti correnti

$$(\bar{d}' \dots u) \quad (\bar{s}' \dots c) \quad (\bar{b}' \dots t)$$

utilizzando sempre la costante di Fermi G_f per comporre l’hamiltoniano, in accordo con il principio della universalità delle interazioni deboli che, in questa forma, rimane valido.

Negli ultimi anni si è chiarito che il fenomeno del mixing del sapore è una proprietà generale delle interazioni deboli e riguarda pure il settore leptonic. Ciò significa che nel corso di una interazione debole un elettrone si trasforma preferenzialmente in neutrino elettronico ma ha anche una piccola probabilità di trasformarsi in neutrino muonico o tauonico.

la matrice PMNS

Analogamente per il muone ed il tau. Il Modello Standard può accogliere facilmente questo fenomeno attraverso una matrice unitaria 3x3 del tutto simile a quella di CKM. Si tratta della **Matrice di Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata o Matrice PMNS** (il fenomeno del miscelamento fu intuito da B. Pontecorvo nel 1959 mentre la matrice fu proposta da Maki, Nakagawa e Sakata nel 1962) che spiega il rimarchevole fenomeno della **oscillazione dei neutrini**.

il numero leptonico

Le transizioni schematizzate in (1) mostrano chiaramente che, a causa del fenomeno del miscelamento del sapore, in un processo debole un elettrone iniziale evolve in un neutrino elettronico, o muonico, o tauonico. Lo stesso dicasi per il muone ed il tau. Questo significa che, nei processi deboli, ad ogni leptone iniziale tipo elettrone/muone/tau deve corrispondere un leptone finale tipo neutrino-e/neutrino-mu/neutrino-tau. Naturalmente è vero anche che ad ogni leptone iniziale tipo neutrino-e/neutrino-mu/neutrino-tau deve corrispondere un leptone finale tipo elettrone/muone/tau. Infine è vero pure che se nello stato iniziale (finale) sono assenti leptoni, nello stato finale (iniziale) possono essere presenti leptoni tipo elettrone/antineutrino-e, muone/antineutrino-mu, tau/antineutrino-tau oppure antielettrone/neutrino-e, antimuone/neutrino-mu, antitau/neutrino-tau. Questi fatti, legati alla particolare struttura delle correnti deboli, possono essere riassunti introducendo: i) un numero quantico proprio dei leptoni detto **numero leptonico** (vedi tabella); ii) postulando **la conservazione del numero leptonico in tutti i processi**.

numeri leptonici delle particelle						
e	ν_e	μ	ν_μ	τ	ν_τ	1
\bar{e}	$\bar{\nu}_e$	$\bar{\mu}$	$\bar{\nu}_\mu$	$\bar{\tau}$	$\bar{\nu}_\tau$	-1
u	d	c	s	t	b	0
\bar{u}	\bar{d}	\bar{c}	\bar{s}	\bar{t}	\bar{b}	0

La validità della conservazione del numero leptonico viene saggiata cercando processi vietati dal principio quali ad esempio il seguente decadimento muonico (mai osservato fino ad ora)

$$\mu^- \rightarrow e^- + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$$

le masse dei quark e dei neutrini prodotti dalle interazioni deboli

Il fatto che le correnti deboli debbano essere costruite non con i quark down-like di sapore definito ma con loro combinazioni lineari [espressioni (2a)], né con i neutrini di sapore definito ma con loro combinazioni lineari, deve essere ulteriormente sottolineato. Infatti si deve ricordare che sia i quark che i neutrini di sapore definito hanno masse definite per cui le loro combinazioni lineari non possono avere masse definite. Ciò significa che ***i neutrini ed i quark down-like prodotti dalle interazioni deboli non hanno valori definiti delle masse.***

la conservazione del numero barionico nelle interazioni deboli

Nonostante il miscelamento del sapore, le interazioni deboli separano in modo assoluto i quark dai leptoni nel senso che ***un leptone è sempre trasformato in un leptone ed un quark è sempre trasformato in un quark*** senza eccezioni note. Dato che i quark hanno numero barionico $B=1/3$ ed i leptoni $B=0$, si comprende che questo fatto garantisce ***la conservazione del numero barionico da parte delle interazioni deboli.***

la varietà dei processi deboli

Infine vogliamo richiamare l'attenzione sull'enorme numero di diversi processi deboli che la teoria V-A con la sua struttura corrente per corrente descrive. Infatti ci sono 9 diverse correnti deboli tra i leptoni (considerando la matrice PMNS) e 9 diverse correnti deboli tra i quark (considerando la matrice CKM) per un totale di 18 diverse correnti deboli. Queste possono essere combinate a coppie in tutti modi possibili per formare 45 processi hamiltoniani puramente leptonici, 45 hamiltoniani puramente adronici e 45 hamiltoniani semileptonici (ovvero con leptoni e quark). Ciascuno di questi hamiltoniani poi, in accordo con i principi generali della teoria dei campi, descrive tutti i processi che si ottengono ponendo a turno le particelle nelle posizioni iniziali e finali.

La costruzione di una teoria di campo delle interazioni deboli

La teoria V-A, oltre a descrivere correttamente una vastissima fenomenologia delle interazioni deboli alle basse energie, fissa la struttura generale delle correnti deboli costituendo il punto di partenza dei successivi necessari sviluppi. Infatti, in essa vi è un limite che deve essere superato poiché la descrizione della interazione debole attraverso una interazione di contatto appare essere una drastica semplificazione (oltre a porre tutta una serie di problemi teorici che qui non discuteremo). Come Fermi aveva intuito, **il modello deve essere quello della interazione elettromagnetica** dove, l'interazione tra particelle, avviene per mezzo di un campo 'mediatore' cui le particelle sono accoppiate attraverso le loro cariche elettriche.

Nel costruire una teoria di questo tipo si devono però superare due difficoltà: i) descrivere il fatto che nel corso di una interazione debole le particelle subiscono un cambiamento di sapore; ii) descrivere il carattere a corto raggio della interazione debole.

la necessità di una teoria con due cariche di gauge

La prima di queste viene agevolmente superata ponendosi nel quadro delle **teorie di gauge** identificando le componenti sinistrorse dei due sapori convolti nelle diverse correnti deboli con altrettante cariche di gauge. Ciò significa che le componenti L delle coppie di particelle che compaiono nelle diverse correnti deboli dovranno essere pensate come due differenti stati di 'carica debole' della interazione debole (proprio come i colori verde, rosso e blu dei quark sono differenti stati di 'carica forte' della interazione forte). In questo modo neutrino-e-L ed elettrone-L, ad esempio, dal punto di vista della interazione debole sono due stati di carica interna differente di una stessa particella! Così, le 18 differenti coppie di particelle, sono altrettante coppie di cariche deboli che partecipano alla interazione debole nello stesso modo, in accordo con il principio di universalità della interazione. Comprendiamo allora immediatamente che la teoria di gauge delle interazioni deboli non può che essere una **teoria fondata sulla simmetria rispetto a trasformazioni di $SU(2)_L$ di isospin debole** [il pedice L ricorda che solo le componenti L possiedono isospin debole. Il nome isospin deriva dal fatto che la coppia di stati di 'carica debole' ha le stesse proprietà matematiche della coppia di stati di spin di una particella di spin $\frac{1}{2}$: ($I_3=1/2, I_3=1/2$) e ($I_3=1/2, I_3=-1/2$)] la quale comporta l'esistenza di **$2 \times 2 - 1 = 3$ diversi campi mediatori di spin $S=1\hbar$** (che saranno detti W^+ , W^- e Z_0), portatori essi stessi di 'carica debole'.

la necessità di un meccanismo che renda le interazioni deboli a corto raggio d'azione

In una teoria di gauge nella sua forma basilare tali campi mediatori sono privi di massa (come nel caso del campo elettromagnetico dove i quanti sono non massivi) il che comporta, come più volte osservato, che l'interazione abbia un andamento a lungo raggio del tipo $1/r^2$ analogo a quello della forza elettromagnetica (raggio infinito della interazione). Molto semplicemente, la conseguenza pratica di questo fatto sarebbe che i campi di forza deboli **W^+ , W^- e Z_0** dovrebbero essere osservati a grande distanza e quindi anche a livello macroscopico, un fatto che contraddice nel modo più evidente gli esperimenti che sono invece correttamente spiegati dalla teoria V-A che assume addirittura una interazione puntiforme (dunque a raggio d'azione nullo). Dunque, l'unica via di uscita è

la necessità di un meccanismo capace di conferire massa ai campi deboli

che esista **un meccanismo capace di oscurare i campi di forza deboli rendendo l'interazione a corto raggio**

Nel caso delle interazioni forti (che pure sono a corto raggio ma i cui mediatori, i campi gluonici, hanno massa nulla e dunque raggio d'azione infinito) i campi gluonici sono oscurati dal confinamento che lega le cariche di colore (i quark) all'interno di adroni di colore nullo. In questo modo i campi gluonici esterni all'adrone sono essenzialmente multipolari e, come tali, con un rapido andamento a zero all'aumentare della distanza. Un simile meccanismo non è però pensabile nel caso delle interazioni deboli. Infatti, poiché le coppie di cariche di isospin (ν_e-e) , $(\nu_\mu-\mu)$, $(\nu_\tau-\tau)$, $(u-d)$, $(c-s)$, $(t-b)$, almeno nel caso dei leptoni, sono osservabili come particelle libere, si deve dedurre che **nel caso delle interazioni deboli non opera alcun meccanismo di confinamento**.

Ciò suggerisce che nel caso delle interazioni deboli, i campi irradiati da una carica debole non riescano mai a raggiungere una seconda carica debole per creare uno stato legato. Se così è deve allora trattarsi di un meccanismo che inibisce la propagazione dei campi mediatori. L'unico noto, nelle teorie di campo quantizzato, fu scoperto da Yukawa nel 1936 e richiede che **i mediatori della interazione, in questo caso i campi deboli W^+ , W^- e Z^0 irradiati da una certa carica d'isospin debole, abbiano massa non nulla**.

D'altra parte in una teoria di gauge i mediatori sono irradiati con una massa nulla per cui l'unica possibilità è **quella di ammettere che i campi deboli W^+ , W^- e Z^0 , pur irradiati dalle cariche d'isospin debole senza massa, appena irradiati, attraverso un qualche meccanismo, acquisiscano una massa che impedisce loro di propagarsi**. Dunque, il destino delle teorie di gauge nella descrizione delle interazioni deboli è legato al superamento di un passaggio molto stretto superato il quale, però, si profila una possibilità molto interessante.

La possibilità di una unificazione delle interazioni deboli ed elettromagnetiche

Infatti, immaginiamo che esista un meccanismo capace di conferire massa ai campi deboli **W^+ , W^- e Z^0** . I dati sperimentali dicono che l'interazione debole è poco intensa se paragonata alla interazione elettromagnetica o forte. Ciò significa che ad una certa distanza dalla carica debole l'interazione è soppressa. Come mostrato a suo tempo discutendo la scoperta di Yukawa, le cause di questo fatto, in linea di principio, possono essere: i) una piccola probabilità di emissione al vertice dei campi mediatori accompagnata da una piccola massa degli stessi; ii) una grande probabilità di emissione al vertice dei campi mediatori accompagnata da una grande massa degli stessi. Questa seconda possibilità è molto interessante poiché **suggerisce che la probabilità di emissione al vertice dei quanti dei campi mediatori possa essere elevata, magari comparabile a quella elettromagnetica, e che la debolezza della interazione sia dovuta al fatto che i campi mediatori acquisiscono una massa rilevante**. Una via di questo tipo porta diritta alla **possibilità di 'unificare' l'interazione debole con quella elettromagnetica**, ovvero alla possibilità di ricondurre allo stesso tipo di carica l'esistenza delle due interazioni (esattamente come, in elettromagnetismo, la forza magnetica e quella elettrica vengono entrambe ricondotte ad una sola carica, la carica elettrica appunto).

Un po' di storia

Si profila allora uno schema articolato ma fortemente interconnesso dove un meccanismo di conferimento della massa ai campi mediatori della interazione debole si tramuterebbe da 'problema' ad imperdibile 'occasione' per unificare l'interazione debole con quella elettromagnetica. Questo fatto spiega il ruolo assolutamente centrale di un tale meccanismo che entrò nelle interazioni deboli in modo quasi casuale.

La prima indicazione di un meccanismo di questo tipo proviene da un fenomeno della fisica delle basse temperature, la **superconduttività**. Una delle caratteristiche salienti del fenomeno è che in un materiale superconduttore il campo magnetico interno è nullo (effetto Meissner) il che comporta l'impossibilità, da parte di un'onda elettromagnetica, di penetrarvi. Poiché il coefficiente di penetrazione di un'onda nel mezzo materiale è assimilabile all'inverso di una massa, in termini formali è come se i fotoni, propagandosi nel superconduttore, acquisissero una massa efficace che ne accorcia il cammino a valori piccolissimi. Sempre da un punto di vista formale tale massa efficace determina una perdita della simmetria di gauge dell'elettromagnetismo. In termini fisici, dunque, si capiva che **un mezzo materiale poteva conferire una massa efficace al fotone conferendogli un raggio d'azione finito**.

Un modello puramente fenomenologico di questo meccanismo, nel caso della superconduttività, fu fornito da Landau e Ginzburg nel 1950, mentre il meccanismo microscopico dettagliato fu compreso da J. Bardeen, L. Cooper e J. Schrieffer nel 1957 i quali misero in luce che gli elettroni, correlati da una interazione residua a formare coppie (**coppie di Cooper**), andavano a formare un 'mezzo materiale' che conferiva massa efficace alle onde elettromagnetiche (quest'ultimo fatto fu mostrato da Anderson).

Dalla superconduttività, il meccanismo fece il suo ingresso nella fisica delle particelle attraverso i lavori di Y. Nambu, nel 1960, che lo utilizzò per spiegare alcune proprietà delle interazioni forti. Una **versione relativistica nel contesto di teorie di Yang e Mills** fu invece discussa, a partire dal 1964, da **R. Brout e F. Englert, P. Higgs e G. Guralnik, C. Hagen e T. Kibble**. Essi chiarirono che introducendo un opportuno **campo scalare nella funzione di mezzo materiale (campo di Higgs)** i mediatori non massivi di un campo di Yang e Mills potevano acquisire una massa efficace.

Si trattava di lavori di carattere molto generale e gli scopritori di questo meccanismo, curiosamente, non pensarono di applicarlo davvero alle interazioni fondamentali allora note.

A quel tempo molti aspetti delle interazioni deboli erano stati correttamente intuiti da S. Glashow. In particolare la possibilità che la interazione debole ed elettromagnetica potessero essere la manifestazione di una stessa interazione, l'interazione elettrodebole [fu Glashow, nel 1961, a proporre che il gruppo di trasformazioni della teoria di gauge dovesse essere $SU(2) \times U(1)$ estendendo i lavori in tal senso di Schwinger].

Curiosamente, non fu lui a capire il profondo significato dei lavori di Englert ed Higgs (diremo così dato che loro sono stati premiati con il Nobel), bensì S. Weinberg e A. Salam che trapiantarono il meccanismo di Higgs all'interno della teoria di Glashow pervenendo ad una teoria unificata delle interazioni deboli ed elettromagnetiche (capace di giustificare il corto raggio d'azione della interazione debole ed il lungo raggio d'azione della interazione elettromagnetica. Si giungeva così alla formulazione della teoria elettrodebole nella sua forma attuale (ElettroWeak Theory, EWT, 1967).

Il cerchio teorico si chiuse nel 1971 con i lavori di G. 'tHooft e M. Veltman i quali mostrarono che la EWT era rinormalizzabile (gli inevitabili infiniti della EWT, propri di ogni teoria di campo quantizzato, potevano essere curati nello stesso modo del QED fornendo una teoria capace di fare previsioni quantitative definite e precisissime).

Il cerchio sperimentale si è chiuso, invece, solo lo scorso anno! Nel 1974 vengono scoperte al CERN le correnti deboli neutre (camera a bolle Gargamelle) che dimostrano indirettamente l'esistenza del campo debole Z^0 e della struttura $SU(2)$ della EWT. Nel 1984, C. Rubbia con l'esperimento UA1 presso il CERN, osserva direttamente i campi deboli W^+ , W^- e Z^0 . Nel 2012, gli esperimenti ATLAS e CMS presso il CERN, individuano un segnale compatibile con l'osservazione diretta della particella di Higgs la quale conferma l'intera impalcatura su cui si regge la EWT confermandola come teoria definitiva delle interazioni deboli.

Notevole è pure la quantità di Nobel profusi per premiare i fisici impegnati nella costruzione della EWT: Glashow, Weinberg e Salam (1979), C. Rubbia e S. Van Der Meer (1984), 'tHooft e M. Veltman (1999), Englert e Higgs (2013).

Un richiamo delle interazioni elettromagnetiche

La teoria di campo quantizzato delle interazioni elettromagnetiche, capace di spiegare con enorme precisione i dati sperimentali fino ad oggi noti, viene detta **Elettrodinamica Quantistica** (Quantum Electrodynamics, QED). Alcune semplici caratteristiche della interazione elettromagnetica sono le seguenti:

- i) tutte le particelle materiali (leptoni e quark) dotati di carica elettrica possono interagire elettromagneticamente;
- ii) i processi elettromagnetici sono di due tipi: a) **creazione particella-antiparticella** per ciascuna delle particelle elettricamente cariche del MS (un fotone genera una coppia particella-antiparticella aventi cariche elettriche opposte); b) **una particella carica irradia un campo elettromagnetico mantenendo inalterata la propria identità** (cioè un elettrone rimane un elettrone etc. etc.) il che significa che **l'interazione elettromagnetica conserva il sapore** (in ciò è simile alla interazione forte e diversa da quella debole);

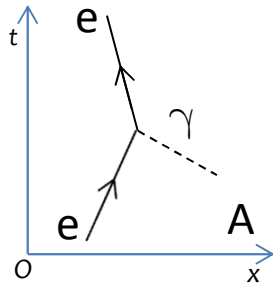
Quante sono le cariche di gauge dell'elettromagnetismo? Sappiamo che nella QCD queste sono tre, un fatto sperimentale che non ha una evidenza immediata a causa del confinamento che nasconde le cariche di colore dentro adroni di colore nullo. Nella interazione debole, dove il confinamento non opera, le cariche di gauge sono immediatamente evidenti poiché devono essere identificate con le particelle che partecipano al processo di irradiazione, vale a dire le diverse coppie di particelle delle correnti deboli (elettrone neutrino-elettronico etc. etc.). Ora, anche nell'elettromagnetismo il confinamento non opera (almeno non in senso assoluto) poiché sono osservabili particelle cariche libere come l'elettrone, il muone ed il tau (potremmo citare anche i quark ma questi non sono mai osservati come particelle libere a causa della interazione forte). D'altra parte il processo di irradiazione non modifica l'identità della particella carica irraggiante per cui dobbiamo concludere che l'elettromagnetismo ha una sola carica interna.

Dunque, come teoria di gauge, **l'elettromagnetismo viene costruito sul gruppo di trasformazioni $SU(1)=U(1)$ di carica elettrica**. Da ciò segue che una carica elettrica possa irradiare un solo tipo di campo, il campo elettromagnetico, di carica elettrica nulla. Tale campo è non massivo per cui l'interazione ha raggio infinito. Poiché tutto ciò è in accordo con le proprietà osservate della interazione elettromagnetica non risulta necessario ricorrere a nessun tipo di meccanismo ausiliario. Nella interazione elettromagnetica le teorie di gauge si manifestano nella forma più semplice ed immediata! Le cariche elettriche delle particelle del Modello Standard sono disposte come segue (valori opposti devono essere attribuiti alle antiparticelle)

leptoni	e	ν_e	μ	ν_μ	τ	ν_τ
Q	-1	0	-1	0	-1	0

leptoni	u	d	c	s	t	b
Q	2/3	-1/3	2/3	-1/3	2/3	-1/3

Un accenno alla unificazione elettrodebole



Il vertice e la corrente elettromagnetica

Il passo iniziale è quello di modellare l'interazione debole, così come definita dalla teoria V-A, in modo 'simile' alla interazione elettromagnetica.

Il vertice elettromagnetico si può descrivere nel modo seguente (fig. A, dove si è scelto il processo di assorbimento del fotone da parte dell'elettrone)

$$V^{em} \sim -e (\bar{\psi}_e \dots \psi_e)_\mu A^\mu \sim e [-(\bar{\psi}_e \dots \psi_e)_\mu] A^\mu$$

Introducendo l'operatore della carica Q che agendo sull'operatore di distruzione all'interno della corrente restituisce il valore q della sua carica elettrica in unità di 'e', possiamo ottenere la seguente espressione generale del **vertice elettromagnetico**

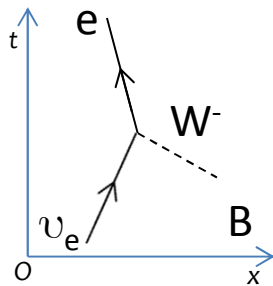
$$V^{em} \sim e [q_f (\bar{\psi}_f \dots \psi_f)_\mu] A^\mu$$

che può essere anche espresso nel modo seguente

$$V^{em} \sim e J_\mu^{em} A^\mu \quad (1)$$

introducendo la corrente elettromagnetica J

$$J_\mu^{em} = e q_f (\bar{f} \dots f)_\mu \quad (1a)$$



In modo analogo, possiamo immaginare un vertice debole dove avviene l'accoppiamento delle particelle materiali con i campi deboli. Potranno allora essere assorbiti W^- cui sarà associata la conversione elettrone-neutrino-e (fig. B) o W^+ cui sarà associata la conversione elettrone-neutrino-e (fig. C). Per analogia, i vertici devono avere la struttura seguente

$$V^{W^-} \sim \frac{1}{\sqrt{2}} g (\bar{e}_L \dots \nu_L)_\mu W^{\mu-} \quad V^{W^+} \sim \frac{1}{\sqrt{2}} g (\bar{e}_L \dots \nu_L)_\mu^\dagger W^{\mu+} \quad (1b)$$

dove g parametrizza la probabilità di emissione/assorbimento al vertice dei W ed il fattore $\sqrt{2}$ è inserito per semplificare le formule che seguono.

Già abbiamo accennato al fatto che neutrino ed elettrone devono giocare il ruolo di cariche di gauge della interazione debole. Ciò significa che dobbiamo disporli in uno stesso vettore complesso a due componenti (abbiamo sommato i termini così da descrivere entrambi i vertici con una sola espressione)

$$V^{wk} \sim \frac{1}{\sqrt{2}} g \left(\dots \begin{vmatrix} \bar{\nu}_L & 0 \\ \bar{e}_L & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ \nu_L \\ e_L \end{vmatrix} \right)_\mu W_\mu^- + \frac{1}{\sqrt{2}} g \left(\dots \begin{vmatrix} \bar{\nu}_L & 0 \\ \bar{e}_L & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ \nu_L \\ e_L \end{vmatrix} \right)_\mu^\dagger W_\mu^+ \quad (2)$$

La matrice 2x2 che compare in queste espressioni deve essere pensata come una possibile trasformazione lineare complessa, unitaria e unimodulare di vettori bidimensionali (si ricordi, come più volte detto, che la teoria deve essere formulata in modo da essere invariante per tali trasformazioni). D'altra parte, una base per tale tipo di matrici è costituita dalla matrice identità I e dalle tre matrici di Pauli

$$\sigma_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (2a)$$

E' facile mostrare che le matrici 2x2 che compaiono nelle (2) sono esprimibili come combinazioni lineari delle matrici di Pauli

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\sigma_1 - i\sigma_2}{2} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\sigma_1 + i\sigma_2}{2} \quad (3)$$

per cui, definendo i vettori complessi

$$\chi_L = \begin{vmatrix} v_L \\ e_L \end{vmatrix} \quad \bar{\chi}_L = \begin{vmatrix} \bar{v}_L \\ \bar{e}_L \end{vmatrix} \quad (4)$$

e sostituendo le (3) e (4) nelle (2) otteniamo

$$\begin{aligned} V^{wk} &\sim \frac{1}{\sqrt{2}} g(\dots \bar{\chi}_L \left(\frac{\sigma_1 - i\sigma_2}{2}\right) \chi_L)^\mu W_\mu^- + \frac{1}{\sqrt{2}} g(\dots \bar{\chi}_L \left(\frac{\sigma_1 + i\sigma_2}{2}\right) \chi_L)^\mu W_\mu^+ = \\ &= g(\dots \bar{\chi}_L \frac{\sigma_1}{2} \chi_L)^\mu \frac{(W_\mu^+ + W_\mu^-)}{\sqrt{2}} + g(\dots \bar{\chi}_L \frac{\sigma_2}{2} \chi_L)^\mu i \frac{(W_\mu^+ - W_\mu^-)}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

da cui, ponendo

$$W_1^\mu = \frac{(W_\mu^+ + W_\mu^-)}{\sqrt{2}} \quad W_2^\mu = i \frac{(W_\mu^+ - W_\mu^-)}{\sqrt{2}} \quad (4a)$$

otteniamo

$$V^{wk} \sim g(\dots \bar{\chi}_L \frac{\sigma_1}{2} \chi_L)_\mu W_1^\mu + g(\dots \bar{\chi}_L \frac{\sigma_2}{2} \chi_L)_\mu W_2^\mu$$

Ora, si può notare che il vertice debole, espresso attraverso le matrici di Pauli assume una forma 'simmetrica' che potrebbe essere completata aggiungendo un termine $\sigma_3 W_3$

$$V^{wk} \sim g(\dots \bar{\chi}_L \frac{\sigma_1}{2} \chi_L)_\mu W_1^\mu + g(\dots \bar{\chi}_L \frac{\sigma_2}{2} \chi_L)_\mu W_2^\mu + g(\dots \bar{\chi}_L \frac{\sigma_3}{2} \chi_L)_\mu W_3^\mu \quad (5)$$

Seguendo questa strada, si introduce un terzo mediatore della interazione differente dai due ovvi introdotti sulla base delle figure B e C. Di che mediatore si tratta? Tenendo conto della espressione di σ_3 [vedi (2a)] e delle (4)

si trova immediatamente che deve trattarsi di un mediatore associato alla conversione di un elettrone in se stesso e di un neutrino in se stesso. Il termine che abbiamo aggiunto descrive allora un vertice in cui viene emesso un mediatore neutro per cui devono essere possibili processi deboli senza cambiamento di sapore (detti a corrente debole neutra), in questo assai simili a quelli elettromagnetici. Il **vertice debole** (5) assume allora la seguente forma generale

$$V^{wk} \sim g J_{\mu j}^W W_j^\mu \quad (6)$$

Il vertice e la corrente debole

dove abbiamo definito la seguente espressione della **corrente debole**

$$J_{\mu j}^W \sim \left(\dots \bar{\chi}_L \frac{\sigma_j}{2} \chi_L \right)_\mu \quad (6a)$$

Il vertice così costruito prevede, come più volte detto, l'emissione/assorbimento di mediatori di massa nulla portatori di una interazione di raggio infinito per cui esso non può essere identificato con il vertice della interazione debole osservata sperimentalmente, ovvero nel **mondo reale**, che è a corto raggio d'azione. Ma, se come discusso nel precedente capitolo, esiste un meccanismo che conferisce massa ai mediatori della interazione debole, l'espressione (6) potrebbe invece descrivere il vertice debole a 'monte' di tale meccanismo ovvero il vertice che osserveremmo in un **mondo ideale** nel quale tale meccanismo non opera. Le nostre considerazioni ci hanno quindi condotti a determinare la forma del vertice debole 'prima' del meccanismo che conferisce massa ai mediatori. In tale situazione, come discusso, potrebbe darsi che **la intensità della interazione debole sia comparabile a quella della interazione elettromagnetica** ma, se vogliamo esplorare questa possibilità, dobbiamo essere in grado di scrivere l'espressione del vertice elettromagnetico nel mondo ideale.

Siamo allora in grado di determinare la forma del vertice elettromagnetico nel mondo ideale? Il principio guida non può che essere quello di scrivere una **espressione del vertice elettromagnetico che rispetti la stessa simmetria rispetto a trasformazioni $SU(2)_L$ soddisfatta dal vertice debole**.

Richiamiamo allora le (1) e (1a) che descrivono il vertice elettromagnetico nel caso di elettroni e neutrini

$$V^{em} \sim e J_{\mu}^{em} A^\mu = e q_e (\bar{e} \dots e)_\mu A^\mu = e [q_e (\bar{e}_L \dots e_L)_\mu + q_e (\bar{e}_R \dots e_R)_\mu] A^\mu \quad (7)$$

dove abbiamo tenuto conto che

$$\begin{aligned}\bar{e} \dots e &= (\bar{e}_L + \bar{e}_R) \dots (e_L + e_R) = (\bar{e}_L \dots e_L) + (\bar{e}_L \dots e_R) + (\bar{e}_R \dots e_L) + (\bar{e}_R \dots e_R) = \\ &= (\bar{e}_L \dots e_L) + (\bar{e}_R \dots e_R)\end{aligned}$$

un fatto che si può mostrare con la teoria di Dirac e che si può intuire tenendo conto che l'interazione elettromagnetica conserva la simmetria di parità per cui in un vertice elettromagnetico non possono avvenire le conversioni $(\bar{e}_L \dots e_R), (\bar{e}_R \dots e_L)$.

Si può notare che la espressione (7) non è invariante per trasformazioni di $SU(2)_L$ infatti, richiamando le (4), possiamo vedere che la combinazione invariante di componenti L è quella che si ottiene dal seguente prodotto scalare che compare solo parzialmente nella (7)

$$\bar{\chi}_L \cdot \chi_L = \begin{vmatrix} \bar{\chi}_{1L} \\ \bar{\chi}_{2L} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \chi_{1L} \\ \chi_{2L} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{v}_L \\ \bar{e}_L \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_L \\ e_L \end{vmatrix} = \bar{v}_L v_L + \bar{e}_L e_L \quad (8)$$

L'idea potrebbe allora essere quella di completare la (7) conferendogli una struttura generale del tipo seguente

$$V^Y \sim \alpha(\dots \bar{e}_L e_L)_\mu B^\mu + \alpha(\dots \bar{v}_L v_L)_\mu B^\mu + \beta(\dots \bar{e}_R e_R)_\mu B^\mu \quad (9)$$

che contiene due pezzi entrambi scalari rispetto a trasformazioni $SU(2)_L$, un pezzo formato dalla coppia di termini della (8) ed un pezzo formato dalle sole componenti R, ciascuno moltiplicato per un proprio coefficiente e 'sommato' sull'operatore di campo B_μ che descrive il campo elettromagnetico A_μ nel mondo ideale. Questa espressione del vertice elettromagnetico nel mondo ideale viene detto vertice di iper carica e viene di solito preso nella forma seguente

$$V^Y \sim \frac{1}{2} g' Y_L (\dots \bar{e}_L e_L)_\mu B^\mu + \frac{1}{2} g' Y_L (\dots \bar{v}_L v_L)_\mu B^\mu + \frac{1}{2} g' Y_R (\dots \bar{e}_R e_R)_\mu B^\mu$$

dove g' è l'**accoppiamento adimensionale** che descrive l'intensità della emissione al vertice del campo B_μ , e Y_L ed Y_R sono i valori di **iper carica debole** che sostituiscono quelli di carica elettrica e che assumono certi determinati valori che discuteremo nel seguito.

Utilizzando le (8), possiamo ricompattare il vertice in una espressione generale

$$V^Y \sim \frac{1}{2} g' [Y_L(\dots \bar{\chi}_L \chi_L)_\mu + Y_R(\dots \bar{\chi}_{2R} \chi_{2R})_\mu] B^\mu$$

Il vertice e la corrente di ipercarica

da cui otteniamo l'espressione generale del **vertice di ipercarica**

$$V^Y \sim \frac{1}{2} g' J_\mu^Y B^\mu \quad (10)$$

qualora venga anche definita la seguente espressione della **corrente di ipercarica**

$$J_\mu^Y \sim Y_L(\dots \bar{\chi}_L \chi_L)_\mu + Y_R(\dots \bar{\chi}_{2R} \chi_{2R})_\mu \quad (10a)$$

Il vertice elettrodebole dei campi non massivi

Assumendo la prospettiva della unificazione, prima che operi il meccanismo che conferisce massa ai mediatori, l'interazione debole ed elettromagnetica sono parte di una interazione più generale il cui vertice è dato dalla somma delle espressioni (10) e (6) e che potremmo chiamare **vertice elettrodebole**

$$V^{ew} \sim g J_{\mu j}^W W_j^\mu + \frac{1}{2} g' J_\mu^Y B^\mu \quad (11)$$

dove **gli accoppiamenti adimensionali g e g' devono essere interdipendenti** (se le interazioni sono unificate) e le correnti deboli e di ipercarica hanno le espressioni (6a) e (10a).

gli effetti del meccanismo di acquisizione della massa sul vertice elettrodebole

Il passo da fare ora è quello di stabilire in che modo il vertice elettrodebole, che unifica le interazioni deboli e di ipercarica (si ricordi che esse sono entrambe simmetriche per trasformazioni $SU(2)_L$ ed inoltre si suppone esista una relazione tra gli accoppiamenti g e g'), è correlato ai vertici deboli ed elettromagnetici osservati sperimentalmente a valle del meccanismo che conferisce massa ai mediatori. A questo proposito si deve tenere conto che il vertice elettrodebole (11) descrive quattro processi basilari: la emissione/assorbimento dei due campi elettricamente carichi di isospin debole $w_{1\mu}$ e $w_{2\mu}$ [combinazioni lineari di w_{+1} e w_{-1} , vedi (4a)]; la emissione/assorbimento di due campi elettricamente neutri di isospin debole e ipercarica $w_{3\mu}$ e B_μ . A causa del suddetto meccanismo, **sia i mediatori carichi che quelli neutri acquisiscono una massa** inoltre, nel caso dei due

mediatori neutri, esiste in aggiunta la possibilità che si miscelino tra loro a formare due diverse combinazioni lineari pure elettricamente neutre. Tale possibilità, nel caso dei mediatori carichi, è esclusa proprio dalla diversità delle loro cariche elettriche. Sulla base di questa idea, si ipotizza allora che i mediatori osservati a valle del meccanismo, i campi A (l'ordinario campo elettromagnetico che non acquisisce massa) e Z (il campo debole neutro che invece acquisisce una certa massa) siano combinazioni lineari dei campi mediatori neutri non massivi B e W₃ a monte del meccanismo. La forma più semplice di una tale combinazione prevede un solo parametro detto **angolo di Weinberg** (valore sperimentale $\vartheta = 0.23120 \pm 0.00015$)

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_{3\mu} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_{3\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} \quad (12)$$

Dalle (12) otteniamo le seguenti relazioni

$$B_\mu = A_\mu \cos \vartheta - Z_\mu \sin \vartheta \quad W_{3\mu} = A_\mu \sin \vartheta + Z_\mu \cos \vartheta$$

che possono essere sostituite nella parte neutra del vertice elettrodebole (11) che risulterà così espresso nei termini dei campi mediatori osservati a valle del meccanismo

**il vertice elettrodebole
neutro dei campi
massivi**

$$\begin{aligned} V_{\text{neutro}}^{\text{ew}} &\sim g J_{\mu 3}^W W_3^\mu + \frac{1}{2} g' J_\mu^Y B^\mu = \\ &= g J_{\mu 3}^W (A^\mu \sin \vartheta + Z^\mu \cos \vartheta) + \frac{1}{2} g' J_\mu^Y (A^\mu \cos \vartheta - Z^\mu \sin \vartheta) = \\ &= (g \sin \vartheta J_{\mu 3}^W + \frac{1}{2} g' \cos \vartheta J_\mu^Y) A^\mu + (g \cos \vartheta J_{\mu 3}^W - \frac{1}{2} g' \sin \vartheta J_\mu^Y) Z^\mu \quad (12a) \end{aligned}$$

Il primo di questi termini deve essere identificato con l'ordinario vertice elettromagnetico mentre il secondo con il vertice debole a corrente neutra per cui abbiamo la relazione

$$V_{\text{neutro}}^{\text{ew}} \sim e J_\mu^{\text{em}} A^\mu + g J_\mu^{\text{NC}} Z^\mu \quad (12b)$$

la corrente
elettromagnetica

Dal confronto della (12a) e (12b) otteniamo la **corrente elettromagnetica** espressa come combinazione lineare della correnti debole neutra di isospin e di ipercarica

$$J_{\mu}^{em} = \frac{1}{e} (g \sin \vartheta J_{\mu 3}^W + \frac{1}{2} g' \cos \vartheta J_{\mu}^Y) \quad (13)$$

la corrente debole
neutra

e la **corrente debole neutra** espressa come combinazione lineare della correnti debole neutra di isospin e di ipercarica

$$J_{\mu}^{NC} = (\cos \vartheta J_{\mu 3}^W - \frac{g'}{2g} \sin \vartheta J_{\mu}^Y) \quad (13a)$$

Sostituendo le espressioni delle correnti (1a), (6a) e (10a) nella corrente elettromagnetica (13) si ottiene, nel caso di neutrini ed elettroni

$$\begin{aligned} eQ(\dots \bar{e}_L e_L)_{\mu} + eQ(\dots \bar{e}_R e_R)_{\mu} &= \\ &= g \sin \vartheta (\dots \bar{\chi}_L \frac{\sigma_j}{2} \chi_L)_{\mu} + \frac{1}{2} g' \cos \vartheta [Y_L(\dots \bar{\chi}_L \chi_L)_{\mu} + Y_R(\dots \bar{\chi}_{2R} \chi_{2R})_{\mu}] = \\ &= g \sin \vartheta (\dots \begin{vmatrix} \bar{\nu}_L & | & 1/2 & & 0 \\ \bar{e}_L & | & 0 & & -1/2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \nu_L \\ e_L \end{vmatrix})_{\mu} + \frac{1}{2} g' \cos \vartheta [Y_L(\dots \begin{vmatrix} \bar{\nu}_L & | & \nu_L \\ \bar{e}_L & | & e_L \end{vmatrix})_{\mu} + Y_R(\dots \bar{e}_R e_R)_{\mu}] \end{aligned}$$

Si può notare che, essendo la matrice diagonale, i neutrini saranno moltiplicati per il valore $1/2$ e gli elettroni per il valore $-1/2$. Per ottenere espressioni generali, conviene allora introdurre l'operatore T_3 , detto **operatore della terza componente dell'isospin debole** che assume i valori $t_3 = 1/2$ per i neutrini e $t_3 = -1/2$ per gli elettroni. Abbiamo allora

$$\begin{aligned} &= g \sin \vartheta [\dots (t_{3\nu} \bar{\nu}_L \nu_L + t_{3e} \bar{e}_L e_L)]_{\mu} + \frac{1}{2} g' \cos \vartheta [Y_L(\bar{\nu}_L \nu_L + \bar{e}_L e_L) + Y_R(\dots \bar{e}_R e_R)_{\mu}] = \\ &= (g \sin \vartheta t_{3\nu} + \frac{1}{2} g' \cos \vartheta Y_L) (\dots \bar{\nu}_L \nu_L)_{\mu} + \\ &+ (\frac{1}{2} g' \cos \vartheta Y_L + g \sin \vartheta t_{3e}) (\dots \bar{e}_L e_L)_{\mu} + \\ &+ \frac{1}{2} g' \cos \vartheta Y_R (\dots \bar{e}_R e_R)_{\mu} \end{aligned}$$

che è soddisfatta solo se

$$\begin{aligned}
 \text{neutrini-L} & : g \sin \vartheta t_{3\nu} + \frac{1}{2} g' \cos \vartheta Y_L = 0 & t_{3\nu} + \frac{1}{2} Y_L = 0 = q_\nu \\
 \text{elettroni-L} & : \frac{1}{2} g' \cos \vartheta Y_L + g \sin \vartheta t_{3e} = eq_e & \frac{1}{2} Y_L + t_{3e} = q_e \\
 \text{elettroni-R} & : \frac{1}{2} g' \cos \vartheta Y_R = eq_e & \frac{1}{2} Y_R = q_e
 \end{aligned} \tag{14}$$

$$g \sin \vartheta = g' \cos \vartheta = e \tag{14a}$$

ipercarica L

Si può notare che i valori della **ipercarica L** possono essere ottenuti dalla relazione generale

$$Y_L = 2(q - t_3) \tag{15a}$$

dove q è l'autovalore dell'operatore di carica Q e t_3 è l'autovalore dell'operatore della terza componente dell'isospin debole.

ipercarica R

I valori della **ipercarica R** possono invece essere ottenuti dalla relazione generale

$$Y_R = 2q \tag{15b}$$

Il vantaggio di operare con relazioni di carattere generale è quello di potere determinare i valori di ipercarica L ed R per tutte le particelle del modello standard

**ipercarica delle
particelle del modello
standard**

	$\nu_e \nu_\mu \nu_\tau$	$e \mu \tau$	uct	dsb
Y_L	-1	-1	1/3	1/3
Y_R	0	-2	4/3	-2/3

(15)

l'unificazione degli accoppiamenti adimensionali deboli, di ipercarica ed elettromagnetico

La relazione (14a) rappresenta un risultato fondamentale poiché esprime l'unificazione della interazione debole ed elettromagnetica

$$\boxed{g \sin \vartheta = g' \cos \vartheta = e} \quad (14a)$$

Infatti, essa stabilisce una relazione tra gli accoppiamenti adimensionali di emissione/assorbimento al vertice dei mediatori della interazione debole (g) del mediatore della interazione di ipercarica (g') e del mediatore della interazione elettromagnetica (e). Mandando a zero l'accoppiamento 'e', ovvero spegnendo, l'interazione elettromagnetica, si spegnerebbero inevitabilmente anche l'interazione debole 'g' e di ipercarica 'g' un fatto che esprime il senso fisico della idea della unificazione. E' fondamentale sottolineare che in tale relazione figura anche l'angolo di Weinberg che però interviene come parametro costante e non come accoppiamento in accordo con l'idea della unificazione (se intervenisse come accoppiamento le interazioni non sarebbero unificate poiché ci sarebbero due interazioni ma anche due accoppiamenti).

espressione generale della corrente elettromagnetica

Tenendo conto della (14a), dalla (13) otteniamo la seguente **relazione tra le correnti elettromagnetica, neutra di isospin debole e di ipercarica**

$$\boxed{J_{\mu}^{em} = J_{\mu 3}^W + \frac{1}{2} J_{\mu}^Y} \quad (15)$$

Da questa possiamo ottenere una conveniente espressione della corrente debole neutra (13a)

$$g J_{\mu}^{NC} = (g \cos \vartheta J_{\mu 3}^W - \frac{1}{2} g' \sin \vartheta J_{\mu}^Y) \quad g \sin \vartheta J_{\mu}^{NC} = \sin \vartheta (g \sin \vartheta \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} J_{\mu 3}^W - \frac{1}{2} g' \cos \vartheta \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} J_{\mu}^Y)$$

sostituendo la (14a) e la (15)

$$\begin{aligned} J_{\mu}^{NC} &= \sin \vartheta \left(\frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} J_{\mu 3}^W - \frac{1}{2} \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} J_{\mu}^Y \right) = \cos \vartheta J_{\mu 3}^W - \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta} J_{\mu}^Y = \cos \vartheta J_{\mu 3}^W - \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta} (J_{\mu}^{em} - J_{\mu 3}^W) = \\ &= \left(\cos \vartheta + \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta} \right) J_{\mu 3}^W - \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta} J_{\mu}^{em} = \frac{1}{\cos \vartheta} (J_{\mu 3}^W - \sin^2 \vartheta J_{\mu}^{em}) \end{aligned}$$

espressione generale
della corrente debole
neutra

che fornisce la seguente **relazione tra le correnti debole neutra, neutra di isospin debole ed elettromagnetica**

$$J_{\mu}^{NC} = \frac{1}{\cos \vartheta} (J_{\mu 3}^W - \sin^2 \vartheta J_{\mu}^{em}) \quad (16)$$

La corrente debole neutra è quella con la struttura più complessa e può essere determinata, nel caso di neutrini ed elettroni, a partire dalla (16) tenendo conto delle (1a), (4), (6a) e (7). Introducendo, come già fatto poco fa, gli operatori della carica elettrica e della terza componente dell'isospin, abbiamo i seguenti ovvi passaggi

$$\begin{aligned} J_{\mu}^{NC} &= \frac{1}{\cos \vartheta} (J_{\mu 3}^W - \sin^2 \vartheta J_{\mu}^{em}) = \\ &= \frac{1}{\cos \vartheta} [(\dots \bar{\chi}_L \frac{\sigma_3}{2} \chi_L)_{\mu} - \sin^2 \vartheta q_e (\dots \bar{e} e)_{\mu}] = \\ &= \frac{1}{\cos \vartheta} [t_{3\nu} (\dots \bar{\nu}_L \nu_L)_{\mu} + t_{3e} (\dots \bar{e}_L e_L)_{\mu} - q_e \sin^2 \vartheta (\dots \bar{e} e)_{\mu}] = \\ &= \frac{1}{\cos \vartheta} [t_{3\nu} (\dots \bar{\nu}_L \nu_L)_{\mu} + t_{3e} (\dots \bar{e}_L e_L)_{\mu} - q_e \sin^2 \vartheta (\dots \bar{e}_L e_L)_{\mu} - q_e \sin^2 \vartheta (\dots \bar{e}_R e_R)_{\mu}] = \\ &= \frac{1}{\cos \vartheta} [t_{3\nu} (\dots \bar{\nu}_L \nu_L)_{\mu} + (t_{3e} - q_e \sin^2 \vartheta) (\dots \bar{e}_L e_L)_{\mu} - q_e \sin^2 \vartheta (\dots \bar{e}_R e_R)_{\mu}] = \\ &= \frac{1}{\cos \vartheta} [(t_{3\nu} - q_e \sin^2 \vartheta) (\dots \bar{\nu}_L \nu_L)_{\mu} + (t_{3e} - q_e \sin^2 \vartheta) (\dots \bar{e}_L e_L)_{\mu} - q_e \sin^2 \vartheta (\dots \bar{e}_R e_R)_{\mu}] \end{aligned}$$

Dall'ultimo di questi passaggi ricaviamo la seguente **espressione generale della corrente debole neutra**

la corrente debole
neutra in funzione degli
operatori di campo dei
fermioni

$$J_{\mu}^{NC} = \frac{1}{\cos \vartheta} [(t_{3f} - q_f \sin^2 \vartheta) (\bar{f}_L \dots f_L)_{\mu} - q_f \sin^2 \vartheta (\bar{f}_R \dots f_R)_{\mu}] \quad (16a)$$

Dalla (16) possiamo ricavare l'espressione della corrente debole neutra per le diverse particelle del modello standard.

Dato che nel caso dei neutrini si ha $t_3=1/2$ e $q=0$ otteniamo la seguente espressione della **corrente debole neutra per i neutrini ν_e, ν_μ, ν_τ**

corrente debole neutra
per i neutrini

$$J_\mu^{NC} = \frac{1}{2 \cos \vartheta} (\dots \bar{\nu}_L \nu_L)_\mu \quad (16b)$$

Poi, tenendo conto che si ha $t_3=-1/2$ e $q=-1$ $Q=-1$ per elettrone, muone e tau, abbiamo la seguente espressione della **corrente debole neutra per i leptoni e, μ, τ**

corrente debole neutra
per i leptoni carichi

$$J_\mu^{NC} = \frac{1}{\cos \vartheta} \left[\left(\sin^2 \vartheta - \frac{1}{2} \right) (\dots \bar{\ell}_L \ell_L)_\mu + \sin^2 \vartheta (\dots \bar{\ell}_R \ell_R)_\mu \right] \quad (16c)$$

Ancora, tenendo conto che si ha $Q=2/3$ per i quark up-like u, c e t, abbiamo la seguente espressione della **corrente debole neutra per i quark u, c, t**

corrente debole neutra
per i quark up-like

$$J_\mu^{NC} = \frac{1}{\cos \vartheta} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \vartheta \right) (\dots \bar{q}_L q_L)_\mu - \frac{2}{3} \sin^2 \vartheta (\dots \bar{q}_R q_R)_\mu \right] \quad (16d)$$

Infine, tenendo conto che si ha $Q=-1/3$ per i quark down-like d, s e b, abbiamo la seguente espressione della **corrente debole neutra per i quark d, s, b**

corrente debole neutra
per i quark down-like

$$J_\mu^{NC} = \frac{1}{\cos \vartheta} \left[\left(\frac{1}{3} \sin^2 \vartheta - \frac{1}{2} \right) (\dots \bar{q}_L q_L)_\mu + \frac{1}{3} \sin^2 \vartheta (\dots \bar{q}_R q_R)_\mu \right] \quad (16e)$$

Abbiamo ora tutte le formule rilevanti che fissano al forma del vertice elettrodebole (11)

$$\begin{aligned} V^{ew} &\sim g J_{\mu j}^W W_j^\mu + \frac{1}{2} g' J_\mu^Y B^\mu \sim g J_{\mu 1}^W W_1^\mu + g J_{\mu 2}^W W_2^\mu + (g J_{\mu 3}^W W_3^\mu + \frac{1}{2} g' J_\mu^Y B^\mu) \sim \\ &\sim \frac{g}{\sqrt{2}} J_{\mu +}^W W_+^\mu + \frac{g}{\sqrt{2}} J_{\mu -}^W W_-^\mu + e J_\mu^{em} A^\mu + g J_\mu^{NC} Z^\mu \end{aligned}$$

dove nell'ultima riga abbiamo utilizzato le (4a) e le (12a) e (12b). Tenendo conto della (14a) otteniamo la seguente espressione del **vertice elettrodebole**

espressione generale del vertice elettrodebole

$$V^{ew} \sim \frac{e}{\sqrt{2} \sin \vartheta} J_{\mu+}^W W_+^\mu + \frac{e}{\sqrt{2} \sin \vartheta} J_{\mu-}^W W_-^\mu + e J_\mu^{em} A^\mu + \frac{e}{\sin \vartheta} J_\mu^{NC} Z^\mu \quad (18)$$

che deve essere completata con le espressioni delle correnti che vi compaiono. Dalla (1b) possiamo ricavare l'espressione generale della **corrente debole carica positiva e negativa**

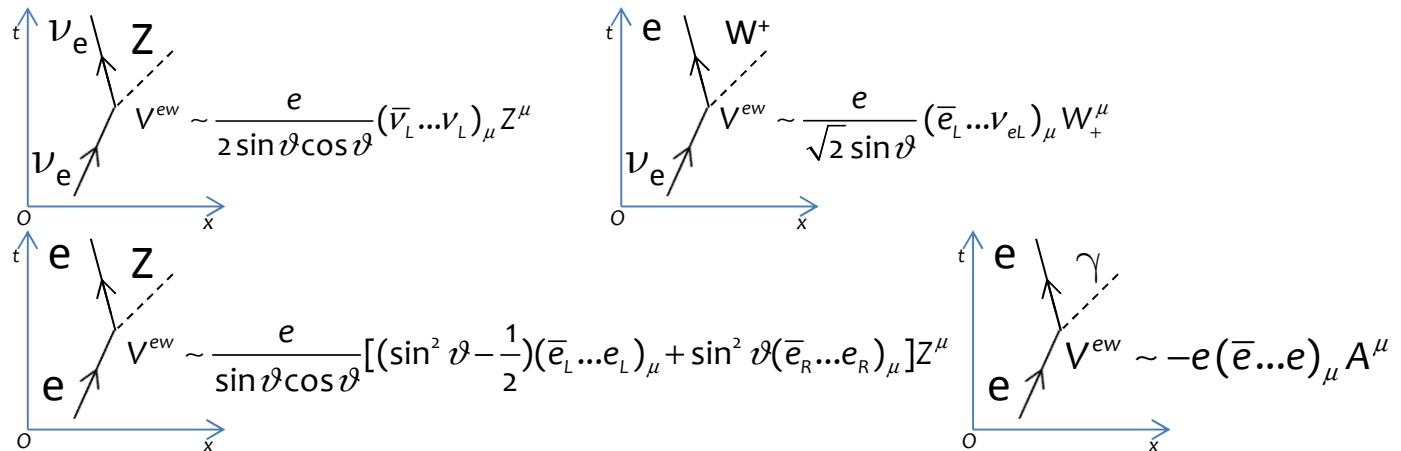
$$J_{\mu+}^W = (J_{\mu-}^W)^\dagger = (\bar{e}_L \dots \nu_{eL})_\mu, (\bar{\mu}_L \dots \nu_{\mu L})_\mu, (\bar{\tau}_L \dots \nu_{\tau L})_\mu, (\bar{u}_L \dots d'_L)_\mu, (\bar{c}_L \dots s'_L)_\mu, (\bar{t}_L \dots b'_L)_\mu \quad (18a)$$

dove con d', s' e b' abbiamo indicato le combinazioni lineari dei sapori d, s e b contenuti nella matrice CKM. Dalla (1a) possiamo ricavare l'espressione generale della **corrente elettromagnetica**

$$J_\mu^{em} = e q_f (\bar{f} \dots f)_\mu \quad (18b)$$

mentre le correnti debole neutre sono fornite dalle (16b,c,d,e). Dalla (18) e dalle suddette espressioni delle correnti possiamo allora ricavare facilmente le espressioni dei diversi vertici elettrodeboli, a corrente carica e neutra, ed elettromagnetici, tutti espressi attraverso un unico accoppiamento adimensionale 'e' in accordo con il concetto di unificazione della interazione debole ed elettromagnetica.

alcuni vertici elettrodeboli



End

Unità di misura in fisica delle particelle

Il **Sistema Internazionale**, fondato sulle unità di misura meccaniche [metro (m), secondo (s), kilogrammo (Kg)], elettromagnetiche [Ampere (A)], termodinamiche [Kelvin (K)] etc. etc. **non è adatto per la descrizione delle grandezze fisiche subatomiche** [raggio nucleare $\sim 10^{-15}$ m; vita media muone 2.2×10^{-6} s; massa elettrone 9.1×10^{-31} kg; ...]. **Come si costruisce un sistema di unità di misura più adeguato?** Sono necessarie alcune premesse.

□ Unità di misura fondamentali e derivate

La scelta del campione di unità di misura è, in linea di principio, assolutamente arbitraria anche se col tempo si è capito che è bene attenersi ad alcune semplici regole pienamente recepite dai moderni sistemi di unità di misura:

- **L'unità deve essere connessa ad un fenomeno naturale** che riteniamo stabile ed invariabile nel tempo piuttosto che ad un oggetto e manufatto particolare (questo potrebbe deteriorarsi o modificare le sue proprietà con il tempo);
- **L'unità deve essere riproducibile in laboratorio con una relativa facilità** (in realtà è lavoro da professionisti quali sono i metrologi!);
- **le unità non devono essere ridondanti** e devono costituire un sistema di grandezze fisiche irriducibili dette **fondamentali** dalle quali derivare tutte le altre che invece vengono dette **derivate**.

Meccanica	metro (m), secondo (s), kilogrammo (Kg)
Termodinamica	grado Kelvin (K);
Teoria della gravitazione	nessuna unità di misura (a causa della rigorosa proporzionalità tra massa inerziale e gravitazionale);
Teoria elettromagnetica	ampere (A)
Teoria della relatività	nessuna unità di misura
Meccanica Quantistica	nessuna unità di misura

□ Costanti fisiche

Accanto alle grandezze fisiche fondamentali, ogni area della fisica introduce anche specifiche **costanti fisiche** sia **dimensionali** che **adimensionali** (il cui valore numerico rispettivamente dipende e non dipende dalla scelta delle unità di misura. Le costanti adimensionali assai spesso sono il sintomo di incompletezze nella teoria sottostante). Tali costanti possono riferirsi a classi di fenomeni interni alla area stessa (**costanti di rango locale**) oppure essere di validità generale (**costanti di rango universale**):

Meccanica	nessuna costante caratteristica
Termodinamica	costante di Boltzmann k , numero di Avogadro N_A , ...
Teoria della gravitazione	costante di gravitazione G
Teoria elettromagnetica	ϵ_0 e μ_0 oppure ϵ_0 e $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$
Teoria della relatività	eleva c a costante dello spazio-tempo di rango universale
Meccanica Quantistica	eleva h (\hbar) a costante dei fenomeni microscopici di rango universale

□ I sistemi di unità di misura naturali

Premesso che stabilire l'appartenenza di una costante ad uno dei due gruppi non è sempre semplice (molti sono i casi di costanti passate da un gruppo all'altro: ad esempio la velocità della luce), la constatazione che in fisica esistono costanti di rango universale e costanti di rango locale suggerì a Plank di costruire un sistema di unità di misura dove **le costanti fisiche universali vengono assunte come grandezze fisiche fondamentali di valore unitario e spesso adimensionale.** E' evidente che questo modo di procedere comporta che una ridefinizione di tutte le grandezze fisiche di una teoria ed in particolare di quelle - come la lunghezza, il tempo, la massa - che solitamente vengono assunte come fondamentali. Un sistema di unità di misura con queste proprietà prende il nome di **sistema di unità di misura naturali.**

□ Il sistema naturale della Fisica delle Particelle

Dato che la **teoria della relatività ristretta** e la **meccanica quantistica** forniscono il quadro concettuale all'interno del quale devono collocarsi tutte le teorie fisiche **le costanti universali \hbar e c costituiscono una coppia di grandezze fisiche fondamentali**. Poiché relatività e meccanica quantistica sono fondate sulle tre dimensioni fondamentali **L , T ed M** , occorre scegliere una terza grandezza fondamentale.

Il particolare ruolo giocato in fisica delle particelle dalle macchine acceleratrici il cui parametro più significativo è l'energia, suggerisce di **assumere come terza grandezza fondamentale l'energia E misurata in elettronvolt** (**1 eV** è l'energia cinetica acquisita da un elettrone accelerato da una differenza di potenziale di un volt: $E_{\text{cin}} = eV$ da cui **$1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$**).

Definito il Sistema Naturale della Fisica delle Particelle possiamo facilmente calcolare il valore delle unità di misura fondamentali del Sistema internazionale. Dalle equazioni dimensionali

$$c = L/T \quad \hbar = ET \quad \varepsilon = E = Mc^2$$

(si noti che con le lettere minuscole indichiamo le grandezze fondamentali del sistema naturale della fisica delle particelle e con le maiuscole quelle del sistema internazionale) si ottiene

$$\hbar c / \varepsilon = L \quad \hbar / \varepsilon = T \quad \varepsilon / c^2 = M$$

tenendo presente i seguenti valori delle costanti e della unità di energia nel Sistema Internazionale

$$\hbar = 1.05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \quad c = 2.99 \times 10^8 \text{ m/s} \quad 1 \text{ eV} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ J} \quad \hbar c = 3.14 \times 10^{-26} \text{ J} \cdot \text{m}$$

otteniamo

$$1(\hbar c / \text{eV}) = \frac{3.14 \times 10^{-26} \text{ J} \cdot \text{m}}{1.60 \times 10^{-19} \text{ J}} = 1.96 \times 10^{-7} \text{ m} \quad 1(\hbar / \text{eV}) = \frac{1.05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{1.60 \times 10^{-19} \text{ J}} = 6.56 \times 10^{-16} \text{ s}$$
$$1(\text{eV} / c^2) = \frac{1.60 \times 10^{-19} \text{ J}}{(2.99 \times 10^8 \text{ m/s})^2} = 1.79 \times 10^{-36} \text{ Kg}$$

comprenderemo che in fisica delle particelle scala appropriata per le energie è quella dei MeV e dei GeV.

□ Intensità relativa delle quattro interazioni naturali

Per effettuare questo confronto è necessario tenere conto che l'intensità delle interazione tra due particelle dipende in generale da una **costante** (G, ϵ_0, \dots , dipendente dal sistema di unità di misura adottato), da **grandezze intrinseche** (*massa, carica elettrica,...*) e da **grandezze cinematiche** (*la distanza delle particelle nel caso statico*). Mentre **la costante è fissata dalla l'interazione, le grandezze intrinseche e cinematiche sono arbitrarie e devono essere fissate nello stesso modo per tutte le interazioni che si vogliono confrontare.** Assicurata questa condizione si può esprimere l'intensità delle interazioni in una qualche scala dimensionale oppure, scelta una intensità di riferimento, in una scala adimensionale.

Per fissare allo stesso modo le quantità arbitrarie possiamo seguire un procedimento simile a quello che ci ha condotti alla definizione del sistema delle unità di misura naturali. I fenomeni che caratterizzano le particelle elementari sono al tempo stesso relativistici e quantistici e come tali descritti dalle costanti fondamentali c e \hbar . **La costante c fissa il rapporto tra le lunghezze ed i tempi caratteristici** dei processi tra particelle mentre **la costante \hbar , attraverso il principio di indeterminazione, fissa il prodotto tra le energie ed i tempi caratteristici.** In questo modo, **la scelta della energia fissa lunghezze, tempi e masse,** ed in generale, tutte le grandezze fisiche caratteristiche del processo in esame

$$1) \quad \hbar \sim E \cdot T \quad c = L/T \quad E = Mc^2 \quad \rightarrow \quad L \sim \hbar c / E \quad T \sim \hbar / E \quad M \sim E / c^2$$

Giungiamo allora alla conclusione che **i processi tra particelle sono tali per cui, fissato il valore caratteristico della energia del processo (scala energetica) risulta allora fissato anche il valore caratteristico delle lunghezze, dei tempi, delle masse e, con esse, di tutte le grandezze fisiche.**

Fatte queste premesse, possiamo costruire una **forza di riferimento** per mezzo di **considerazioni dimensionali**

$$2) \quad F_{\text{Rif}} = \frac{E}{L} = \frac{E}{\hbar c / E} = \frac{E^2}{\hbar c}$$

facendo poi il rapporto tra la forza in esame e questa forza di riferimento possiamo ottenere una **scala adimensionale delle interazioni naturali** che assume un valore definito una volta si precisata la scala energetica.

□ Interazione di Gravità

La forza statica tra due masse uguali è data dalla ben nota **legge di gravitazione** la quale, tenendo conto delle 1), fornisce

$$3) \quad F_{\text{Grav}} = G_N \frac{M^2}{L^2} = G_N \frac{(E/c^2)^2}{(\hbar c/E)^2} = \frac{G_N E^4}{\hbar^2 c^6}$$

Ora eseguendo il rapporto con la 2) otteniamo una stima della l'intensità della interazione gravitazionale in una scala adimensionale

$$\alpha_{\text{Grav}} = \frac{F_{\text{Grav}}}{F_{\text{Rif}}} = \frac{G E^4}{\hbar^2 c^6} \frac{\hbar c}{E^2}$$

$$4) \quad \alpha_{\text{Grav}} = \frac{G E^2}{\hbar c^5}$$

□ Interazione Elettromagnetica

La forza statica tra due cariche uguali (il cui valore tipico in fisica delle particelle vale **e**) è data dalla ben nota **legge di Coulomb** la quale, tenendo conto delle 1), fornisce

$$5) \quad F_{\text{Elettr}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{L^2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(\hbar c/E)^2} = \frac{(e^2/4\pi\epsilon_0) E^2}{\hbar^2 c^2}$$

Ora eseguendo il rapporto con la 2) otteniamo un numero *adimensionale*, noto con il nome di **costante di struttura fina**, che esprime l'intensità della forza elettrica

$$\alpha_{\text{Elettr}} = \frac{F_{\text{Elettr}}}{F_{\text{Rif}}} = \frac{(e^2/4\pi\epsilon_0) E^2}{\hbar^2 c^2} \frac{\hbar c}{E^2}$$

$$6) \quad \alpha_{\text{Elettr}} = \frac{(e^2/4\pi\epsilon_0)}{\hbar c}$$

□ Interazione Debole

In questo caso non disponiamo di una espressione della forza statica ma sappiamo che i processi deboli sono governati dalla **Costante di Fermi** $G_F=1.46 \times 10^{-62} \text{J m}^3$. Si può ottenere una stima adimensionale della intensità della interazione debole confrontando la costante di Fermi con le scale caratteristiche della energie e delle lunghezze E ed L

$$\alpha_{\text{Deb}} = \frac{G_F}{EL^3} = \frac{G_F}{E(\hbar c/E)^3}$$

$$7) \alpha_{\text{Deb}} = \frac{G_F E^2}{\hbar^3 c^3}$$

□ Interazione forte

Possiamo valutare l'intensità della interazione forte partendo da due sue proprietà note: gli ordini di grandezza del raggio della interazione $L_o = 10^{-15} \text{m}$ e della massa di un suo tipico stato legato $M_o = 1.7 \times 10^{-27} \text{Kg}$ (il protone). Per ottenere poi una stima della intensità della interazione in una scala adimensionale possiamo confrontare queste grandezze con le corrispondenti scale caratteristiche delle lunghezze e delle masse L ed M

$$\alpha_{\text{Forte}} = \frac{M_o}{M} = \frac{M_o}{E/c^2} = \frac{M_o c^2}{E}$$

$$\alpha_{\text{Forte}} = \frac{L_o}{L} = \frac{L_o}{\hbar c/E} = \frac{L_o E}{\hbar c}$$

$$\alpha_{\text{Forte}}^2 = \frac{M_o c^2}{E} \frac{L_o E}{\hbar c} = \frac{M_o L_o c}{\hbar}$$

da cui

$$8) \alpha_{\text{Forte}} = \sqrt{\frac{M_o L_o c}{\hbar}}$$

Le stime della intensità delle interazioni in una scala adimensionale dipendono dalla scala energetica E . Tale scala è stata in realtà fissata nel caso delle interazioni forti al valore della la massa del protone per cui assumeremo in tutti i casi $E=M_0c^2$. Otteniamo allora i seguenti valori numerici

$$\alpha_{\text{Grav}} = \frac{G_N E^2}{\hbar c^5} = \frac{GM_0^2}{\hbar c} = \frac{6,67 \times 10^{-11} \times (1.67 \times 10^{-27})^2}{1.05 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8} \sim 6 \times 10^{-39}$$

$$\alpha_{\text{Deb}} = \frac{G_F E^2}{\hbar^3 c^3} = \frac{G_F M_0^2 c}{\hbar^3} = \frac{1.46 \times 10^{-62} \times (1.67 \times 10^{-27})^2 \times 3 \times 10^8}{(1.05 \times 10^{-34})^3} \sim 10^{-5}$$

$$\alpha_{\text{Elettr}} = \frac{(e^2 / 4\pi\epsilon_0)}{\hbar c} = \frac{(1.60 \times 10^{-19})^2}{4\pi \times 8.85 \times 10^{-12} \times 1.05 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8} = \frac{1}{137.036} \sim 7.3 \times 10^{-3}$$

$$\alpha_{\text{Forte}} = \sqrt{\frac{M_0 L_0 c}{\hbar}} = \sqrt{\frac{1.67 \times 10^{-27} \times 10^{-15} \times 3 \times 10^8}{1.05 \times 10^{-34}}} \sim 2$$

i quali mostrano che in una scala adimensionale dove l'intensità delle interazioni forti è ~ 1 , l'intensità della interazione elettromagnetica è $\sim 10^{-2}$, l'interazione debole $\sim 10^{-5}$ e l'interazione gravitazionale $\sim 10^{-38}$.

Variabili dinamiche

□ Energia e Quantità di Moto

Come più volte sottolineato, la descrizione dei fenomeni che coinvolgono particelle elementari richiedono l'uso della teoria dei campi tuttavia se ci si limita a considerare una singola particella o un insieme di particelle in numero costante (si escludono cioè i fenomeni di mutua conversione) l'operatore di campo può essere riletto come l'ordinaria funzione d'onda della meccanica quantistica classica.

Dato che siamo interessati alle variabili dinamiche che caratterizzano una particella elementare possiamo accettare questa limitazione ed assumere che la $\Psi(\vec{r}, t)$ sia la **funzione d'onda che descrive lo stato della particella microscopica**. Se vogliamo calcolare il valore di una qualche variabile dinamica del nostro sistema dobbiamo **applicare l'operatore associato a quella variabile dinamica sulla funzione d'onda** e calcolarne l'eventuale **autovalore**.

ESEMPIO: come noto uno **stato avente quantità di moto ed energia definite** è descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(\vec{r}, t) = A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \vec{k} = (2\pi / \lambda) \vec{n} \quad \omega = 2\pi / T \quad E = \hbar \omega \quad \vec{p} = \hbar \vec{k}$$

dove λ e T sono la **lunghezza d'onda** ed il **periodo** dell'onda.

Richiamando ora le espressioni degli **operatori della energia e della quantità di moto**

$$\hat{H} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad \hat{P} = -i\hbar \vec{\nabla}$$

e applicandoli alla funzione d'onda data

$$\begin{aligned} \hat{H} \psi(\vec{r}, t) &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = i\hbar (-i\omega) A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = \hbar \omega \psi(\vec{r}, t) = E \psi(\vec{r}, t) \\ \hat{P} \psi(\vec{r}, t) &= -i\hbar \vec{\nabla} A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = -i\hbar (i\vec{k}) A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = \hbar \vec{k} \psi(\vec{r}, t) = \vec{p} \psi(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

troviamo che **lo stato ha valori definiti della energia e della quantità di moto** (cioè è un autostato della energia e della quantità di moto).

Tali valori della energia e della quantità di moto sono connessi alla massa ed alla velocità delle particelle dalle ben note **espressioni relativistiche**

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

per cui troviamo anche le utili relazioni

$$\hbar\omega = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad \hbar\vec{k} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad \omega^2 = k^2c^2 + \frac{m^2c^4}{\hbar^2}$$

che permettono di mettere in relazione la lunghezza d'onda e la pulsazione di De Broglie con la velocità della particella.

Infine **energia e quantità di moto, sono grandezze relative** e quindi, nel passaggio da un riferimento all'altro, sono soggette ad una **Trasformazione di Lorentz**. Particolarmente comoda risulta la **formulazione quadridimensionale** della teoria della relatività ristretta nella quale **una trasformazione di Lorentz opera come una certa matrice 4x4 sul vettore a 4 componenti**

detto **quadrivettore energia-impulso**.
$$P = (E/c, \vec{p})$$

□ Momento angolare orbitale

Oltre agli stati con energia e quantità di moto definite sono possibili **stati con momento angolare definito**. Come al solito gli stati ed i valori del momento angolare possono essere ottenuti dall' **operatore momento angolare** definito dalla seguente relazione

$$\hat{L} = \vec{r} \times \hat{P} = -i\hbar \vec{r} \times \vec{\nabla}$$

Assumendo un sistema di coordinate cartesiane e sostituendo le espressioni del vettore posizione e dell'operatore della quantità di moto

$$\hat{L} = (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z) = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}, z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}, x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

- E' semplice, anche con un calcolo diretto, verificare che le componenti cartesiane di questo operatore, a differenza della quantità di moto, non commutano tra loro e soddisfano le relazioni seguenti

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z \quad [L_z, L_x] = i\hbar L_y \quad [L_y, L_z] = i\hbar L_x$$

Queste comportano che solo uno degli operatori cartesiani possa avere autovalori definiti per cui concludiamo che **negli stati con momento angolare definito solo una delle componenti cartesiane del momento angolare può assumere un valore definito** (di solito si assume che tale operatore cartesiano sia L_z).

- Consideriamo ora l'operatore modulo quadrato del momento angolare

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$$

si ottengono facilmente le seguenti regole di commutazione per L^2

$$[L^2, L_x] = [L^2, L_y] = [L^2, L_z] = 0$$

le quali affermano che L^2 ha autovalori definiti assieme ad uno qualunque degli operatori cartesiani del momento angolare che possiamo assumere essere L_z . Dunque **in uno stato di momento angolare definito solo L^2 ed L_z possono assumere valori definiti** (sottolineare la differenza con la meccanica classica).

-
- Utilizzando le regole di commutazione è possibile ottenere i seguenti due fondamentali risultati (vedi appendice):
l'operatore modulo quadrato del momento angolare L^2 può assumere solo i seguenti valori discreti

$$l(l+1)\hbar^2 \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

l'operatore terza componente cartesiana del momento angolare L_z può assumere solo i seguenti valori discreti

$$m\hbar \quad -l \leq m \leq l \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Riassumendo possiamo allora affermare che ***gli stati di momento angolare definito sono autostati degli operatori L^2 ed L_z nei quali solo il modulo quadrato del momento angolare e la sua componente lungo l'asse delle z assumono un valore definito.*** Tali autostati costituiscono una ***famiglia di funzioni dipendente da due numeri interi m ed l*** dalle equazioni agli autovalori (equazioni differenziali)

$$\begin{aligned} L^2 \psi_{l,m}(\vec{r}) &= l(l+1)\hbar^2 \psi_{l,m}(\vec{r}) & l &= 0, 1, 2, \dots \\ L_z \psi_{l,m}(\vec{r}) &= m\hbar \psi_{l,m}(\vec{r}) & m &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad -l < m < l \end{aligned}$$

Solo in certi casi è necessaria la forma esplicita delle funzioni $\psi_{l,m}$ dette ***armoniche sferiche*** le quali, in ogni caso, possono essere trovate in un qualunque testo di meccanica quantistica.

□ Momento Angolare Intrinseco (Spin)

Il valore del momento angolare orbitale di una particella, sia nella meccanica classica che nella meccanica quantistica, dipende dal polo di riduzione scelto. Se questo coincide con la particella (o con il centro di massa del sistema) il momento angolare orbitale si annulla e l'unico momento angolare possibile è quello intrinseco. Tutto ciò è vero sia nella meccanica classica che nella meccanica quantistica tuttavia – nei due casi – sussistono rilevanti differenze

- **meccanica classica:** un momento angolare intrinseco è pensabile **solo per i corpi estesi** (non puntiformi) che comunque si interpreta come la somma dei momenti angolari orbitali di tutte le parti che lo compongono;
- **meccanica quantistica:** un momento angolare intrinseco può esistere **anche per le particelle puntiformi** e viene detto **spin** e poichè esiste per particelle puntiformi non è riducibile in nessun modo al momento angolare orbitale;
- **meccanica classica:** il momento angolare intrinseco può assumere **qualsunque valore in modulo direzione e verso**;
- **meccanica quantistica:** lo **spin** ha un **modulo fisso ed invariabile** che risulta essere una **proprietà intrinseca** della particella al pari della massa, la carica etc., etc. mentre le sue componenti cartesiane sono soggette alle stesse limitazioni del momento angolare orbitale.

Per questi ed altri motivi possiamo affermare che **lo spin è un concetto quantistico senza alcuna corrispondenza nella fisica classica**. Come noto il concetto di spin ed il suo apparato formale furono introdotti inizialmente nel caso dell'elettrone per descrivere lo strano sdoppiamento delle linee spettrali dei metalli alcalini (il caso del sodio è uno dei più noti) ma presto divenne chiaro che si trattava di una nuova proprietà intrinseca delle particelle.

Lo spin è una variabile dinamica associata alla particella al pari della quantità di moto e del momento angolare orbitale. Ad esso risultano associati gli **operatori dello spin** che per definizione soddisfano le seguenti regole di commutazione (identiche a quelle del momento angolare orbitale)

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z \quad [S_z, S_x] = i\hbar S_y \quad [S_y, S_z] = i\hbar S_x$$

mentre gli operatori della quantità di moto e del momento angolare orbitale agiscono sulla funzione d'onda, dipendente dalla posizione e dal tempo, **gli operatori dello spin agiscono su 'funzioni' dette spinori**, definite nello **spazio degli spin: uno spazio complesso** con un numero di dimensioni che, come vedremo subito, dipende dal valore dello spin.

Le regole di commutazione (stessa dimostrazione vista per il momento angolare orbitale!) definiscono una famiglia di **stati di spin definito** dipendente da **due numeri interi s ed s_z**

$$\begin{aligned} S^2 \chi_{s,s_z} &= s(s+1)\hbar \chi_{s,s_z} & S &= 0, 1/2, 1, 3/2, \dots \\ S_z \chi_{s,s_z} &= s_z \hbar \chi_{s,s_z} & -S < s_z < S & & s_z &= 0, \pm 1/2, \pm 1, \dots \end{aligned}$$

dove gli autovettori χ_{s,s_z} descrivono **stati con modulo quadrato dello spin pari ad $s(s+1)\hbar$ e componente dello spin lungo l'asse delle z pari a $s_z\hbar$** . Essi costituiscono una famiglia di **2s+1 vettori nello spazio complesso a 2s+1 dimensioni** dove s è il **valore dello spin della particella**.

Quando una particella possiede spin la **funzione d'onda complessiva** si ottiene attraverso il 'prodotto tensoriale' del vettore di stato che descrive la 'posizione' (l'ordinaria funzione d'onda detta anche **parte orbitale** della funzione d'onda) ed il vettore di stato che descrive lo spin (autovettore dell'operatore di spin detto anche **parte spinoriale** della funzione d'onda)

$$\psi(\vec{r}, s, s_z) \equiv \psi(\vec{r}) \chi_{s,s_z}$$

Se la parte orbitale rappresenta uno stato di **momento angolare orbitale definito L** e la parte spinoriale uno stato di **spin definito S** allora la funzione d'onda complessiva rappresenta uno stato di **momento angolare totale J** cui corrisponde **l'operatore momento angolare totale J** somma degli operatori momento angolare orbitale e di spin

$$\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$$

Prima di discutere le regole con cui si sommano i momenti angolari vogliamo ricordare che **la separazione di momento angolare totale in momento angolare orbitale e di spin non è un concetto relativisticamente invariante**. In particolare **gli operatori modulo quadrato dello spin S^2 e del modulo quadrato del momento angolare L^2 non commutano con i generatori delle trasformazioni di Lorentz** il che significa che il loro valore cambia con il sistema di riferimento. La precedente formula, con le regole di somma che illustreremo tra poco, valgono pertanto solo in ambito non relativistico.

□ La somma di momenti angolari

Accade spesso di dovere sommare momenti angolari, sia orbitali che di spin sia della medesima particella che di particelle diverse. Come si sommano allora i momenti angolari?

- **Fisica classica:** i momenti angolari sono vettori e si sommano con la regola del parallelogramma per cui la somma dei momenti angolari \vec{j}_1 e \vec{j}_2 ha come risultato il momento angolare $\vec{J} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$ il cui modulo dipende dalla loro orientazione relativa e può assumere con continuità tutti i valori compresi nell'intervallo $|j_1 - j_2| < J < |j_1 + j_2|$ e, a parte i vincoli di natura geometrica, non ci sono restrizioni sulle componenti cartesiane;
- **meccanica quantistica:** ai momenti angolari si associano gli operatori \mathbf{j}_1 e \mathbf{j}_2 per cui alla somma dei momenti angolari risulta associato l'operatore somma $\mathbf{J} = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2$. Cosa possiamo dire degli autovalori degli operatori modulo quadrato J^2 e terza componente J_z del momento angolare totale? Si può mostrare che il risultato è assai semplice:

se gli operatori \mathbf{j}_1^2 e \mathbf{j}_2^2 hanno autovalori $j_1(j_1 + 1)\hbar^2$ $j_2(j_2 + 1)\hbar^2$ j_1, j_2 interi o seminteri

allora J^2 ha autovalori $J(J + 1)\hbar^2$ dove J è tale che $|j_1 - j_2| < J < |j_1 + j_2|$ (si noti l'analogia con la somma vettoriale)

se gli operatori \mathbf{j}_{1z} e \mathbf{j}_{2z} hanno autovalori $m_1\hbar$ $m_2\hbar$ $-j_1 < m_1 < j_1$ $-j_2 < m_2 < j_2$ m_1, m_2 int. o semint.

allora J_z ha autovalori $M\hbar$ dove M è tale che $-J < M < J$ $M = m_1 + m_2$

Come atteso, l'operazione di somma di momenti angolari in meccanica quantistica (MQ) differisce profondamente da quella in meccanica classica (MC): **nella MC la somma di due momenti angolari dati fornisce un momento angolare totale ben definito in modulo direzione e verso** mentre **nella MQ la somma di due momenti angolari 'dati' fornisce una serie di possibili momenti angolari totali**. Questo accade perché – sia il momento angolare somma che i momenti angolari sommati – hanno valori definiti del modulo quadrato e della terza componente e non di ciascuna componente cartesiana (come nel caso classico). Questa minore 'determinazione' dei momenti angolari aumenta il numero di possibili esiti della loro somma i quali – come sempre in MQ – vanno a combinarsi linearmente (ovvero interferiscono).

Nella MQ quindi si pone il seguente problema: **dati due stati di momento angolare j_1 e j_2 determinare i coefficienti della combinazione lineare dei possibili stati di momento angolare totale J** . Tali coefficienti sono detti **Coefficienti di Clebsch-Gordan** e sono definiti dalla relazione seguente

NOTA: i due stati di momento angolare definito j_1 e j_2 , quando vengono sommati (scrivendoli in forma di prodotto si costruisce di fatto uno stato somma poiché su tale prodotto agisce l'operatore somma $J = j_1 + j_2$), forniscono una serie di possibili stati di momento angolare totale J (e non un solo stato come nel caso classico).

$$\phi_{j_1 m_1} \phi_{j_2 m_2} = \sum_{\substack{J=|j_1-j_2| \\ M=m_1+m_2}}^{|j_1+j_2|} C_{JM}^{j_1 m_1 j_2 m_2} \phi_{JM}$$

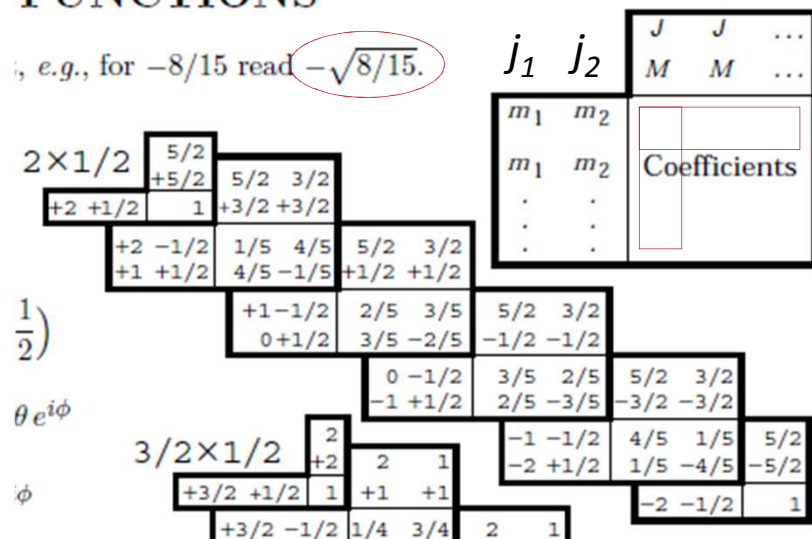
Naturalmente si può porre anche il problema inverso: **dato lo stato di momento angolare totale J , individuare i coefficienti della combinazione lineare dei possibili stati di momento angolare j_1 e j_2** . Anche questi sono detti **Coefficienti di Clebsch-Gordan**

$$\phi_{JM} = \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_1+m_2=M}} C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{JM} \phi_{j_1 m_1} \phi_{j_2 m_2}$$

34. Clebsch-Gordan coefficients

COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, FUNCTIONS

e.g., for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.



Esempi

$$\psi_{2,2} \psi_{1/2,1/2} = \sqrt{1} \psi_{5/2,5/2}$$

$$\psi_{2,2} \psi_{1/2,-1/2} = \sqrt{1/5} \psi_{5/2,3/2} + \sqrt{4/5} \psi_{3/2,3/2}$$

$$\psi_{5/2,1/2} = \sqrt{2/5} \psi_{1,1} \psi_{1/2,-1/2} + \sqrt{3/5} \psi_{1,0} \psi_{1/2,1/2}$$

NOTA: Come vedremo esiste una estesa analogia tra momento angolare ed isospin che comporta che i coefficienti di Clebsch-Gordan con le regole illustrate possano essere impiegate anche con l'isospin.

□ Proprietà di simmetria dei Coefficienti di Clebsh-Gordan

I coefficienti di Clebsh-Gordan permettono di costruire gli stati di momento angolare totale J, M a partire dagli stati di momento angolare (j_1, m_1) e (j_2, m_2) . Ci si può chiedere cosa succeda nel caso in cui gli stati vengano sommati nell'ordine inverso cioè calcolando $(j_2, m_2) + (j_1, m_1)$ invece di $(j_1, m_1) + (j_2, m_2)$. Lungi dall'essere una semplice curiosità, le proprietà della somma rispetto allo scambio degli 'addendi' intervengono in molte situazioni che riguardano la fisica delle particelle.

Conviene allora scrivere le rispettive serie di Clebsh-Gordan

$$\phi_{j_1 m_1} \phi_{j_2 m_2} = \sum_{\substack{J=|j_1-j_2| \\ M=m_1+m_2}}^{|j_1+j_2|} C_{JM}^{j_1 m_1 j_2 m_2} \phi_{JM} \qquad \phi_{j_2 m_2} \phi_{j_1 m_1} = \sum_{\substack{J=|j_1-j_2| \\ M=m_1+m_2}}^{|j_1+j_2|} C_{JM}^{j_2 m_2 j_1 m_1} \phi_{JM}$$

ed osservare che per trovare la risposta dobbiamo individuare la relazione esistente tra $C_{JM}^{j_1 m_1 j_2 m_2}$ e $C_{JM}^{j_2 m_2 j_1 m_1}$. Dalla analisi diretta delle tavole di Clebsh-Gordan oppure anche da considerazioni di ordine più generale si ottiene la seguente formula

$$C_{JM}^{j_1 m_1 j_2 m_2} = (-1)^{J-j_1-j_2} C_{JM}^{j_2 m_2 j_1 m_1}$$

Il concetto di simmetria in fisica

Semplificando oltre il consentito possiamo affermare che un **sistema fisico costituito da particelle materiali soggette a forze**, viene descritto nel modo seguente:

- si precisa **la posizione spaziale e temporale** dei punti materiali in relazione ad un prefissato riferimento (ovvero i parametri spazio-temporali o **parametri esterni**)
- si precisano **le proprietà intrinseche** di ciascuna particella come ad esempio la massa, spin, carica elettrica etc. etc. (ovvero i **parametri interni**);
- noti i parametri esterni ed interni risulta possibile calcolare le forze e, attraverso **l'equazione dinamica** che governa il sistema (ad **$F=ma$** nel caso dei fenomeni meccanici), descrivere la sua evoluzione temporale.

Molto spesso accade che eseguendo una certa **trasformazione sui parametri spazio-temporali o su quelli interni**, l'equazione dinamica del sistema, e con essa la sua evoluzione temporale, rimangano invariate. Quando questo accade si dice che **il sistema fisico è simmetrico rispetto alla trasformazione** considerata (in completa analogia con il concetto geometrico di simmetria).

L'utilità del concetto di simmetria è duplice. Da un lato, se l'equazione dinamica è nota, la conoscenza delle simmetrie in essa contenute è assai utile per individuare le proprietà generali della sua evoluzione senza doverla risolvere nel dettaglio. Dall'altro, se l'equazione dinamica non è nota, la conoscenza della simmetrie è utile per costruirne una in modo appropriato.

Da lungo tempo nella fisica c'è una chiara consapevolezza della utilità dei principi di simmetria. Uno dei primi a rendersene conto fu certamente Galileo quando capì che l'evoluzione di un sistema meccanico all'interno di una stanza non veniva alterata dallo stato di moto rettilineo uniforme della stanza stessa. Nonostante questo fu solo con la teoria della relatività che il concetto di simmetria assunse un ruolo rilevante per diventare poi centrale nella meccanica quantistica e ancor di più nella fisica delle particelle.

In generale le trasformazioni che vale la pena considerare sono tutte quelle a carico delle variabili sia interne che esterne e quindi, in sostanza, trasformazioni sulle 'cariche' interne e sul sistema di coordinate. Tra queste ultime possiamo facilmente immaginare la rotazione del riferimento cartesiano (rotazione), la traslazione del riferimento cartesiano (traslazione) l'inversione degli assi del riferimento cartesiano (trasformazione di parità), la traslazione dell'origine dei tempi (traslazione temporale) e l'inversione del senso di marcia dell'orologio (inversione del tempo).

In generale la dinamica del sistema può essere invariante o non invariante rispetto a queste trasformazioni anche se, nel caso delle trasformazioni citate, l'invarianza della dinamica, qualunque sia il sistema fisico, sembra inevitabile. Infatti ciascuno di noi si aspetta che

- ruotando il sistema di riferimento la dinamica di un qualunque sistema fisico non cambi ovvero che in generale **un sistema fisico è simmetrico rispetto alle rotazioni** (o invariante per rotazioni). Se ciò non accadesse dovremmo concludere che le direzioni dello spazio non sono equivalenti tra loro o, equivalentemente, che esiste una direzione privilegiata nello spazio. Infatti, in questo caso sarebbe possibile utilizzare la dinamica del sistema per caratterizzare le differenti direzioni dello spazio;
- trasformando la terna cartesiana di riferimento da destrorsa (come solitamente si assume) a sinistrorsa la dinamica di un qualunque sistema fisico non cambi ovvero che in generale **un sistema fisico è simmetrico rispetto alla trasformazione di parità**. Se questa proprietà non fosse soddisfatta dovremmo concludere che lo spazio ha una parità privilegiata;
- misurando i tempi del nostro sistema per mezzo di un orologio che marcia in senso antiorario piuttosto che orario che la dinamica di un qualunque sistema fisico non cambi ovvero che **un sistema fisico è simmetrico per inversione temporale**. Se questa proprietà non fosse soddisfatta dovremmo concludere che il tempo ha un verso di scorrimento privilegiato (questa proprietà appare meno ovvia delle precedenti !);
- muovendo il sistema di riferimento con velocità uniforme la dinamica di un qualunque sistema fisico - come aveva intuito galileo per la meccanica ed Einstein per qualunque sistema fisico - non cambi ovvero che **tutti sistemi fisici sono simmetrici rispetto alla traslazione uniforme**. Se ciò non fosse vero significherebbe che esiste, tra gli infiniti riferimenti in moto relativo, un riferimento privilegiato.

Già all'interno della fisica classica ci si rese conto che ***l'esistenza di simmetrie***, alcune delle quali sembravano, come si è detto, ovvie, ***erano invece collegate alle ben note leggi di conservazione di alcune variabili dinamiche***. Questo legame apparve meno ovvio e fece capire quale potesse essere l'importanza ed il ruolo delle simmetrie. Ad esempio si può mostrare che:

- i) la simmetria della dinamica di un sistema rispetto alle traslazioni temporali conduce alla legge della conservazione della energia per quel sistema;
- ii) la simmetria della dinamica di un sistema rispetto alle traslazioni del riferimento conduce alla legge della conservazione della quantità di moto per quel sistema;
- iii) la simmetria della dinamica di un sistema rispetto alle rotazioni del riferimento conduce alla legge della conservazione del momento della quantità di moto per quel sistema etc. etc.

In questo modo la non ovvia esistenza delle leggi generali di conservazione di certe variabili dinamiche veniva ricondotta all'apparentemente ovvia esistenza di certe simmetrie della dinamica rispetto a certe trasformazioni e la generalità delle prime era giustificata dalla generalità delle seconde.

Il legame esistente tra ***simmetria della dinamica rispetto ad una trasformazione e conservazione della variabile dinamica associata*** fu la chiave per l'elaborazione di una strategia generale capace di introdurre le variabili dinamiche in contesti assai lontani dalla fisica classica. L'applicazione di questa strategia alla meccanica quantistica la si deve soprattutto ad E. Wigner mentre l'applicazione generale alle teorie di campo sia classiche che quantistiche risiede essenzialmente in un fondamentale teorema formulato da Emmy Noether nel 1915 (dato un sistema descritto da una certa lagrangiana, ad ogni trasformazione continua che lascia l'azione invariata corrisponde una corrente conservata).

Le trasformazioni spazio-temporali

Le trasformazioni spazio-temporali sono connesse alle possibili trasformazioni che possono essere eseguite sul riferimento cartesiano (terna rigida d'assi mutuamente ortogonali) e sull'orologio che l'osservatore impiega per definire la posizione e il tempo delle particelle del sistema. Con tutta evidenza tali trasformazioni non possono essere

- **rotazioni del riferimento attorno ad un asse;**
- **traslazioni del riferimento;**
- **inversione di tutti gli assi del riferimento;**
- **traslazione dell'origine dei tempi (traslazione temporale);**
- **inversione del senso di marcia dell'orologio (inversione temporale).**

Le **rotazioni e le traslazioni del riferimento** sono dette **trasformazioni continue** poiché possono essere modulate con continuità, mentre **le inversioni degli assi del riferimento e del senso di marcia dell'orologio** sono dette **trasformazioni discrete**.

Assumendo un riferimento cartesiano è semplice individuare gli operatori che realizzano queste trasformazioni nel caso dei vettori tridimensionali (nel seguito considereremo solo le rotazioni, la parità e l'inversione temporale).

Rotazioni nello spazio tridimensionale

Una rotazione del riferimento attorno ad un certo asse determina la seguente trasformazione lineare tra le componenti cartesiane di un generico vettore \vec{x} (nel seguito useremo, sia la notazione matriciale che quella indiciale)

$$\vec{x}' = R \vec{x} \quad x'_j = R_{jk} x_k$$

come noto, tale trasformazione **mantiene inalterato il modulo dei vettori** (e più in generale il prodotto scalare tra vettori) il che significa che le seguenti somme devono essere invarianti rispetto alla rotazione

$$x'_j x'_j = x_m x_m$$

tenendo conto delle due precedenti relazioni possiamo riscrivere somma a primo membro come

$$x'_j x'_j = R_{jk} x_k R_{jm} x_m = x_k R_{kj}^T R_{jm} x_m$$

la quale coincide con la somma a secondo membro $x_m x_m$ solo se R soddisfa la relazione seguente

$$R_{kj}^T R_{jm} = \delta_{km} \quad R^T R = I$$

detta relazione di ortogonalità. Giungiamo allora la conclusione che **una rotazione della terna cartesiana d'assi è rappresentata da una matrice 3x3 ortogonale.**

Dalla condizione di ortogonalità della matrice R (ricordando che $\det(R) = \det(R^T)$) otteniamo anche

$$\det(R^T R) = \det(I) \quad \det(R^T) \det(R) = 1 \quad \det(R)^2 = 1 \quad \det(R) = \pm 1$$

Dato che la matrice unità I deve essere identificata con la rotazione nulla e dato che **la rotazione nulla deve essere connessa con continuità a tutte le altre rotazioni**, perveniamo alla conclusione che il determinante di R deve eguagliare il determinante della matrice unità ovvero che

$$\det(R) = 1$$

Giungiamo allora alla conclusione che **una rotazione della terna cartesiana d'assi è rappresentata da una matrice 3x3 ortogonale ed unimodulare.**

E' semplice mostrare che l'insieme delle rotazioni soddisfa gli assiomi che caratterizzano quella struttura algebrica che in matematica prende il nome di gruppo. Inoltre, dato che la rotazione è una trasformazione lineare e continua possiamo affermare che le rotazioni costituiscono un gruppo lineare continuo di trasformazioni nello spazio tridimensionale reale. Infine, poichè la matrice che realizza la trasformazione è unimodulare (speciale) ed ortogonale questo viene detto **gruppo speciale ortogonale** ed indicato con la sigla **SO(3)**.

□ La rappresentazione fondamentale del gruppo delle rotazioni nello spazio tridimensionale

Il gruppo delle rotazioni nello spazio tridimensionale, qualora si assuma un riferimento cartesiano, è definito dall'insieme di matrici **R**, **3 × 3 unimodulari** ed **ortogonali** che operano sui vettori di tale spazio trasformandone le componenti cartesiane secondo le equazioni

$$\vec{x}' = R \vec{x} \quad x'_j = R_{jk} x_k$$

Poiché il gruppo di trasformazioni è definito attraverso la sua azione sui vettori si dice che i **vettori dello spazio ordinario tridimensionale** costituiscono la **rappresentazione fondamentale** del gruppo delle rotazioni. Infine, dato che un vettore nello spazio tridimensionale è un **insieme ordinato di tre numeri che nel corso della rotazione si combinano linearmente tra loro**, si dice che la rappresentazione fondamentale ha **dimensione 3** e la si indica spesso con il solo **simbolo 3**.

E' naturale porsi le seguenti domande

- **possiamo costruire rappresentazioni del gruppo delle rotazioni che abbiano un diverso numero di dimensioni?**
- **possiamo costruire rappresentazioni del gruppo delle rotazioni in spazi vettoriali differenti da quello reale tridimensionale (es: spazi complessi)?**

Per quanto riguarda il primo quesito illustreremo una tecnica semplice e generale, basata sulla formazione di tensori di rango crescente, che permette di costruire rappresentazioni del gruppo delle rotazioni a partire da quella fondamentale. Per quanto riguarda il secondo quesito è necessario introdurre nuovi concetti quali quello di trasformazione infinitesima e si rimanda ai rapidi richiami che potete trovar in appendice e soprattutto alle lezioni iniziali sulla teoria dei gruppi

□ Altre rappresentazioni del gruppo delle rotazioni nello spazio tridimensionale

Un modo per costruire una rappresentazione del gruppo delle rotazioni diversa da quella fondamentale è il seguente: si prendono due diversi vettori x e y (**tensori di rango 1**) e si costruisce una matrice (**tensore di rango 2**) eseguendo ciò che viene chiamato prodotto diadico o **prodotto tensoriale**

$$\vec{x} \otimes \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & x_1 y_3 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & x_2 y_3 \\ x_3 y_1 & x_3 y_2 & x_3 y_3 \end{pmatrix}$$

In che modo si trasforma questa matrice in seguito ad una rotazione? Per vederlo conviene richiamare la legge di trasformazione dei singoli vettori

$$x'_j = R_{jk} x_k \quad y'_j = R_{jk} y_k$$

dalle quali si ottiene immediatamente la legge di trasformazione del prodotto delle componenti dei vettori

$$x'_j y'_k = R_{jp} R_{kq} x_p y_q$$

che rappresenta, per definizione, **la legge di trasformazione dei tensori di rango 2** che estende, come noto, quella dei comuni vettori. Il fatto rilevante è che in questo modo abbiamo costruito un insieme di **$3 \times 3 = 9$ numeri che si combinano linearmente a seguito della rotazione**, dunque, una **rappresentazione del gruppo delle rotazioni di dimensione 9** indicata proprio con la notazione **3×3** .

Chiaramente, eseguendo prodotti diadici di 3, 4 o più vettori, si potranno comporre tensori di rango 3, 4 o più con un numero rispettivamente di 27, 81 o più componenti le quali costituiranno altrettante rappresentazioni del gruppo delle rotazioni. Giungiamo pertanto alla importante conclusione che ***i tensori realizzano rappresentazioni del gruppo delle rotazioni***. Riguardo questo punto c'è un importante aspetto da sottolineare che ci porterà ad individuare **due diverse tipologie di rappresentazioni**.

Per illustrarlo consideriamo il caso di un tensore di rango 2 (matrice). Quando eseguiamo una rotazione, le componenti della matrice vengono combinate linearmente tra loro in modo simile a quelle di un vettore. Tuttavia, mentre è evidente che la rotazione combina linearmente tutte e 3 le componenti di un vettore, non è altrettanto evidente che combini tra loro tutte e 9 le componenti della matrice. Infatti, nulla esclude che la combinazione lineare delle componenti a seguito di una rotazione, avvenga per **sottogruppi indipendenti tra loro**. In effetti è proprio ciò che accade! Nelle pagine seguenti mostreremo che le proprietà della matrice di rotazione sono tali che, nel corso della rotazione, certi insiemi di componenti della matrice si combinano linearmente tra loro indipendentemente dagli altri.

Quando questo fatto accade si dice che ciascun sottogruppo indipendente costituisce un **sottospazio invariante del gruppo di trasformazioni**. L'importanza di questa precisazione risiede nel fatto che l'esistenza di sottospazi invarianti determina di fatto una diminuzione della dimensionalità della rappresentazione che è la loro caratteristica più rilevante.

Quando una rappresentazione ammette un sottospazio invariante non nullo si dice che la **rappresentazione è riducibile** mentre, al contrario, una rappresentazione che non ammette un sottospazio invariante (se non quello vuoto) viene detta **rappresentazione irriducibile**.

Come si stabilisce se una rappresentazione è riducibile? Come si costruisce una rappresentazione irriducibile?

Illustreremo la procedura nel solo caso dei tensori di rango 2 sottolineando, comunque, che gli stessi ragionamenti possono essere estesi anche al caso dei tensori di rango superiore. Come si vedrà la procedura è fondata sul riconoscimento delle **proprietà del tensore invarianti sotto rotazioni**, determinate a loro volta alle proprietà generali della matrice di rotazione stessa.

□ **Le proprietà invarianti per rotazioni di un tensore di rango 2**

Richiamiamo la legge di trasformazione di un tensore di rango 2 vista in precedenza

$$1) \quad (x'_j y'_k) = R_{jp} R_{kq} (x_p y_q)$$

e riarrangiamola nel modo seguente

$$2) \quad (x'_j y'_k) = R_{jp} (x_p y_q) R_{qk}^T$$

Ponendo $\Omega_{pq} = (x_p y_q)$ otteniamo la seguente relazione

$$3) \quad \Omega' = R \Omega R^T$$

che esprime **la legge di trasformazione di un tensore di rango 2 in forma matriciale.**

Cerchiamo ora la legge di trasformazione di un tensore di rango 2 trasposto. Per ottenerla basta eseguire la trasposizione della 3)

$$4) \quad \Omega'^T = (R \Omega R^T)^T = R \Omega^T R^T$$

Dal confronto con la 3) si evince che **il tensore Ω ed il suo trasposto Ω^T si trasformano per rotazioni con la stessa legge** per cui se $\Omega = \Omega^T$, ovvero **il tensore è simmetrico** allora si avrà anche $\Omega' = \Omega'^T$ ovvero anche il tensore trasformato è simmetrico. Ovviamente, nel caso in cui $\Omega = -\Omega^T$ ovvero **il tensore è antisimmetrico** allora si avrà anche $\Omega' = -\Omega'^T$ ovvero anche il tensore trasformato è antisimmetrico

$$\text{se } \Omega = \Omega^T \text{ allora } \Omega' = \Omega'^T ; \text{ se } \Omega = -\Omega^T \text{ allora } \Omega' = -\Omega'^T$$

Siamo giunti allora alla importante conclusione che **le proprietà di simmetria o antisimmetria di un tensore non vengono alterate dalla rotazione** oppure che **le proprietà di simmetria di un tensore di rango 2 sono invarianti per rotazioni.** Si noterà anche che tale fatto non dipende da una proprietà intrinseca della matrice di rotazione ma, piuttosto, dall'aver impiegato prodotti tensoriali per costruire rappresentazioni del gruppo di trasformazioni.

Richiamiamo nuovamente la legge di trasformazione del tensore

$$(x'_j y'_k) = R_{jp} R_{kq} (x_p y_q)$$

e domandiamoci in che modo si trasforma la **traccia del tensore**, ovvero **la somma degli elementi sulla diagonale principale della matrice corrispondente**. Eguagliando gli indici **j** e **k**, otteniamo facilmente

$$(x'_j y'_j) = R_{jp} R_{jq} (x_p y_q) = R_{pj}^T R_{jq} (x_p y_q)$$

Tenendo conto della condizione di ortogonalità,

$$R^T R = I \quad R_{pj}^T R_{jq} = \delta_{pq}$$

otteniamo la relazione

$$\boxed{x'_j y'_j = x_p y_p}$$

la quale mostra che **la traccia di un tensore di rango 2 non viene modificata dalle rotazioni** oppure, in modo equivalente, che **la traccia di un tensore di rango 2 è invariante per rotazioni** (si noterà che questo è un modo equivalente per affermare il fatto che le rotazioni non modificano il prodotto scalare tra vettori).

Si noterà che le proprietà invarianti per rotazioni di un generico tensore di rango due discusse fino a questo momento hanno sfruttato due ben precise proprietà del gruppo delle rotazioni: la forma della legge di trasformazione dei tensori e la ortogonalità della matrice 3×3 della rotazione mentre non è invece stata sfruttata la unimodularità della matrice stessa.

Per sfruttare la unimodularità della matrice di rotazione riscriveremo in una unica espressione matriciale la legge di trasformazione di tre diversi vettori \mathbf{x} , \mathbf{y} e \mathbf{z}

$$\begin{pmatrix} x'_1 & y'_1 & z'_1 \\ x'_2 & y'_2 & z'_2 \\ x'_3 & y'_3 & z'_3 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$

Questa espressione, che evidentemente fornisce la corretta legge di trasformazione per ognuno dei vettori, ha il vantaggio di permetterci di imporre agevolmente il vincolo della unimodularità alla matrice della rotazione R e, quindi, di individuarne le conseguenze. Infatti, otteniamo immediatamente l'espressione

$$\det \begin{pmatrix} x'_1 & y'_1 & z'_1 \\ x'_2 & y'_2 & z'_2 \\ x'_3 & y'_3 & z'_3 \end{pmatrix} = \det(R) \times \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$

da cui, introducendo il tensore antisimmetrico ε_{jkl}

$$\varepsilon_{jkl} x'_j y'_k z'_l = \varepsilon_{pqr} x_p y_q z_r$$

la quale mostra che **il numero ottenuto dalla contrazione delle componenti cartesiane di tre vettori (tensore di rango 3) con il tensore ε non viene alterato dalle rotazioni** oppure, in modo equivalente, che **la contrazione di un tensore di rango 3 con il tensore ε è invariante per rotazioni**.

□ La riduzione di un tensore di rango 2

Il punto chiave ora è comprendere che **le proprietà invarianti di un tensore si traducono nella esistenza di sottospazi invarianti e dunque nella possibilità di individuare rappresentazioni irriducibili del gruppo delle rotazioni**. Per vederlo consideriamo un generico tensore di rango 2 che riscriviamo nel modo seguente

$$(x_p y_q) = Z_{pq} = \left(\frac{Z_{pq} - Z_{qp}}{2} \right) + \left(\frac{Z_{pq} + Z_{qp}}{2} \right) = \left(\frac{Z_{pq} - Z_{qp}}{2} \right) + \left(\frac{Z_{pq} + Z_{qp}}{2} - \frac{1}{3} \delta_{pq} Z_{ss} \right) + \left(\frac{1}{3} \delta_{pq} Z_{ss} \right)$$

Qualunque tensore di rango 2 può essere espresso attraverso questa identità, articolata in tre parti indicate tra parentesi. Ciascuna parte identifica un tensore con simmetria e traccia definite rispetto alle rotazioni: il primo tensore è antisimmetrico e, necessariamente, a traccia nulla; il secondo è simmetrico a traccia nulla; il terzo altro non è che la traccia moltiplicata per il tensore (matrice) identità. Poiché queste proprietà sono invarianti per rotazioni possiamo stare certi che, eseguendo una rotazione, le componenti di questi tre tensori non si combineranno linearmente tra loro. Abbiamo dunque individuato, all'interno dello spazio a 9 dimensioni di un generico tensore di rango 2, tre sottospazi invarianti di dimensione 3 (tensore antisimmetrico), 5 (simmetrico a traccia nulla) e 1 (traccia). Ricordando che gli ultimi due sottospazi provengono dalla scomposizione dello spazio a 6 dimensioni di un tensore simmetrico (secondo passaggio nella equazione sopra) possiamo scrivere la seguente espressione

$$3 \otimes 3 = 9 = 3 \oplus 6 = 3 \oplus 5 \oplus 1$$

Dove $3 \otimes 3 = 9$ indica che abbiamo costruito un tensore di rango 2 a 9 dimensioni attraverso il prodotto tensoriale di due vettori a 3 dimensioni; $9 = 3 \oplus 6$ indica che abbiamo individuato, all'interno di questo, due sottospazi invarianti di dimensione 3 e 6 attraverso la scomposizione in tensore antisimmetrico e simmetrico; $6 = 5 \oplus 1$ indica che abbiamo individuato, all'interno di quest'ultimo, due sottospazi invarianti di dimensione 5 e 1 attraverso l'annullamento della traccia. Si dice allora che **la rappresentazione del gruppo delle rotazioni a 9 dimensioni è stata scomposta nelle rappresentazioni ad 1, 3 e 5 dimensioni** le quali, non essendo possibile individuare all'interno di queste altri sottospazi invarianti, costituiscono altrettante **rappresentazioni irriducibili**.

□ **Considerazioni finali.**

- La procedura illustrata può essere estesa alla **formazione di tensori di rango superiore al secondo** che potranno essere ridotti attraverso le operazioni di simmetrizzazione, antisimmetrizzazione e sottrazione della traccia. In questo modo, accanto alle rappresentazioni 1, 3 e 5, ottenute con i tensori di rango 2, si ottengono altre rappresentazioni irriducibili. Ad esempio i tensori simmetrici di rango N , possedendo $2N+1$ componenti indipendenti, forniranno le rappresentazioni di dimensione $2N+1=3, 5, 7, 9$ etc.etc.
- **Alcune rappresentazioni irriducibili hanno la stessa dimensione.** Ad esempio, la rappresentazione di dimensione 3 viene ottenuta sia attraverso i tensori di rango 1 (vettori) che attraverso i tensori di rango 2 antisimmetrici. Per evitare ambiguità *sarebbe dunque necessario specificare il rango del tensore*. Tuttavia di solito si preferisce fare riferimento, piuttosto che al rango del tensore, alle sue *proprietà di trasformazione rispetto alla inversione degli assi (parità)*, determinate comunque dal rango stesso. Infatti, mentre un tensore di rango 1 (vettore ordinario) inverte il proprio segno, un tensore di rango due (essendo un prodotto di componenti di vettori ordinari) lo mantiene inalterato

$$P x_j = -x_j \quad P x_j y_k = (-x_j)(-y_k) = x_j y_k$$

In questo modo la rappresentazione 3 vettoriale può essere distinta da quella tensoriale attraverso il segno rispetto alla trasformazione di parità e si dice che la prima ha **parità negativa** mentre la seconda ha **parità positiva** oppure che la prima corrisponde ad un **vettore vero** e la seconda ad uno **pseudovettore**.

La rappresentazione pseudovettoriale è ben nota! Per capirlo basta scrivere

$$\left(\frac{Z_{pq} - Z_{qp}}{2} \right) = \left(\frac{X_p Y_q - X_q Y_p}{2} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & (x_1 y_2 - x_2 y_1) & (x_1 y_3 - x_3 y_1) \\ -(x_1 y_2 - x_2 y_1) & 0 & (x_2 y_3 - x_3 y_2) \\ -(x_1 y_3 - x_3 y_1) & -(x_2 y_3 - x_3 y_2) & 0 \end{pmatrix}$$

Si può notare che le sue tre componenti indipendenti altro non sono che le componenti di un vettore \vec{z} prodotto vettoriale di \vec{x} e \vec{y} ovvero $\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$. Comprendiamo allora che la rappresentazione pseudovettoriale è quella dei vettori ottenuti dal prodotto vettoriale di due vettori 3 della rappresentazione fondamentale.

Analogamente, abbiamo una rappresentazione 1 ottenuta dalla traccia di un tensore di rango 2 la quale, espressa attraverso i vettori assume la forma

$$x_j y_j$$

si tratta di un numero e viene pertanto detta rappresentazione scalare. Notiamo però che possiamo ottenere una rappresentazione scalare (cioè un numero) anche attraverso l'operazione

$$\epsilon_{pqr} x_p y_q z_r$$

qual è la loro differenza? Come prima, la loro differenza può essere messa in luce solo ricorrendo alla operazione di inversione degli assi. Risulta allora che la prima rappresentazione 1 non inverte il segno (scalare vero) mentre la seconda lo inverte (pseudoscalare).

Inversione degli assi e del tempo

E' assai semplice è individuare gli operatori che realizzano la **trasformazione di parità spaziale** sui vettori tridimensionali. Basta infatti considerare l'espressione di un generico vettore cartesiano

$$\vec{r}' = -\vec{r} \quad x'_j = -x_j \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

da cui si deduce che **l'operatore di parità spaziale dei vettori tridimensionali è la matrice identità cambiata di segno.**

Ancora più semplice è il caso della **inversione temporale**

$$t' = -t$$

dove **l'operatore è un numero di modulo unitario e segno negativo.**

La meccanica del punto materiale

Nelle pagine precedenti abbiamo considerato con un certo dettaglio alcune trasformazioni spazio-temporali. Vogliamo mostrare ora come queste trasformazioni possano essere utilizzate per individuare le proprietà di simmetria contenute in una tipica legge dinamica quale quella newtoniana del punto materiale

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

- **Rotazioni**

Come noto, in questa equazione \vec{F} ed \vec{r} sono vettori pertanto, quando eseguiamo una rotazione del riferimento, questi devono trasformarsi per mezzo della matrice ortogonale \mathbf{R} in accordo con la legge

$$\vec{F}' = \mathbf{R} \vec{F} \quad \vec{r}' = \mathbf{R} \vec{r}$$

Applicando la matrice \mathbf{R} ad ambo i membri della prima equazione otteniamo l'espressione del secondo principio della dinamica rispetto ad una terna d'assi ruotata

$$\mathbf{R} \vec{F} = m \frac{d^2 \mathbf{R} \vec{r}}{dt^2}$$

da cui discende immediatamente l'espressione

$$\vec{F}' = m \frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2}$$

la quale mostra che ***l'equazione dinamica è invariante in forma (covariante) o simmetrica rispetto alla rotazione degli assi***. Dunque *l'espressione che utilizziamo solitamente per formulare il secondo principio della dinamica incorpora anche il fatto fisico fondamentale che **nell'ambito dei fenomeni meccanici non esistono direzioni privilegiate dello spazio***.

Si noterà come questa proprietà sia garantita dal fatto che ambo i membri della equazione, essendo entrambi vettori, si trasformano allo stesso modo rispetto alle rotazioni. Comprendiamo allora che ***il modo per assicurare che una certa equazione fisica sia simmetrica rispetto alle rotazioni è quello di scriverla in modo tale che entrambi i suoi membri si trasformino allo stesso modo sotto rotazioni***. Questa condizione, detta di **covarianza**, può essere **soddisfatta esprimendo le grandezze fisiche in gioco per mezzo di una qualche rappresentazione irriducibile del gruppo delle rotazioni**. Nel caso della meccanica la rappresentazione utilizzata è proprio quella fondamentale dei vettori tridimensionali.

- **Inversione degli assi**

Come osservato in precedenza , l'inversione degli assi del riferimento determina la seguente trasformazione dei vettori \vec{F} ed \vec{r}

$$\vec{F}' = -\vec{F} \quad \vec{r}' = -\vec{r}$$

Applicando la matrice **-1** ad ambo i membri della equazione dinamica otteniamo l'espressione del secondo principio della dinamica rispetto ad una terna d'assi invertita

$$-\vec{F} = m \frac{d^2(-\vec{r})}{dt^2}$$

da cui discende immediatamente l'espressione

$$\vec{F}' = m \frac{d^2\vec{r}'}{dt^2}$$

la quale mostra che ***l'equazione dinamica è invariante in forma (covariante) o simmetrica rispetto alla inversione degli assi***. Dunque l'espressione che utilizziamo solitamente per formulare il secondo principio della dinamica incorpora anche il fatto fisico fondamentale che ***nell'ambito dei fenomeni meccanici non esiste una parità privilegiata dello spazio*** ovvero non esiste una preferenza tra riferimenti destrorsi o sinistrorsi.

Ancora una volta questa proprietà è garantita dal fatto che ambo i membri della equazione, essendo entrambi vettori, si trasformano allo stesso modo rispetto alla inversione degli assi. In altri termini la proprietà è garantita dal fatto che l'equazione soddisfa il principio di covarianza.

- **Inversione del tempo**

L'inversione del tempo determina la seguente trasformazione della grandezza fisica t

$$t' = -t$$

Applicando la moltiplicazione **-1** nella grandezza **t** otteniamo l'espressione del secondo principio della dinamica rispetto ad un cronometro che marcia in senso antiorario

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \frac{d^2 \vec{r}}{(-1)^2 dt^2} = m \frac{d^2 \vec{r}}{(d(-t))^2} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt'^2}$$

da cui discende immediatamente l'espressione

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt'^2}$$

la quale mostra che **l'equazione dinamica è invariante in forma (covariante) o simmetrica rispetto inversione del tempo.** Dunque l'espressione che utilizziamo solitamente per formulare il secondo principio della dinamica incorpora anche il fatto fisico fondamentale che **nell'ambito dei fenomeni meccanici non esiste un verso privilegiato di scorrimento del tempo** e con esso non esiste un modo per distinguere oggettivamente tra passato e futuro. Anche in questo caso la simmetria della equazione è garantita dal fatto che essa soddisfa il principio di covarianza.

Commenti

- In questi esempi siamo partiti da una equazione dinamica nota ed abbiamo poi analizzato il suo comportamento rispetto ad alcune trasformazioni di simmetria. In questo modo abbiamo scoperto che il secondo principio della dinamica contiene alcune interessanti simmetrie (simmetria rispetto alle rotazioni, inversione degli assi e inversione del tempo) garantite dalla forma covariante della equazione.
- Spesso questo processo va compiuto nel senso opposto. Infatti può accadere che ad essere note siano certe proprietà di simmetria mentre le equazioni dinamiche sono incognite. In questi casi si partirà da una forma covariante delle equazioni per garantire le simmetrie note. Il fatto rilevante è che in certi casi il principio di covarianza è capace di restringere in modo drastico le diverse alternative assumendo un ruolo determinante nella costruzione della equazione dinamica. Giungiamo allora alla conclusione che **affinchè una legge naturale sia simmetrica rispetto ad una certa trasformazione è necessario che sia covariante rispetto a quella trasformazione e che quindi venga scritta attraverso le rappresentazioni irriducibili del gruppo di trasformazioni stesso.**

Le trasformazioni in meccanica quantistica

Riassumiamo quanto fatto nelle pagine precedenti

- si sono definite certe trasformazioni sui parametri delle particelle (abbiamo considerato, per ora, solo alcune trasformazioni spaziotemporali);
- si è verificato l'effetto di tali trasformazioni sui vettori tridimensionali (che sono gli enti che descrivono il sistema ed attraverso i quali vengono formulate le leggi dinamiche);
- note le leggi dinamiche, si è analizzato il comportamento di tali leggi rispetto alle trasformazioni e si sono trovate le simmetrie cui queste soddisfano;

già si è osservato che per quanto riguarda quest'ultimo punto si potrebbe procedere anche in senso inverso ovvero

- note le simmetrie, si costruiscono le leggi dinamiche in modo che siano simmetriche rispetto alle corrispondenti trasformazioni (si sfrutta il principio di covarianza).

Questo modo di procedere è di validità generale e può essere applicato a qualunque sistema fisico. Nel fare questo bisogna però tenere conto che nel caso di un sistema fisico diverso da quello meccanico gli stati non sono più descritti da vettori tridimensionali ma da altri enti.

Nel caso dei sistemi di particelle, ad esempio, lo stato è descritto da una funzione d'onda (operatore di campo) per cui si dovrà iniziare con **il verificare l'effetto delle trasformazioni sulla funzione d'onda**. Le trasformazioni che considereremo sono

- quelle che operano sulle coordinate spazio-temporali delle particelle e sono quindi trasformazioni a carico del sistema di riferimento;
- quelle che operano sulle coordinate interne delle particelle e sono quindi trasformazioni di certe loro proprietà intrinseche (es. la carica elettrica).

Tra le trasformazioni della prima classe qui considereremo le trasformazioni di *Parità Spaziale* ed *Inversione Temporale*, tra quelle della seconda classe la *Coniugazione di Carica*.

La trasformazione di parità

□ Il concetto di parità intrinseca di una particella

Già abbiamo detto che la trasformazione di Parità Spaziale è una trasformazione a carico del sistema di riferimento consistente nella inversione simultanea del verso dei suoi assi cartesiani (equivalente al passaggio da una terna destrorsa ad una sinistrorsa e viceversa). L'effetto di tale trasformazione sui vettori tridimensionali è il seguente

$$P\vec{r} = -\vec{r}$$

Richiamiamo ora l'espressione della **funzione d'onda di una particella con spin**

$$\psi(\vec{r}, s, s_z) \equiv \varphi(\vec{r})\chi(s, s_z)$$

e domandiamoci quale sia l'effetto della trasformazione di parità su tale funzione d'onda. Nel caso di una rotazione del sistema d'assi, ad esempio, dovremmo attenderci un duplice effetto sulla funzione d'onda: i) un cambio del punto in cui questa viene calcolata; ii) una ricombinazione lineare delle diverse componenti della funzione d'onda per cui scriveremmo

$$R\psi(\vec{r}, s, s_z) = \psi'(\vec{r}', s, s_z)$$

dove l'apice indica proprio la ricombinazione lineare delle componenti della funzione d'onda. Ora, sulla base di queste considerazioni, nel caso di una trasformazione di parità ci attendiamo: i) un cambio del punto in cui questa viene calcolata; ii) nessuna ricombinazione delle diverse componenti della funzione d'onda poiché gli assi del riferimento rimangono paralleli a stessi. Al più potrà esserci una moltiplicazione di tutte le componenti per un numero η , in generale complesso, che chiameremo **parità intrinseca**

$$P\psi(\vec{r}, s, s_z) = \eta \psi(-\vec{r}, s, s_z)$$

Il numero η è soggetto ad un vincolo che va discusso con attenzione. Se eseguiamo una seconda volta l'operazione di inversione degli assi otteniamo

$$P^2 \psi(\vec{r}, s, s_z) = \eta^2 \psi(\vec{r}, s, s_z)$$

sembrerebbe naturale pensare che, poiché una doppia inversione degli assi riporta il riferimento nella posizione originaria, si possa porre semplicemente $P^2=I$ e quindi $\eta^2=1$. Questa affermazione è corretta solo in parte e per capirlo dobbiamo richiamare certe proprietà dello spin che forse non sono note.

Quando si esegue una rotazione degli assi la funzione d'onda subisce, come già accennato, una trasformazione consistente i) nella modifica del punto in cui deve essere calcolata; ii) in un ricombinazione delle sue componenti ovvero delle sue componenti di spin. Entrambi questi effetti devono ovviamente dipendere dall'angolo di rotazione. Tralasciando il primo effetto che è evidentemente a carico della parte orbitale della funzione d'onda, possiamo affermare che, poiché lo spazio dello spin ha dimensione $2s+1$, il secondo effetto deve essere rappresentato da una matrice quadrata di ordine $2s+1$. Tali matrici possono essere calcolate senza eccessive difficoltà e vengono dette matrici D . Nel caso di spin $s=1/2$ la matrice D è di ordine 2, agisce su vettori complessi a 2 componenti detti spinori, ed ha la seguente espressione

$$D(R(\vartheta\vec{n})) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta/2) & \sin(\vartheta/2) \\ -\sin(\vartheta/2) & \cos(\vartheta/2) \end{pmatrix}$$

dove ϑ è l'angolo di rotazione attorno all'asse individuato dal vettore \vec{n} .

Immaginiamo ora di eseguire una rotazione di un angolo $\vartheta=2\pi$ attorno all'asse z ad esempio. Le componenti di un generico spinore si trasformeranno nel modo seguente

$$-\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

giungiamo allora alla importante conclusione che ***in seguito ad una rotazione di un angolo $\vartheta=2\pi$ gli spinori non riassumono il loro valore iniziale ma invertono il loro segno.*** Dato che la rotazione di un angolo $\vartheta=2\pi$ riporta il sistema di riferimento nella sua posizione iniziale dobbiamo concludere che ***l'associazione di uno spinore $S=1/2$ ad uno stato fisico è intrinsecamente ambigua e definita a meno di un segno arbitrario.*** Questo aspetto è spesso riferito affermando che le rappresentazioni spinoriali del gruppo delle rotazioni sono a valore doppio. Senza dimostrarlo diremo che questo stesso problema si presenta non solo nel caso dello spin $S=1/2$ ma per ogni altro spin semintero mentre non si presenta nel caso di spin nullo o intero. Giungiamo allora all'importante risultato che **nel caso dei fermioni, l'associazione di uno spinore ad uno stato fisico è definita a meno di un segno arbitrario.**

Ritorniamo ora alla trasformazione di parità. Come abbiamo visto l'applicazione ripetuta della trasformazione di parità opera sulla funzione d'onda nel modo seguente

$$P^2 \psi(\vec{r}, s, s_z) = \eta^2 \psi(\vec{r}, s, s_z)$$

nel caso dei bosoni (spin nullo o intero) non esiste alcuna ambiguità nell'associazione tra stato fisico e spinore per cui si deve avere

$$P^2 \psi(\vec{r}, s, s_z) = \eta^2 \psi(\vec{r}, s, s_z) = \psi(\vec{r}, s, s_z)$$

da cui consegue che la parità intrinseca può assumere i valori

$$\eta = \pm 1$$

Nel caso dei fermioni (spin semintero) esiste una ambiguità nell'associazione tra stato fisico e spinore per cui si può avere

$$P^2 \psi(\vec{r}, s, s_z) = \eta^2 \psi(\vec{r}, s, s_z) = \pm \psi(\vec{r}, s, s_z)$$

da cui conseguono le seguenti opzioni per la parità intrinseca

$$\text{se } P^2 = 1 \quad \eta = \pm 1 \quad \text{se } P^2 = -1 \quad \eta = \pm i$$

Sviluppando **la teoria relativistica degli spinori (equazione di Dirac)** si può mostrare che è opportuno assumere la **seconda opzione** per cui, nel caso degli spinori si ha

$$\eta = \pm i$$

Riassumendo perveniamo allora al seguente risultato generale: **quando si esegue una inversione degli assi la funzione d'onda si trasforma nel modo seguente**

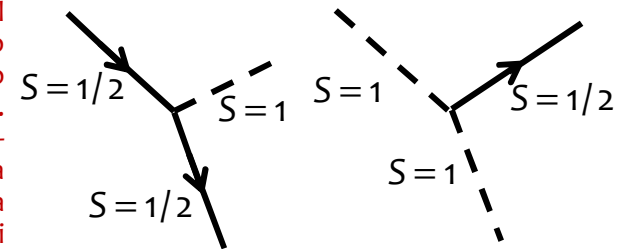
$$P\psi(\vec{r}, s, s_z) = \eta \psi(-\vec{r}, s, s_z) \quad \begin{cases} \text{Bosoni} & \eta = \pm 1 \\ \text{Fermioni} & \eta = \pm i \end{cases}$$

dove η viene detta parità intrinseca.

In relazione a queste considerazioni si pone il problema di **stabilire se gli stati fisicamente osservati, le particelle esistenti in natura, abbiano parità intrinseca definita oppure no e, nel primo caso, se la parità intrinseca sia positiva oppure negativa.** Il quesito è ben posto solo nel caso dei bosoni; perché?

Per capirlo dobbiamo richiamare una sostanziale differenza tra bosoni e fermioni. Immaginiamo un tipico processo elettromagnetico nel corso del quale un elettrone emette un fotone. Il processo avviene in accordo con la conservazione del momento angolare totale.

Notiamo che il processo complementare, invece, viola la conservazione del momento angolare e come tale non è possibile. È facile convincersi che questo fatto è del tutto generale per cui esistono processi naturali capaci di produrre un solo bosone mentre non esistono processi naturali capaci di produrre un solo fermione. Questi ultimi vengono di regola prodotti in coppie, tipicamente coppie fermione-antifermione. Questo fatto, connesso in ultima analisi allo spin, fa sì che sia fisicamente osservabile la parità intrinseca di un singolo bosone oppure di una coppia fermione-antifermione, mentre non sia in nessun modo osservabile quella di un singolo fermione.



Premesso che **dalla Equazione di Dirac discende che la parità intrinseca di una coppia fermione-antifermione (data dal prodotto delle parità intrinseche delle due particelle) è negativa**

$$\eta_f \eta_{\bar{f}} = -1$$

possiamo allora riassumere queste considerazioni affermando che **la parità intrinseca di un bosone è fisicamente osservabile; la parità intrinseca di un fermione non è fisicamente osservabile; la parità intrinseca di una coppia fermione-antifermione è osservabile e sempre negativa.**

Dunque la parità intrinseca di un singolo fermione non è osservabile per cui o non si assegna ad essa alcun valore oppure se ne assegna uno sulla base di una convenzione che non avrà alcuna conseguenza fisicamente osservabile. La convenzione solitamente accettata afferma che **la parità intrinseca dei fermioni è positiva e quella degli antifermioni negativa. Tale convenzione ha il vantaggio di fornire la parità intrinseca fermione-antifermione, che è osservabile, di valore negativo in accordo con l'equazione di Dirac.**

La parità intrinseca dei bosoni, invece, è fisicamente osservabile per cui possiamo effettivamente domandarci se essa sia indefinita o definita e, in questo caso, se sia positiva o negativa. Per rispondere a questa domanda analizzeremo ancora una volta il caso della meccanica.

Anche nella meccanica classica dove ci si può chiedere se i vettori associati alle grandezze fisiche siano vettori veri (parità negativa) pseudovettori (parità positiva) oppure vettori con parità non definita (ad esempio la somma di vettori veri e pseudovettori). Si noterà che in meccanica non esistono grandezze vettoriali con parità non definita e che tutte le grandezze fisiche sono rappresentate o da vettori veri o da pseudovettori, in ogni caso da vettori con parità definita. Perché? Il motivo è che le leggi dinamiche dei processi meccanici sono invarianti per trasformazione di parità ovvero non sono in grado di modificare la parità il che significa che la parità iniziale di una certa grandezza fisica non viene modificata nel corso del processo per cui le grandezze di parità differente si trasformano in modo indipendente e non sussiste la necessità di introdurre grandezze di parità non definita.

In modo analogo per sapere se le particelle esistenti in natura abbiano o non abbiano una parità definita dobbiamo domandarci se le interazioni naturali cui queste sono soggette siano o non siano capaci di modificare la parità ovvero se, come si dice, le interazioni naturali conservino o non conservino la parità. Ora la fenomenologia accumulata sulle interazioni naturali conferma **che le interazioni elettromagnetiche e forti conservano la parità mentre le interazioni deboli non la conservano**. Dunque dobbiamo attenderci che **i bosoni 'associati' alle interazioni forti ed elettromagnetiche abbiano una parità definita** (vale adire generati da un campo di forza forte o elettromagnetico o attraverso la formazione di un sistema legato retto dalla forza forte o elettromagnetica) mentre **i bosoni associati alla interazione debole non abbiano una parità definita** (in questo caso non si conoscono stati legati e l'unica possibilità è che siano generati dal campo di forza debole).

Dato che l'interazione elettromagnetica e forte conservano la parità, è assai utile conoscere le parità intrinseche delle particelle in modo da potere subito sapere se certi processi elettromagnetici o forti siano possibili oppure vietati. Per questo **la parità intrinseca di una particella, al pari dello spin, è un numero quantico molto importante e spesso lo si trova riportato ad esponente con la seguente notazione**

$$J^P$$

dove J è lo spin della particella se è puntiforme o il momento angolare complessivo se è composta mentre $P = \pm 1$ è la parità intrinseca (si ricordi che fermioni ed antifermioni hanno una parità convenzionale +1 e -1 rispettivamente).

□ La parità intrinseca del fotone

Solo i bosoni hanno una parità intrinseca osservabile. I bosoni fondamentali nel MS sono i quanti delle interazioni naturali descritte da teorie di campo quantistiche per cui considerazioni sulla parità intrinseca dei bosoni richiedono di fatto considerazioni basate su concetti avanzati. L'unica di queste interazioni che possiede anche una descrizione macroscopica è quella elettromagnetica per cui possiamo pensare di dedurre la parità intrinseca del fotone attraverso considerazioni sulle equazioni di Maxwell.

Dato che il fotone è il quanto del campo elettromagnetico possiamo assumere che le loro parità intrinseche siano le stesse. Dato poi che la struttura del campo elettromagnetico è descritta dai vettori campo elettrico e campo magnetico e dato che questi possono essere calcolati a partire dal potenziale vettore per mezzo delle seguenti equazioni

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \qquad \vec{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

possiamo allora concludere che la parità intrinseca del potenziale vettore e, quindi, del fotone siano le stesse. Qual è allora la parità intrinseca del potenziale vettore? Ragioniamo come segue. Il campo elettrico è un vettore vero per cui si deve avere

$$P\vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{E}(-\vec{r}, t)$$

Ma allora devono essere vettori veri tutti e due i termini che compongono il campo elettrico ed in particolare il secondo per cui si deve avere anche

$$P\vec{A}(\vec{r}, t) = -\vec{A}(-\vec{r}, t)$$

da cui discende che ***il potenziale vettore e quindi il fotone hanno parità intrinseca negativa***. Ricordando poi che lo spin del fotone è unitario lo troveremo indicato con la notazione $J^P=1^-$.

Sulla base della cromodinamica si ottiene un risultato equivalente per i gluoni mentre per quanto riguarda i mediatori della interazione debole questi non hanno parità intrinseca definita poiché, come vedremo, le interazioni deboli non conservano la parità.

□ Parità orbitale

L'espressione che definisce la trasformazione di parità della funzione d'onda, sia che si tratti di fermioni che di bosoni, ci fa comprendere che, nel caso più generale, la funzione d'onda non ha un comportamento definito rispetto alla trasformazione di parità. Infatti da

$$P\psi(\vec{r}, s, s_z) = \eta \psi(-\vec{r}, s, s_z)$$

si vede chiaramente che se $\psi(\vec{r}, s, s_z) \neq \psi(-\vec{r}, s, s_z)$ la funzione d'onda non è un autostato della parità. Può accadere però che la funzione d'onda abbia proprietà di simmetria tali da soddisfare la relazione $\psi(-\vec{r}, s, s_z) = \eta_{orb} \psi(\vec{r}, s, s_z)$ dove η_{orb} viene detta parità orbitale e deve evidentemente deve soddisfare la condizione $\eta_{orb} \eta_{orb} = 1$. Si avrà allora

$$P\psi(\vec{r}, s, s_z) = \eta \eta_{orb} \psi(\vec{r}, s, s_z)$$

In questo caso la trasformazione di parità ha un esito definito e la funzione d'onda è un'autofunzione dell'operatore parità con autovalori uguali al prodotto della parità intrinseca ed orbitale. Giungiamo allora alla conclusione che nel caso in cui la funzione d'onda abbia una parità definita (sia autofunzione dell'operatore parità) questa può assumere i valori dati dal prodotto della parità intrinseca ed orbitale.

Un caso ben noto, nel quale la funzione d'onda ha proprietà di simmetria tali da soddisfare una relazione come quelle soprascritta, si realizza quando **la sua parte orbitale rappresenta uno stato di momento angolare orbitale definito** ovvero è autofunzione dell'operatore momento angolare. Si ha allora che

$$\psi(\vec{r}, s, s_z) = \varphi(\vec{r}) \chi(s, s_z) = \varphi_{n,L,m}(\vec{r}) \chi(s, s_z) = R_{n,L}(r) Y_{L,m}(\vartheta, \varphi) \chi(s, s_z)$$

Tenendo presente che in coordinate sferiche l'inversione degli assi si realizza per mezzo delle trasformazioni di coordinate

$$r \rightarrow r \quad \vartheta \rightarrow \pi - \vartheta \quad \varphi \rightarrow \varphi + \pi$$

e che le autofunzioni del momento angolare (armoniche sferiche) hanno la seguente nota proprietà

$$Y_{L,m}(\pi - \vartheta, \varphi + \pi) = (-1)^L Y_{L,m}(\vartheta, \varphi)$$

otteniamo

$$\psi(-\vec{r}, s, s_z) = R_{n,L}(r) Y_{L,m}(\pi - \vartheta, \varphi + \pi) \chi(s, s_z) = (-1)^L R_{n,L}(r) Y_{L,m}(\vartheta, \varphi) \chi(s, s_z) = (-1)^L \psi(\vec{r}, s, s_z)$$

la quale fornisce il risultato che uno stato di momento angolare orbitale definito di valore L possiede una parità orbitale data dalla espressione

$$\eta_{orb} = (-1)^L$$

da cui consegue anche il risultato più generale che uno stato di momento angolare definito L ha una parità definita data dal prodotto della parità intrinseca ed orbitale e dunque dalla espressione

$$P \psi_L(\vec{r}, s, s_z) = \eta(-1)^L \psi_L(\vec{r}, s, s_z)$$

□ Parità di uno stato di due particelle differenti con momento angolare definito

Abbiamo visto che gli stati a singola particella con momento angolare definito hanno anche una parità definita che si calcola con una semplice regola. Cosa possiamo dire degli stati a due o più particelle con momento angolare definito? La parità è definita? Come si calcola?

Si può mostrare in modo semplice che la parità intrinseca è una proprietà moltiplicativa per cui abbiamo, usando la solita notazione,

$$P \psi(1,2) = \eta_1 \eta_2 \psi(1,2)$$

In generale lo stato delle due particelle non ha un momento angolare definito e l'espressione data non può essere ulteriormente sviluppata. Se accade invece che il **momento angolare totale sia definito**, possiamo sfruttare il fatto che nel riferimento del centro di massa il momento angolare totale delle due particelle si può esprimere in funzione della loro massa ridotta e della posizione e velocità relative $\vec{L} = \mu \vec{r}_{21} \times \vec{v}_{21}$. Questo significa che **uno stato di momento angolare definito del sistema può essere espresso per mezzo delle autofunzioni del momento angolare della singola particella purché essa assuma il significato di momento angolare relativo**. Abbiamo allora, sfruttando le note proprietà d'inversione delle armoniche sferiche,

$$\begin{aligned} P \psi(1,2) &= P \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \chi_{S_1 S_{1z}}, \chi_{S_2 S_{2z}}) = \eta_1 \eta_2 \psi(-\vec{r}_1, -\vec{r}_2, \chi_{S_1 S_{1z}}, \chi_{S_2 S_{2z}}) = \\ &= \eta_1 \eta_2 \psi_{L,M}(-\vec{r}_{12}) \chi_{S_1 S_{1z}} \chi_{S_2 S_{2z}} = \\ &= \eta_1 \eta_2 (-1)^L \psi_{L,M}(\vec{r}_{12}) \chi_{S_1 S_{1z}} \chi_{S_2 S_{2z}} = \\ &= \eta_1 \eta_2 (-1)^L \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \chi_{S_1 S_{1z}}, \chi_{S_2 S_{2z}}) = \psi(1,2) \end{aligned}$$

da cui si deduce che **la parità spaziale di due particelle in uno stato di momento angolare definito L** è dato dalla espressione

$$P \psi(1,2) = \eta_1 \eta_2 (-1)^L \psi(1,2)$$

□ Parità di uno stato di due particelle identiche con momento angolare definito

Se le due particelle sono identiche, la formula precedente conduce al seguente autovalore della parità complessiva

$$P \psi(1,2) = \eta_1 \eta_2 (-1)^L \psi(1,2) = \eta^2 (-1)^L \psi(1,2) = (-1)^L \psi(1,2)$$

La formula è corretta ma bisogna ricordare che nel caso di particelle identiche gli stati sono soggetti a limitazioni aggiuntive derivanti dal **teorema spin-statistica** il quale richiede che **lo stato di un sistema di due bosoni o di due fermioni identici siano rispettivamente simmetrico e antisimmetrico rispetto allo scambio delle particelle**

$$\psi(1,2) = \pm \psi(2,1)$$

Se lo stato di momento angolare è definito, dalle proprietà di simmetria della funzione d'onda otteniamo la relazione

$$\begin{aligned} \psi(1,2) &= \psi(\vec{r}_1, s_1, s_{1z}, \vec{r}_2, s_2, s_{2z}) = \psi_{L,M}(\vec{r}_{12}) \chi(s_1, s_{1z}) \chi(s_2, s_{2z}) = \\ &= (-1)^L \psi_{L,M}(\vec{r}_{21}) (-1)^{s-s_1-s_2} \chi(s_2, s_{2z}) \chi(s_1, s_{1z}) = \\ &= (-1)^{L+s-s_1-s_2} \psi_{L,M}(\vec{r}_{21}) \chi(s_2, s_{2z}) \chi(s_1, s_{1z}) = (-1)^{L+s-s_1-s_2} \psi(1,2) \end{aligned}$$

dalla quale risulta che il teorema spin-statistica è soddisfatto solo se valgono le seguenti limitazioni dette **regole di selezione**

$$\begin{cases} \text{bosoni} & \rightarrow (-1)^{L+s-s_1-s_2} = +1 & L + s - s_1 - s_2 = \text{pari} \\ \text{fermioni} & \rightarrow (-1)^{L+s-s_1-s_2} = -1 & L + s - s_1 - s_2 = \text{dispari} \end{cases}$$

Esempi : nel caso di bosoni identici con spin nullo tale regola richiede **L** pari e quindi **$\eta=+1$** . Nel caso di fermioni identici di spin **$s_1=s_2=1/2$** e spin totale **$s=0$** si ha che **L** pari e **$\eta=1$** mentre se **$s=1$** si ha **L** dispari e **$\eta=-1$** .

Coniugazione di carica

Come accennato la teoria quantistica dei campi prevede che ad ogni particella sia associata una corrispondente antiparticella del tutto identica sotto il profilo delle proprietà spazio-temporali (stessa massa e spin) e che si differenzia solo dal punto di vista delle cariche interne (carica elettrica, carica leptonica, ...) che risultano sistematicamente invertite. La generalità di questa corrispondenza rende utile l'introduzione di una nuova trasformazione detta **coniugazione di carica**, una **trasformazione che inverte le cariche interne di ogni particella (non solo quella elettrica!)** trasformando ogni particella del sistema nella rispettiva antiparticella.

Si tratta evidentemente di una trasformazione la quale, diversamente da quelle considerate fino ad ora, non è di natura spazio-temporale ma opera sulle proprietà interne delle particelle. Utilizzando la solita notazione nella quale aggiungiamo però le cariche interne abbiamo la seguente definizione **dell'operatore coniugazione di carica**

$$\hat{C}\psi(\vec{r}, s, s_z, q_a, q_b, \dots) = \eta_c \psi(\vec{r}, s, s_z, -q_a, -q_b, \dots)$$

dove il numero η_c viene detto **parità di carica** (l'operazione è in un certo senso analoga ad una trasformazione di parità in un ipotetico spazio interno associato alle particelle sui cui assi coordinati stanno tutte le loro cariche).

Affinché uno stato sia autostato dell'operatore coniugazione di carica, ovvero abbia una **coniugazione di carica definita**, è necessario che si abbia (si noti che in questo caso l'autovalore della coniugazione di carica coincide con la parità di carica)

$$\hat{C}\psi(\vec{r}, s, s_z, q_a, q_b, \dots) = \eta_c \psi(\vec{r}, s, s_z, -q_a, -q_b, \dots) = \eta_c \psi(\vec{r}, s, s_z, q_a, q_b, \dots)$$

condizione che può essere soddisfatta nel solo caso in cui particella e antiparticella coincidano ovvero nel caso in cui tutte le cariche interne della particella siano nulle (nel caso di uno stato composto le cariche interne sono la somma delle cariche delle particelle componenti). Quando questo accade si dice che la particella o il sistema di particelle è **realmente neutro**. Dunque **solo le particelle o i sistemi di particelle realmente neutri hanno coniugazione di carica definita**.

E' chiaro che **la reale neutralità è una condizione molto più stringente della neutralità elettrica** in quanto la reale neutralità implica la neutralità di tutte le cariche interne mentre la neutralità elettrica implica la neutralità della sola carica elettrica (Es: un **atomo d'idrogeno** è elettricamente neutro ma non è realmente neutro. Infatti la coniugazione di carica trasforma tale atomo in uno stato legato positone-antiprotone anch'esso elettricamente neutro ma certamente diverso dall'atomo originario dal punto di vista della carica leptonica e barionica).

Poiché l'applicazione ripetuta di questo operatore sullo stato deve fornire l'operatore identità otteniamo

$$\hat{C}^2 \psi(\vec{r}, s, s_z, q_a, q_b, \dots) = \eta_c \hat{C} \psi(\vec{r}, s, s_z, -q_a, -q_b, \dots) = \eta_c^2 \psi(\vec{r}, s, s_z, q_a, q_b, \dots) = 1 \psi(\vec{r}, s, s_z, q_a, q_b, \dots)$$

da cui otteniamo che **la parità di carica di una particella, quando è definita, può assumere i valori +1 e -1**

$$\eta_c = \pm 1$$

In modo analogo a quanto visto per la parità spaziale si pone il problema di sapere se gli stati fisicamente osservati ovvero le particelle esistenti in natura abbiano coniugazione di carica definita o indefinita e, nel primo caso, se sia positiva o negativa. La risposta può essere trovata ragionando nello stesso modo: **se la particella viene prodotta nel corso di un processo, oppure è il risultato di uno stato legato, entrambi retti da una interazione che conserva la coniugazione di carica allora gli stati fisicamente osservati avranno coniugazione definita positiva o negativa. Se invece l'interazione non conserva la coniugazione di carica allora allora gli stati fisici non avranno una coniugazione di carica definita.**

E' bene allora sottolineare che tutti i test fino ad ora condotti hanno mostrato che **le interazioni elettromagnetiche e forti conservano la coniugazione di carica** mentre **le interazioni deboli violano la coniugazione di carica.**

La coniugazione di carica di una particella quando è definita è dunque un importante numero quantico solitamente riportato ad esponente a fianco della parità intrinseca secondo la notazione già vista

$$J^{PC}$$

□ La coniugazione di carica del fotone

Come abbiamo detto le particelle elementari che possono avere coniugazione di carica definita sono quelle realmente neutre cioè prive di cariche interne. Dunque ne i leptoni (vedremo nemmeno i neutrini) ne i quark. Tra i mediatori delle interazioni dobbiamo escludere i W e Z che non sono autostati ne di P ne di C ed i gluoni che, come vedremo, hanno carica interna. Rimane il fotone!

Possiamo tentare di dedurre la coniugazione di carica del fotone ragionando sul campo elettromagnetico in modo analogo a quanto fatto nel caso della trasformazione di parità. Dato un sistema di cariche elettriche in reciproca interazione queste emetteranno campi elettromagnetici. Invertendo i segni delle cariche elettriche si invertiranno i segni delle cariche e delle correnti del sistema e con esse dei campi elettrici, magnetici e del potenziale vettore. Dobbiamo allora concludere che la coniugazione di carica ha l'effetto di moltiplicare per (-1) il campo elettromagnetico da cui deduciamo che (si vedano le considerazioni fatte nel caso della parità del fotone) la coniugazione di carica del fotone vale -1 ($J^{PC}=1^{-}$).

□ Coniugazione di carica di una coppia fermione-antifermione

Solo i sistemi realmente neutri hanno coniugazione di carica definita. Nel caso di un sistema di due particelle ci sono solo due modi per formare un sistema realmente neutro:

- con due particelle realmente neutre. In questo caso la coniugazione di carica dello stato complessivo è il semplice prodotto delle coniugazioni di carica delle singole particelle;
- con due particelle che siano l'una l'antiparticella dell'altra ovvero con un sistema particella-antiparticella. In questo caso l'autovalore della coniugazione di carica è determinato, come vedremo, dalla proprietà della funzione d'onda rispetto allo scambio delle particelle. Un punto assolutamente essenziale da sottolineare è che tali proprietà di scambio sono determinate anche dal teorema spin-statistica dato che, come diremo tra poco, anche **un sistema particella antiparticella deve essere riguardato come un sistema di due particelle identiche.**

A prima vista un elettrone ed un positrone o qualunque altra coppia fermione-antifermione parrebbero particelle ben distinguibili e dunque non identiche. Tuttavia dobbiamo osservare che una particella e la corrispondente antiparticella hanno uguale massa, uguale spin (stesse proprietà spaziotemporali) e differenti numeri quantici interni per cui risultano distinguibili solo dal punto di vista di questi ultimi.

Se pensiamo *i numeri quantici interni come numeri quantici associati a stati in uno spazio interno del tutto analogo allo spazio fisico* siamo indotti a pensare all'elettrone ed al positrone e più in generale ad una ***coppia particella antiparticella come a stati differenti della stessa particella***. Questa idea risale ad alcuni lavori poco noti di Majorana ed ad altri, ben più noti, di Heisenberg (1932) più o meno contemporanei, ed è confermata dagli esperimenti. Questo significa che ***una coppia particella antiparticella deve essere trattata come una coppia di particelle identiche che si trovano in un differente stato interno e quindi soggetta alle limitazioni del teorema spin statistica per le particelle identiche (teorema spin statistica esteso)***. Stando così le cose dobbiamo allora richiedere che il sistema fermione-antifermione sia descritto da una funzione d'onda antisimmetrica rispetto allo scambio delle particelle

$$\psi(1,2) = -\psi(2,1)$$

Possiamo ora iniziare il calcolo dell'autovalore dell'operatore coniugazione di carica del sistema fermione-antifermione

$$\begin{aligned} \hat{C}\psi(1,2) &= \hat{C}\psi(\vec{r}_1, s_1, s_{1z}, q_1; \vec{r}_2, s_2, s_{2z}, q_2) = \eta_c \eta_c \psi(\vec{r}_1, s_1, s_{1z}, q_2; \vec{r}_2, s_2, s_{2z}, q_1) = \\ &= \psi(\vec{r}_1, s_1, s_{1z}, q_2; \vec{r}_2, s_2, s_{2z}, q_1) = \\ &= (-1)^L (-1)^{s-s_1-s_2} \psi(\vec{r}_2, s_2, s_{2z}, q_2; \vec{r}_1, s_1, s_{1z}, q_1) = \\ &= (-1)^L (-1)^{s-s_1-s_2} \psi(2,1) = \\ &= (-1)^L (-1)^{s-s_1-s_2} (-1) \psi(1,2) \end{aligned}$$

dove, nella prima riga si è tenuto conto che le parità di carica delle due particelle sono le stesse, dato che le particelle sono identiche, per cui il prodotto delle parità di carica vale necessariamente +1. Nell'ultima riga, invece, si è tenuto conto del teorema spin-statistica esteso.

Abbiamo allora il seguente risultato che afferma che un sistema fermione-antifermione in uno stato di momento angolare definito ha una coniugazione di carica definita dalla equazione

$$\hat{C}\psi(1,2) = (-1)^{L+s-s_1-s_2+1} \psi(1,2)$$

Esempio: Nel caso di una coppia elettrone positrone si ha fermioni di spin $s=1/2$ otteniamo $\eta_c = (-1)^{L+s}$

Le 'rotazioni' negli spazi interni, i gruppi unitari SU(N)

Nelle pagine che precedono abbiamo analizzato, con un certo dettaglio, le trasformazioni a carico essenzialmente delle variabili spazio-temporali ed il loro effetto sulla funzione d'onda mentre l'unica trasformazione a carico delle variabili interne, fino ad ora considerata, è la coniugazione di carica. E' naturale domandarsi se valga la pena considerare, nel caso delle variabili interne, anche altri tipi di trasformazione come ad esempio le rotazioni. Per quanto detto in precedenza si capisce che la risposta dipende, in ultima analisi, dalle proprietà delle interazioni naturali.

Come avremo modo di mostrare, ***esistono proprietà delle interazioni naturali che è possibile mettere nella forma di proprietà d'invarianza della dinamica rispetto a 'rotazioni' in uno spazio complesso interno associato alle particelle.*** Questa modo di rappresentare le proprietà delle interazioni risulta particolarmente vantaggioso poiché le simmetrie conducono ad altrettante ***leggi di conservazione*** (nella teoria dei campi attraverso il teorema di Noether) che permettono una analisi 'globale' dei processi indipendente dai dettagli della dinamica (come già detto in precedenza, l'invarianza delle leggi meccaniche rispetto alla rotazione della terna d'assi conduce alla conservazione del momento angolare nei processi meccanici che permette una analisi 'globale' della evoluzione del sistema indipendente dai

dettagli delle forze in gioco).

Anticipando allora alcuni temi che svilupperemo nel seguito, diremo che, in molti casi, per descrivere certe proprietà delle interazioni naturali

- risulta necessario introdurre un certo numero di ***cariche e numeri quantici interni definiti in spazi complessi di N dimensioni;***
- che tali proprietà si traducono nella invarianza della dinamica ***rispetto a trasformazioni lineari unitarie e unimodulari in questi spazi*** ovvero rispetto a trasformazioni appartenenti ai ***gruppi unitari SU(N).***

Questo stato di cose fa dei gruppi unitari un ***concetto trasversale*** capace di descrivere, all'interno dello stesso formalismo, concetti fisici di natura assai differente (qualche cosa di analogo alla equazione delle onde che intervengono, con le stesse proprietà matematiche, nella descrizione di fenomeni di natura fisica assai diversa) come dimostra anche la loro continua ricorrenza nel corso della storia della fisica delle particelle.

NOTA : Storicamente, si usò per la prima volta un gruppo unitario, in particolare **il gruppo SU(2)**, nella descrizione matematica del concetto di **spin**. Già W.R. Hamilton, introducendo nel 1843 il concetto di quaternione, si era accorto che era possibile stabilire una precisa corrispondenza tra le rotazioni nello spazio ordinario tridimensionale (il gruppo di trasformazioni SO(3)) e le trasformazioni unitarie unimodulari nello spazio complesso bidimensionale (il gruppo SU(2)). Questa corrispondenza, essenziale nella costruzione del concetto di spin, viene affermata nella teoria dei gruppi dicendo che **SU(2) realizza un ricoprimento universale del gruppo SO(3)**.

Pochi anni dopo ci si rese conto che queste trasformazioni erano utili anche **indipendentemente dalla loro relazione con le rotazioni tridimensionali**. Infatti, per descrivere certe proprietà della interazione forte tra protoni e neutroni, Majorana ed Heisenberg introdussero il concetto di 'rotazioni' in uno spazio interno, complesso e bidimensionale delle particelle equivalenti a trasformazioni di **SU(2)**. Tale spazio è legato alla esistenza di un nuovo grado di libertà interno del protone e del neutrone che, a causa della formale analogia con quello dello spin, qualche anno dopo Wigner chiamerà **isospin**.

Nel 1954 **Yang e Mills**, nella convinzione che l'elettromagnetismo dovesse essere il modello generale di tutte le interazioni naturali, ne proposero una estensione basata sul **gruppo unitario SU(N)** creando quella classe di teorie di campo note con il nome di **teorie di gauge**. Quando ci si rese conto, negli anni '60, che il concetto di **rottura spontanea della simmetria** poteva conferire una massa ai mediatori di una interazione di gauge, si comprese che **l'interazione debole poteva essere descritta per mezzo di una teoria di Yang e Mills basata sui gruppi U(1) ed SU(2) associati alla carica elettrica e all'isospin debole (teoria elettrodebole)**.

Analogamente, quando si scoprì che queste teorie potevano dare luogo al fenomeno della **libertà asintotica** (che tra le altre cose forniva una base teorica alla evidenza sperimentale del confinamento dei quark), si costruì una **teoria delle interazioni forti nella forma di una teoria di Yang e Mills basata sul gruppo SU(3) di colore (cromodinamica quantistica)**.

Nel frattempo, nel 1964, l'analisi dello spettro degli adroni condusse G. Zweig e M. Gell-Mann a formulare il concetto di quark e ad introdurre una simmetria approssimata basata sul gruppo **SU(3) di sapore**.

Per chiarire la logica con cui procederemo, è utile richiamare il modo in cui Heisenberg e Majorana pensarono di trattare alcune proprietà della interazione forte.

Da poco gli esperimenti di E. Rutherford avevano rivelato che il nucleo era una struttura eccezionalmente compatta formata da protoni e neutroni. Dato che i protoni erano soggetti ad una intensa forza elettrostatica repulsiva, era evidente che all'interno del nucleo operava una forza attrattiva ancora più intensa di quella elettromagnetica. Nonostante questo fosse quasi tutto ciò che allora si sapeva sulla **interazione forte** Heisenberg fece alcune osservazioni che si riveleranno cruciali.

In primo luogo osservò che il neutrone ed il protone, avevano sì una diversa carica elettrica, ma avevano (approssimativamente) la stessa massa, lo stesso spin (lo aggiungiamo noi!) ed inoltre, all'interno del nucleo, si attraevano con la stessa forza (fu una sua ipotesi!) il che indicava che dovevano possedere la stessa 'carica forte'. Questo stato di cose suggeriva che l'eventuale scambio della carica elettrica tra protone e neutrone non dovesse alterare l'assetto del loro stato legato, per cui, si offriva la possibilità di correlare le proprietà di un certo nucleo con quelle di altri nuclei, ottenuti per mezzo del semplice scambio delle cariche.

Il passo successivo non poteva che essere quello di porre questi contenuti fisici in una forma compatibile con i principi generali della meccanica quantistica.

Il fatto che neutrone e protone avessero la stessa massa, lo stesso spin e differente carica elettrica, rendeva possibile interpretare la loro differenza semplicemente come una **diversa 'posizione' in un certo spazio interno associato alla carica elettrica**. Si introdusse allora un 'vettore' che poteva assumere la 'posizione' del neutrone e del protone e con esse, date le leggi della meccanica quantistica, anche tutte le

'posizioni intermedie' che dovevano essere interpretate come 'stati miscelati' di protone e neutrone.

Introdotta questa costruzione, il fatto fisico che il neutrone ed il protone possiedono la stessa 'carica forte', viene ad essere descritto dalla **indipendenza della interazione forte stessa dalla eventuale rotazione del vettore associato al protone-neutrone** (o, se si preferisce tenere i vettori fermi e ruotare i riferimenti, dalla indipendenza della interazione forte stessa dalla eventuale rotazione del riferimento nello spazio delle cariche) ovvero dalla **invarianza della interazione forte rispetto a trasformazioni unitarie ed unimodulari** (in meccanica quantistica la norma degli stati si deve conservare!) **nello spazio della carica elettrica** (dato che erano necessarie due locazioni per ospitare gli stati di neutrone e protone si tratta di uno spazio complesso bidimensionale e quindi di trasformazioni di $SU(2)$).

A questo punto, era anche chiaro che **per garantire questa proprietà delle interazioni forti** (cioè la loro indipendenza dalla eventuale rotazione del riferimento) **era necessario formulare gli stati fisici (gli autostati)** per mezzo di 'vettori' o, più in generale, 'tensori ridotti' formati attraverso prodotti tensoriali o equivalentemente **per mezzo delle cosiddette rappresentazioni irriducibili del gruppo di trasformazioni**.

Comprendiamo allora che: **1) dobbiamo introdurre un generico spazio complesso (per semplicità bidimensionale); 2) ipotizzare una certa trasformazione lineare (unitaria e unimodulare ovvero di $SU(2)$); 3) costruire le rappresentazioni irriducibili del gruppo di trasformazioni; 4) descrivere gli stati fisici della interazione per mezzo di tali rappresentazioni irriducibili**.

Il gruppo unitario SU(2)

Consideriamo le trasformazioni lineari unitarie nello spazio complesso bidimensionale realizzate dalla matrice R 2×2 **complessa, unitaria ed unimodulare**

$$1) \quad R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad R^\dagger R = 1 \quad \det(R) = 1$$

che opera su vettori complessi a due componenti che chiameremo **spinori**. In seguito ad una rotazione, uno spinore si trasformerà in accordo con la l'equazione

$$2) \quad x'_j = R_{jk} x_k$$

Dato però che le componenti degli spinori sono complesse, dobbiamo ora considerare una possibilità che era assente nel caso delle rotazioni nello spazio reale tridimensionale, vale a dire la legge di trasformazione dello spinore complesso coniugato

$$3) \quad x'_j{}^* = R_{jk}^* x_k^*$$

realizzata dalla matrice R^* che è diversa da R . Questo fatto mostra che gli spinori ed i loro complessi coniugati si trasformano con leggi differenti e pertanto devono essere considerati spinori di tipo differente. Giungiamo allora alla conclusione che **il gruppo SU(2) ammette due rappresentazioni fondamentali differenti** (è evidente che questo accade anche nel caso di un generico gruppo SU(N)). Precisando un poco il linguaggio indicheremo con 2 la rappresentazione fondamentale realizzata dagli spinori che si trasformano attraverso la matrice R e con 2^* la rappresentazioni fondamentale realizzata dagli spinori che si trasformano attraverso la matrice R^* . Dato che nel gruppo SU(2) esistono due rappresentazioni fondamentali, la 2 e 2^* , giungiamo anche alla conclusione che, attraverso il prodotto diadico, si possono comporre tensori di rango 2 di diverso tipo

$$2 \otimes 2 \quad 2 \otimes 2^* \quad 2^* \otimes 2^*$$

che si trasformano attraverso le matrici $R \otimes R$, $R \otimes R^*$, $R^* \otimes R^*$ rispettivamente.

Il metodo tensoriale offre la possibilità di costruire rappresentazioni del gruppo delle rotazioni con dimensionalità superiore a quella fondamentale. Seguendo questa strada, però, si costruiscono rappresentazioni che ammettono sottospazi invarianti e che devono esser ridotte sfruttando le proprietà del gruppo di trasformazioni (nel caso delle rotazioni nello spazio reale tridimensionali – vedi appendice - tali proprietà ammettono la riduzione per mezzo della simmetrizzazione, antisimmetrizzazione e annullamento della traccia. Nel caso delle trasformazioni unitarie la riduzione può essere secondo gli stessi principi generali fatte salve alcune improprietà differenze che discuteremo nella pagine seguenti).

□ **Tensori $2 \otimes 2$ ($2^* \otimes 2^*$).**

Consideriamo una coppia di spinori appartenenti alla rappresentazione fondamentale **2**

$$4) \quad x'_j = R_{jk} x_k \quad y'_j = R_{jk} y_k$$

Se ora eseguiamo il prodotto tensoriale dei due spinori

$$5) \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 \end{pmatrix}$$

otteniamo un **tensore di rango 2 del tipo $2 \otimes 2$ con 4 componenti indipendenti**. Tale tensore realizza una rappresentazione del gruppo delle rotazioni in campo complesso di dimensione **4** e si trasforma per rotazioni secondo la legge

$$6) \quad (x'_j y'_k) = R_{jp} R_{kq} (y_p x_q)$$

Il problema è ora stabilire se tale rappresentazione sia riducibile oppure no. Per capirlo riscriviamo la legge di trasformazione nel modo seguente

$$7) \quad (x'_j y'_k) = R_{jp} (x_p y_q) R_{qk}^T$$

che può essere facilmente posto in forma matriciale ponendo $\Omega_{jk} = x_j y_k$.

$$8) \quad \Omega' = R \Omega R^T$$

da cui si ottiene allora la **legge di trasformazione dei tensori $2 \otimes 2$** . Da questa espressione possiamo facilmente derivare la **legge di trasformazione del tensore $2 \otimes 2$ trasposto**

$$9) \quad \Omega'^T = (R \Omega R^T)^T = R^{TT} \Omega^T R^T = R \Omega^T R^T$$

che coincide con quella del tensore originario. Ora se immaginiamo Ω sia un **tensore $2 \otimes 2$ simmetrico** $\Omega^T = \Omega$ dalla 9) si ha

$$\Omega'^T = R \Omega^T R^T = R \Omega R^T = \Omega'$$

la quale mostra che sotto rotazioni **un tensore $2 \otimes 2$ simmetrico si trasforma in un tensore di rango 2 simmetrico** ovvero che **la simmetria di un tensore $2 \otimes 2$ è una proprietà invariante per rotazioni**. In modo assolutamente analogo si mostra anche che **l'antisimmetria di un tensore $2 \otimes 2$ è una proprietà invariante per rotazioni**.

Consideriamo ora la traccia (si ricordi che nel caso delle rotazioni in campo reale questa fornisce un'altra proprietà invariante). Eguagliando gli indici j e k dalla 6) otteniamo

$$12) \quad (x'_j y'_j) = R_{jp} R_{jq} (y_p x_q) = x_q R_{qj}^T R_{jp} y_p$$

che può essere messa nella seguente forma matriciale (qualora si indichino con le frecce gli spinori e non i vettori)

$$13) \quad \vec{x}' \cdot \vec{y}' = \vec{x} R^T R \vec{y}$$

Dalla 13) si vede immediatamente che affinché la traccia non venga modificata dalla rotazione è necessario che valga la relazione

$$R^T R = 1$$

che non può essere soddisfatta poiché, in campo complesso, la matrice R è unitaria e non ortogonale ($R^\dagger R = R^T R = 1$). Giungiamo allora alla conclusione che **la traccia di un tensore $2 \otimes 2$ non è invariante per rotazioni.**

Le considerazioni della pagina precedente chiariscono che **la riduzione di un tensore $2 \otimes 2$ deve essere realizzata attraverso le sole operazioni di simmetrizzazione e antisimmetrizzazione escludendo la sottrazione della traccia.** Abbiamo allora la seguente scomposizione

$$14) \quad \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 \end{pmatrix}^T \right] + \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 \end{pmatrix}^T \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2x_1 y_1 & x_1 y_2 + x_2 y_1 \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 & 2x_2 y_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

la quale mostra che **il tensore $2 \otimes 2$ a 4 componenti può essere scomposto in un tensore simmetrico a 3 componenti ed uno antisimmetrico ad 1 componente.** Tali tensori **sono irriducibili** per cui giungiamo alla seguente scomposizione delle rappresentazioni

$$15) \quad 2 \otimes 2 = 4 = 1 \oplus 3$$

□ **Tensori $2 \otimes 2^*$.**

Consideriamo due spinori appartenenti alla rappresentazione fondamentale 2 e 2^* che si trasformano secondo le leggi seguenti

$$16) \quad x'_j = R_{jk} x_k \quad y'_j{}^* = R_{jk}^* y_k^*$$

Se ora eseguiamo il prodotto tensoriale dei due spinori

$$17) \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1^* & x_1 y_2^* \\ x_2 y_1^* & x_2 y_2^* \end{pmatrix}$$

otteniamo un **tensore di rango 2 del tipo $2 \otimes 2^*$** con 4 componenti indipendenti che realizza una rappresentazione del gruppo delle rotazioni in campo complesso di dimensione **4**. Questo tensore si trasforma per rotazioni secondo la legge

$$18) \quad (x'_j y'_k{}^*) = R_{jp} R_{kq}^* (x_p y_q^*)$$

Il problema è ora stabilire se tale rappresentazione sia riducibile oppure no. Per capirlo riscriviamo la legge di trasformazione del tensore nel modo seguente

$$19) \quad (x'_j y'_k{}^*) = R_{jp} (x_p y_q^*) R_{qk}^{T*}$$

che può essere facilmente posto in forma matriciale ponendo $\Omega_{jk} = x_j y_k^*$. Si ottiene allora la seguente **legge di trasformazione dei tensori $2 \otimes 2^*$**

$$20) \quad \Omega' = R \Omega R^\dagger$$

Da questa espressione possiamo facilmente derivare la **legge di trasformazione del tensore $2 \otimes 2$ trasposto**

$$22) \quad \Omega'^T = (R \Omega R^\dagger)^T = R^{\dagger T} \Omega^T R^T = (R^{*T})^T \Omega^T R^T = R^* \Omega^T R^T$$

che non coincide con quella del tensore originario. Ora immaginiamo che Ω sia un **tensore $2 \otimes 2^*$ simmetrico**

$$21) \quad \Omega = \Omega^T$$

sostituendo tale eguaglianza nella 22) si vede immediatamente che si deve avere anche

$$23) \quad \Omega' \neq \Omega'^T$$

la quale mostra che **la simmetria o antisimmetria di un tensore $2 \otimes 2^*$ non è invariante per rotazioni.**

Consideriamo ora la traccia. Eguagliando gli indici j e k dalla 18) otteniamo

$$24) \quad (x'_j y'_k) = R_{jp} R_{kq}^* (x_p y_q) = x_p R_{pj}^T R_{kq}^* y_q$$

che può essere messa nella seguente forma matriciale (qualora si indichino con le frecce gli spinori e non i vettori)

$$26) \quad \vec{x}' \cdot \vec{y}'^* = \vec{x} R^T R^* \vec{y}^*$$

Dalla 26) si vede immediatamente che affinché la traccia non venga modificata dalla rotazione è necessario che valga la relazione

$$27) \quad R^T R^* = 1$$

che viene effettivamente soddisfatta poiché, in campo complesso, la matrice R è unitaria ($R^\dagger R = R^T R^* = R^T R^* = 1$). Giungiamo allora alla conclusione che **la traccia di un tensore $2 \otimes 2^*$ è invariante per rotazioni.**

Le considerazioni precedenti chiariscono che **la riduzione di un tensore $2 \otimes 2^*$ non può essere realizzata con le operazioni di simmetrizzazione e antisimmetrizzazione ma solo con la sottrazione della traccia.** Abbiamo allora la seguente scomposizione

$$28) \quad \begin{pmatrix} x_1 y_1^* & x_1 y_2^* \\ x_2 y_1^* & x_2 y_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1^* & x_1 y_2^* \\ x_2 y_1^* & x_2 y_2^* \end{pmatrix} - \frac{1}{2} (x_1 y_1^* + x_2 y_2^*) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (x_1 y_1^* - x_2 y_2^*) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 y_1^* - x_2 y_2^* & 2 x_1 y_2^* \\ 2 x_2 y_1^* & -x_1 y_1^* + x_2 y_2^* \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (x_1 y_1^* + x_2 y_2^*) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la quale mostra che **il tensore $2 \otimes 2^*$ a 4 componenti può essere scomposto in un tensore a traccia nulla a 3 componenti ed un tensore diagonale ad 1 componente.** Tali tensori sono **irriducibili** per cui giungiamo alla seguente scomposizione delle rappresentazioni

$$29) \quad 2 \otimes 2^* = 1 \oplus 3$$

□ Spinori 2^* in rappresentazione 2

Dalle precedenti considerazioni risulta che se si vogliono comporre tensori di rango 2 ove compaiano sia gli spinori che i loro complessi coniugati si deve necessariamente comporre un *tensore misto $2 \times 2^*$* il quale comporta che i due spinori si trasformino con leggi differenti. La domanda che ci poniamo ora è ***se sia possibile formare tensori misti in modo tale che gli spinori si trasformino nello stesso modo.*** Una proprietà di questo tipo risulta spesso assai comoda.

Confrontiamo le rappresentazioni scalari **1** ottenute rispettivamente da $2 \otimes 2$ e $2 \otimes 2^*$ (vedi formule 14) e 28))

$$1) \quad \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2}(x_1 y_1^* + x_2 y_2^*) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le rotazioni trasformano come scalari, ovvero lasciano invariate, le combinazioni di componenti spinoriali che compaiono in queste espressioni

$$2.1) \quad x_1 y_2 - x_2 y_1 \quad 2.2) \quad x_1 y_1^* + x_2 y_2^*$$

purché, come già detto, si tenga conto che gli spinori della prima combinazione si trasformano entrambi con la matrice **R** mentre quelli della seconda rispettivamente con **R** ed **R***. Riscriviamo la 2.1) nel modo seguente

$$x_1 (y_2) + x_2 (-y_1) \quad x_1 y_1^* + x_2 y_2^*$$

ed osserviamo che scambiando le componenti spinoriali secondo lo schema indicato una combinazione si trasforma nell'altra

$$3) \quad y_2 \rightarrow y_1^* \quad y_1 \rightarrow -y_2^*$$

Questo significa che i seguenti spinori

$$4) \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -y_2^* \\ y_1^* \end{pmatrix}$$

si trasformano entrambi come spinori della rappresentazione 2.

Allo stesso risultato si può pervenire anche direttamente. **La 2.2) è una diretta conseguenza della unitarietà della matrice delle rotazioni R** (vedi formule 26) e27)) mentre per quanto riguarda la prima possiamo fare il seguente ragionamento.

Richiamiamo le leggi di trasformazione di due spinori della rappresentazione **2** (vedi 4))

$$x'_j = R_{jk} x_k \quad y'_j = R_{jk} y_k$$

che possiamo scrivere esplicitamente nel seguente modo

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

dove **R** è la matrice **2x2** di rotazione. Le regole del calcolo matriciale permettono di scrivere queste due espressioni in un modo che risulta particolarmente comodo per imporre condizioni sul determinante

$$\begin{pmatrix} x'_1 & y'_1 \\ x'_2 & y'_2 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

Ricordando ora che la matrice **R** è unimodulare otteniamo la seguente relazione

$$\det \begin{pmatrix} x'_1 & y'_1 \\ x'_2 & y'_2 \end{pmatrix} = \det(R) \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene l'espressione

$$x'_1 y'_2 - x'_2 y'_1 = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

la quale mostra che **la 2.1) è invariante e che questa proprietà è una diretta conseguenza della unimodularità della matrice R della rotazione.**

Gli Adroni

Abbiamo accennato all'inizio di queste lezioni come i raggi cosmici all'inizio e poi, nell'immediato dopoguerra, gli esperimenti su acceleratori abbiano portato alla scoperta di un numero crescente di particelle instabili e di brevissima vita media tutte capaci di interagire fortemente (oltre che debolmente).

Si trattò di un fenomeno rilevante che portò alla scoperta di oltre un centinaio di nuove particelle e che non aveva una corrispondenza tra i leptoni che invece rimanevano in numero ridotto.

Si sospettò ben presto che gli adroni non fossero particelle elementari ma piuttosto sistemi composti da particelle presumibilmente elementari. La prima proposta di un modello effettivamente capace di spiegare le proprietà degli adroni osservati fino a quel momento fu fatta nel 1964, indipendentemente da M. Gell-Mann e G. Zweig.

Il modello **ipotizzava l'esistenza di un certo numero di particelle elementari** con certi opportuni numeri quantici (allora erano sufficienti particelle, oggi ne sono necessarie sei), **ipotizzava alcune semplici proprietà della forza forte** che teneva unite queste particelle all'interno dell'adrone (si tenga presente che l'interazione forte era in gran parte sconosciuta allora) ed in questo modo riproduceva correttamente molte delle proprietà degli adroni osservati. Queste nuove particelle elementari furono chiamate **quark**, un nome proposto dallo stesso M. Gell-

Mann e suggeritogli dai *Finnegans Wake* di J. Joyce, e il modello, che da allora ha avuto notevoli evoluzioni, **modello a quark**.

Il modello a quark rappresentò una fondamentale sintesi capace di mettere ordine nella complessa fenomenologia degli adroni e soprattutto capace di predisporre gli elementi essenziali per la costruzione di una teoria generale delle interazioni forti che si definirà all'inizio degli anni '70 con la **cromodinamica quantistica**. Da quel momento l'ambizione dei fisici è quella di spiegare le proprietà degli adroni non attraverso la mediazione del modello a quark ma direttamente dai principi primi della teoria. Un percorso assai ambizioso a causa della estrema complessità di questa interazione che ha conseguito molti successi ma ancora lontano dall'essere concluso.

Nella pagine seguenti esporremo alcune proprietà generali degli adroni così come emergono dagli esperimenti senza entrare nei dettagli e poi, capovolgendo in un certo senso il percorso storico, introdurremo immediatamente i quark con le necessarie caratteristiche, postuleremo alcune semplici proprietà della interazione forte e procederemo alla costruzione degli adroni verificando a posteriori la correttezza di alcune semplici previsioni.

Proprietà generali degli adroni

Richiamiamo ora le principali proprietà degli adroni emerse nel corso degli esperimenti sulle macchine acceleratrici.

- **Massa.** L'insieme degli **adroni** tende a suddividersi in due grandi famiglie: quella dei **mesoni** con masse superiori al pione, ovvero maggiori di 140 MeV (dal greco *mesos*, con il significato originario di massa intermedia tra l'elettrone ed il protone) e quella dei **barioni** (dal greco *barys*, pesante) con masse superiori al protone ovvero maggiori del GeV.
- **Spin.** Tale suddivisione è rispettata anche dallo spin: **i mesoni hanno tutti spin intero** ($s=0,1,2$) mentre **i barioni hanno tutti spin semintero** ($s=1/2, 3/2$).
- **Famiglie di adroni.** Sia i mesoni che i barioni eccetto pochi casi si presentano in famiglie di massa molto prossima e carica differente di valore -1, 0, +1 (in unità di e): ad esempio la famiglia dei pioni π^+ , π^- , π^0 o dei nucleoni p , n . Tende ad emergere anche una diretta corrispondenza tra famiglie: ad esempio quella tra i pioni e le ρ^+ , ρ^- , ρ^0 .
- **Stabilità.** Ad eccezione del protone tutti gli adroni sono **instabili** cioè decadono in altre particelle rispettando **le leggi cinematiche generali della conservazione della energia, dell'impulso e del momento angolare.**

Nonostante la loro varietà, i decadimenti avvengono secondo questa modalità: prima avvengono uno o più **decadimenti in adroni** meno massivi in **tempi rapidissimi dell'ordine di 10^{-22} s** o anche più. Raggiunti gli adroni più leggeri vi è infine il **decadimento in leptoni** in **tempi molto più lunghi dai 10^{-8} ai 10^{-12} s**. Si tratta evidentemente di processi governati da due interazioni di diversa intensità. Infatti, come vedremo, i primi sono controllati dalla

interazione forte mentre i secondi dalla **interazione debole**

$\overset{\text{I.Forte}}{\text{adroni}} \rightarrow \overset{\text{I.Forte}}{\text{adroni}} \rightarrow \dots \rightarrow \overset{\text{I.Forte}}{\text{adroni leggeri}} \rightarrow \overset{\text{I.Debole}}{\text{leptoni}}$

Una caratteristica assai peculiare di queste catene di decadimenti è che alcuni processi, apparentemente possibili, risultano proibiti (ad esempio il decadimento del protone). E' chiaro allora che, oltre alle leggi di natura cinematica, operano anche **leggi di natura non cinematica** che prendono il nome di **leggi o regole di selezione** e che **si manifestano nella scelta di certi canali di decadimento e nella esclusione di altri**. Vedremo come in fisica delle particelle le regole di selezione osservate sperimentalmente vengano descritte attraverso l'introduzione di specifici **numeri quantici interni** (questa in generale non è una novità: in un qualunque processo elettromagnetico ad esempio, anche macroscopico, opera la legge di conservazione della carica che non è di natura cinematica. Il fatto nuovo è che nelle interazioni forti, ma in generale nelle interazioni tra particelle, di queste leggi ce ne sono tante!).

Quando l'indagine sperimentale raggiunge il massimo grado di dettaglio non solo si precisano i modi di decadimento permessi e quelli non permessi (determinati dalle regole di selezione) ma di ciascuno di essi si misura la rapidità del processo, il peso percentuale relativo dei diversi processi possibili (rapporto di diramazione o 'branching-ratio') ed anche le caratteristiche cinematiche del processo (distribuzione statistica degli impulsi, e degli spin dei prodotti di decadimento).

I numeri quantici interni delle particelle

La prima intuizione della necessità di introdurre **indici di stato interni o numeri quantici interni** nelle particelle per potere spiegare le caratteristiche osservate di una interazione naturale, nel caso specifico della interazione forte, risale al 1932 e la si deve a W. Heisenberg.

Da poco gli esperimenti di E. Rutherford avevano rivelato che il nucleo era una struttura eccezionalmente compatta formata da protoni e neutroni. Dato che i protoni erano soggetti ad una intensa forza elettrostatica repulsiva, era evidente che all'interno del nucleo operava una forza attrattiva ancora più intensa di quella elettromagnetica. Nonostante questo fosse quasi tutto ciò che allora si sapeva sulla **interazione forte** Heisenberg fece alcune osservazioni che si riveleranno cruciali.

In primo luogo intuì che, nonostante neutrone e protone fossero particelle diverse, dovevano attrarsi con una forza forte della stessa intensità e che quindi dovevano possedere un qualcosa di simile ad una carica forte dello stesso valore. Osservò poi che neutrone e protone avevano una massa molto vicina per cui dovevano rispondere alla interazione forte nello stesso modo cioè con lo stesso comportamento cinematico. Questo fatto suggeriva che, **dal punto di vista della interazione forte, neutrone e protone dovevano essere due particelle sostanzialmente indistinguibili che potevano essere scambiate senza modificare l'assetto dello stato legato**. In un certo senso piuttosto che pensare neutrone e protone come due particelle differenti che potevano trovarsi nel medesimo stato cinematico si pensava neutrone e protone come la stessa particella che poteva invece trovarsi in due differenti stati interni. Nel 1937, E. Wigner propose il nome di **isospin** per **questo numero quantico interno capace di assumere i due valori di neutrone e protone**.

L'introduzione di specifici numeri quantici interni si dimostrerà, negli anni seguenti, una intuizione fondamentale capace di spiegare molte delle proprietà degli adroni:

- l'idea di potere scambiare certe particelle intrinsecamente differenti ma di uguale massa senza alterare la reciproca forza forte comporta l'esistenza di **famiglie di stati legati di eguale massa** che sono, come abbiamo già osservato, una caratteristica peculiare degli adroni osservati. Questo fatto può essere spiegato immaginando che **le interazioni forti siano invariabili (simmetriche) rispetto allo scambio di determinati numeri quantici interni**;
- l'esistenza di **regole di selezione** nei decadimenti degli adroni può essere spiegata attraverso il gioco di certi **numeri quantici interni che devono conservarsi nel processo**. Analogamente il fatto che una volta raggiunti gli adroni più leggeri si spengano le interazioni forti ed emergano le molto meno intense interazioni deboli significa che **esistono numeri quantici interni che si conservano nelle interazioni forti ma non in quelle deboli**. Il fatto infine che tra gli adroni ve ne sia uno assolutamente stabile, il protone, significa che **esiste un numero quantico interno conservato da tutte le interazioni esistenti**. Si comprende allora come la stabilità o instabilità delle particelle rispetto ad una interazione possa essere ricondotta alla conservazione o non conservazione di specifici numeri quantici in quella interazione.

Già da queste considerazioni generali è possibile intuire come il **concetto di numero quantico interno**, unitamente alle ipotesi della loro **conservazione e simmetria rispetto al loro scambio** da parte della interazione forte possa essere la chiave per descrivere molte delle proprietà osservate degli adroni.

I numeri quantici di sapore dei quark

Seguendo le idee appena illustrate faremo quindi le seguenti assunzioni:

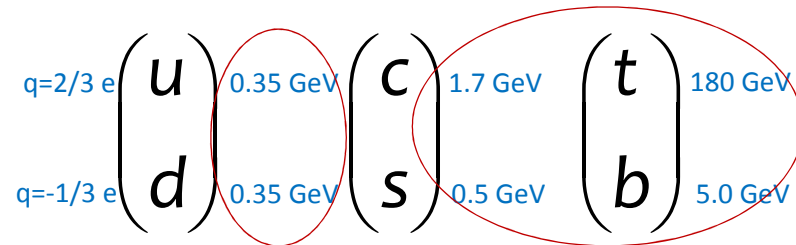
- i) *I sei quark sono intrinsecamente differenti*, per questo motivo, oltre alla massa ed allo spin, viene attribuito a ciascuno di essi un diverso **numero quantico interno o sapore**.
- ii) *I sei quark interagiscono con la stessa forza forte* il che equivale ad assumere che *l'interazione forte sia indipendente dal sapore* oppure **simmetrica rispetto allo scambio dei numeri quantici di sapore**. Si tratta in questo caso di una **simmetria esatta** ovvero perfettamente rispettata [quando a questa si aggiunge la coincidenza del valore della massa di due o più quark, coincidenza tipicamente approssimata, si perviene ad una approssimata interscambiabilità tra i quark e la esatta indipendenza della interazione forte dai numeri quantici di sapore (simmetria esatta) diventa osservabile nella approssimata indipendenza degli adroni dai numeri quantici di sapore (simmetria approssimata)].
- iii) *I sei quark interagiscono fortemente conservando i numeri quantici di sapore*. Questo significa che nel corso delle interazioni forti le trasformazioni di quark sono soggette a limitazioni.

Dato che i sei quark sono intrinsecamente diversi il primo passo potrebbe essere quello di attribuire a ciascun quark un diverso numero quantico di sapore.

Si osserva però che i quark up e down hanno masse molto simili per cui questi due quark potrebbero essere pensati come una stessa particella che può trovarsi in due differenti stati interni che potremmo chiamare sempre up e down.

Seguendo questa idea potremmo introdurre quattro sapori distinti per i quark più pesanti **c, s, t e b** ed uno stesso sapore, che deve però potere assumere due valori diversi, per i quark **u e d**

quarks spin = $\frac{1}{2} \hbar$



(i sapori sono sei ma arrangiati in modo da tenere conto del profilo della masse dei quark). Per quanto riguarda i quattro sapori da assegnare ai quark **c, s, t e b** non ci sono, per ora, particolari commenti mentre, per i sapori da assegnare ai quark **u e d**, dobbiamo spendere qualche parola.

Il modo più diretto per introdurre un numero quantico capace di alloggiare due diversi stati è quello di ispirarsi al **concetto di spin** in meccanica quantistica. Si introduce uno **spazio degli stati di spin** sui quali agiscono gli **operatori di spin** che per definizione soddisfano le stesse **leggi di commutazione** degli operatori del momento angolare orbitale. A causa di tali leggi gli operatori ammettono **un insieme di $2s+1$ vettori di stato differenti** (autovettori) dove **s** è il valore dello spin della particella (nel caso in cui **s=1/2** il numero di stati differenti vale proprio due). L'idea, allora, può essere quella di prendere di peso il formalismo matematico dello spin per descrivere le proprietà dei quark up e down rispetto alla interazione forte.

Introduciamo allora uno **spazio complesso a due componenti** che chiameremo **spazio di isospin**. Dato che vogliamo che gli stati possibili siano due assumeremo che l'isospin abbia valore $I=1/2$. Assumeremo poi che sugli stati di isospin agiscano gli **operatori d'isospin** che soddisfano le seguenti **leggi di commutazione**

$$[I_1, I_2] = iI_3 \quad [I_2, I_3] = iI_1 \quad [I_3, I_1] = iI_2$$

Date le regole di commutazione, gli stati possibili sono autostati di I^2 ed I_3 . Inoltre, poiché $I=1/2$ gli autostati soddisfano le equazioni seguenti

$$I^2 \xi_{I, I_3} = I(I+1)\xi_{I, I_3} \quad I = 1/2$$

$$I_3 \xi_{I, I_3} = I_3 \xi_{I, I_3} \quad I_3 = -1/2, +1/2$$

Seguendo la solita notazione abbiamo allora i due autostati

$$\xi_{1/2, 1/2} \quad \xi_{1/2, -1/2}$$

che assumeremo corrispondere rispettivamente al quark up e down

$$\xi_{1/2, 1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u \quad \xi_{1/2, -1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = d$$

In questo modo ai due quark risulta assegnato un numero quantico di sapore con le caratteristiche discusse in precedenza.

Più semplici sono le caratteristiche dei quantici di sapore da attribuire ai quark s, c, b, e t. La grande differenza di massa non ci permette di richiedere che, per quanto riguarda l'interazione forte, i quark siano scambiabili tra loro. E' allora sufficiente introdurre semplici numeri, che assumeremo **di modulo unitario e di segno sia positivo che negativo per uniformità con la terza componente dell'isospin**. Questi hanno nomi di fantasia posseduti, nell'ordine, dai quark s, c, b e t: **Stranezza (S, 'strangeness')**, **Incanto (C, 'charm')**, **Bellezza (B, 'bottomness' o 'beauty')** e **Verità (T, 'truth' o 'topness')**

quarks_{spin = 1/2 ħ}

$$\begin{array}{l}
 q=2/3e \begin{pmatrix} u \\ 0.35 \text{ GeV} \\ d \\ 0.35 \text{ GeV} \end{pmatrix}, I_3 = \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \quad \begin{pmatrix} c \\ 1.5 \text{ GeV} \\ s \\ 0.5 \text{ GeV} \end{pmatrix} C = +1 \quad \begin{pmatrix} t \\ 180 \text{ GeV} \\ b \\ 4.5 \text{ GeV} \end{pmatrix} T = +1 \\
 q=-1/3e \quad \begin{pmatrix} d \\ 0.35 \text{ GeV} \end{pmatrix}, I_3 = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \quad \begin{pmatrix} s \\ 0.5 \text{ GeV} \end{pmatrix} S = -1 \quad \begin{pmatrix} b \\ 4.5 \text{ GeV} \end{pmatrix} B = -1
 \end{array}$$

Ricordando che le antiparticelle si ottengono attraverso una operazione di coniugazione di carica che inverte i segni di tutti i numeri quantici interni, assumeremo che gli **antiquark abbiano numeri quantici di sapore opposti in segno a quelli dei quark**.

Come anticipato si assume che **le interazioni forti conservino i numeri quantici di sapore**. Avremo modo di mostrare che questa ipotesi, con l'assunzione aggiuntiva che i numeri quantici di sapore di uno stato di più particelle si possano calcolare attraverso la semplice somma aritmetica (**numeri quantici di sapore additivi**), è in grado di spiegare quali siano i processi siano permessi e quali invece proibiti nel corso della interazione forte (regole di selezione).

Assumendo invece che **le interazioni deboli non conservino i numeri quantici di sapore** si rende conto del fatto osservato che tutti gli adroni, dopo catene di decadimenti velocissimi controllati dalla interazione forte si convertono alla fine in leptoni attraverso un processo più lento controllato dalla interazione debole. Come abbiamo già osservato questa dinamica ha una eccezione, **il protone, che è stabile rispetto a tutte le interazioni**. Questo significa che **deve esistere un numero quantico interno conservato da tutte le interazioni**. Questo numero quantico interno viene detto **numero barionico**. Mostriamo che assumendo che **ogni quark abbia numero barionico $\mathcal{B}=1/3$** si descrive perfettamente la fenomenologia osservata. In accordo con le proprietà della trasformazione di coniugazione di carica assumeremo anche che **gli antiquark abbiano numero barionico $\mathcal{B} = - 1/3$** .

Osserviamo da ultimo che le convenzioni semplici e razionali che abbiamo seguito nell'attribuire ai quark i loro

numeri quantici interni fanno sì che esista una semplice relazione tra la carica elettrica del quark, il numero barionico ed i numeri quantici di sapore. Tale relazione, che può essere facilmente trovata per via diretta, prende il nome di **formula di Gell-Mann-Nishijima**

$$Q = \frac{1}{2}(\mathcal{B} + 2I_3 + S + C + B + T)$$

La struttura a quark degli adroni

L'ipotesi fondamentale del modello a quark è che gli adroni non siano particelle fondamentali ma composte da due o più quark. Sappiamo che gli adroni sono divisi in due grandi gruppi quello dei mesoni tendenzialmente più leggeri e quello dei barioni tendenzialmente più pesanti. Sembra logico concludere che il numero di quark che compone un mesone sia più piccolo del numero di quark che compone un barione.

Lo spin dei mesoni può assumere i valori $S=0,1,\dots$ mentre quello dei barioni $S=1/2, 3/2,\dots$

Ricordando che i quark hanno spin $s=1/2$ e ricordando le leggi di composizione del momento angolare di spin, notiamo subito che **con due quark** privi di momento angolare relativo si possono formare stati legati di spin $S=1/2 \otimes 1/2 = 0 \oplus 1$. Se i due quark hanno anche momento angolare relativo lo spin complessivo può innalzarsi anche ad altri valori interi $S=2,3,\dots$

Con tre quark privi di momento angolare relativo si possono formare invece stati legati di spin $S=1/2 \otimes 1/2 \otimes 1/2 = 1/2 \otimes (0 \oplus 1) = 1/2 \oplus 1/2 \oplus 3/2$. Se i due quark hanno anche momento angolare relativo lo spin complessivo può innalzarsi anche ad altri valori seminteri.

L'ipotesi quindi che ***i mesoni siano formati da due quark ed***

i barioni da tre quark è in accordo qualitativo con l'andamento delle masse e degli spin degli adroni.

Notiamo ora che **la carica elettrica dei mesoni è sempre nulla o unitaria** il che significa che i due quark devono essere in realtà **un quark ed un antiquark**. In questo modo si ottiene anche che il numero barionico di un mesone è sempre nullo in accordo con il fatto che i mesoni alla fine decadono debolmente in leptoni nonostante le interazioni deboli conservino il numero barionico.

Anche **la carica elettrica dei barioni è nulla o unitaria**. Ragionando sulle combinazioni si vede che solo combinando **tre quark** si possono ottenere valori interi o nulli della carica elettrica. In questo modo un barione ha anche numero barionico 1 capace di spiegare la stabilità del protone rispetto a tutte le interazioni.

Perveniamo allora a due fondamentali assunzioni del modello a quark le quali affermano che

i mesoni sono stati legati di un quark ed antiquark i barioni sono stati legati di tre quark e gli antibarioni sono stati legati di tre antiquark.

La struttura a quark dei mesoni

I quark hanno spin, momento angolare, carica elettrica e numeri quantici di sapore. Formare un mesone legando un quark ed un antiquark significa calcolare lo spin totale (che nel quadro di un modello non relativistico si assume essere la somma del momento angolare relativo e di spin dei quark), la carica elettrica totale ed i numeri quantici di sapore totali. Quest'ultima operazione non comporta difficoltà di alcun tipo nel caso di quantità additive (carica elettrica ed anche quattro dei sei sapori dei quark) mentre richiede un minimo di attenzione nel caso dei momenti angolari o dell'isospin che si sommano secondo regole più complesse.

□ I numeri quantici spaziotemporali dei mesoni

Osserviamo subito che per potere fare affermazioni anche solo generali sulle caratteristiche degli stati legati quark-antiquark sarebbe necessario avere certe informazioni sulle proprietà forza forte che li tiene uniti. In mancanza di queste informazioni si procede ipotizzando che **il potenziale sia centrale ed il sistema non relativistico** (soprattutto quest'ultima ipotesi pone dei problemi nel caso dei quark leggeri!). In questo caso possiamo affermare che **un generico stato del sistema legato quark-antiquark ha un certo numero quantico principale n , un momento angolare orbitale relativo l ed uno spin totale s pari alla somma degli spin dei quark componenti.**

In particolare **il momento angolare totale dello stato legato vale $J=l+s$** . Richiamando l'azione di P sulla parte orbitale della funzione d'onda abbiamo

$$P \psi_{L,M}(\vec{r}_{12}) = \eta_{ff} \psi_{L,M}(-\vec{r}_{12}) = (-1)(-1)^L \psi_{L,M}(\vec{r}_{12}) = (-1)^{L+1} \psi_{L,M}(\vec{r}_{12})$$

dalla quale si ottiene che **la parità dello stato legato vale**

$$P = (-1)^{L+1}$$

Richiamando poi la

$$\begin{aligned} C \psi(1,2) &= C \psi(1,q_1;2,q_2) = \eta \eta \psi(1,q_2;2,q_1) = \\ &= (-1)^L (-1)^{s-s_1-s_2} \psi(2,1) = (-1)^L (-1)^{s-s_1-s_2} (-1) \psi(1,2) = \\ &= \eta_c \psi(1,2) \end{aligned}$$

otteniamo che **l'autovalore della coniugazione di carica dello stato legato vale**

$$\eta_c = (-1)^{L+S}$$

Queste relazioni ci permetteranno, tra poco, di calcolare i numeri quantici rilevanti degli stati legati quark-antiquark.

Come in uno stato legato atomico, il sistema quark-antiquark ammette tutta una serie di stati che da quello fondamentale si elevano in energia mano a mano che cresce il numero quantico principale e variano i momenti angolari orbitali e di spin. Ad esempio lo stato fondamentale si ha quando

$$L = 0, s = 0, J = L + S = 0, P = (-1)^{L+1} = -1, C = (-1)^{L+S} = +1$$

da cui $J^{PC} = 0^{-+}$

che giustifica il nome a volte usato di stati pseudoscalari.

Il primo stato eccitato invece corrisponde ai momenti angolari

$$L = 0, s = 1, J = L + S = 1, P = (-1)^{L+1} = -1, C = (-1)^{L+S} = -1$$

da cui $J^{PC} = 1^{--}$

che giustifica il nome a volte usato di stati vettoriali.

E' chiaro che questi stati non sono che i primi due, **esiste tutta una serie di stati energia via via crescente, e questo per ciascuno dei possibili sapori dello stato legato**. Capiamo allora quanto maggiore sia la complessità dello spettro adronico rispetto quello atomico.

□ I numeri quantici di sapore dei mesoni

Per il calcolo dei numeri quantici di sapore dei mesoni ci atterremo, quando necessario, al metodo tensoriale.

Se ordiniamo i quark in un vettore colonna seguendo i valori delle masse otteniamo

$$\begin{array}{l}
 I = 1/2 \\
 S = +1 \\
 C = -1 \\
 B = +1 \\
 T = -1
 \end{array}
 \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \\ \bar{s} \\ \bar{c} \\ \bar{b} \\ \bar{t} \end{pmatrix}
 \quad
 \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \\ c \\ b \\ t \end{pmatrix}
 \begin{array}{l}
 I = 1/2 \\
 S = -1 \\
 C = +1 \\
 B = -1 \\
 T = +1
 \end{array}$$

dove con i colori abbiamo indicato il fatto che i quark up e down si differenziano solo nella terza componente dell'isospin ($u=1/2, 1/2$; $d=1/2, -1/2$) poiché sono pensati come due stati diversi della stessa particella a causa della prossimità della loro massa (simmetria approssimata di isospin), mentre i rimanenti quark si comportano come particelle differenti a causa della grande differenza nel valore delle loro masse.

La struttura di sapore dei mesoni si ottiene facendo il prodotto tensoriale dei due 'vettori'

$$\begin{array}{l}
 I = 1/2 \\
 S = +1 \\
 C = -1 \\
 B = +1 \\
 T = -1
 \end{array}
 \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \\ \bar{s} \\ \bar{c} \\ \bar{b} \\ \bar{t} \end{pmatrix}
 \otimes
 \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \\ c \\ b \\ t \end{pmatrix}
 \begin{array}{l}
 I = 1/2 \\
 S = -1 \\
 C = +1 \\
 B = -1 \\
 T = +1
 \end{array}$$

da cui risulta evidente che si ottengono 36 diverse combinazioni, che identifichiamo con i mesoni, ripartiti in famiglie identificate da specifici valori del sapore (isospin, stranezza, incanto, etc. etc.)

$$\begin{array}{c}
 I=1/2 \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \\
 S=+1 \quad \bar{s} \\
 C=-1 \quad \bar{c} \\
 B=+1 \quad \bar{b} \\
 T=-1 \quad \bar{t}
 \end{array}
 \otimes
 \begin{array}{c}
 \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \\ c \\ b \\ t \end{pmatrix} I=1/2 \\
 S=-1 \\
 C=+1 \\
 B=-1 \\
 T=+1
 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}u & \bar{u}d \\ \bar{d}u & \bar{d}d \end{pmatrix}^{**} \quad I=0,1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}s \\ \bar{d}s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K^- \\ \bar{K}^0 \end{pmatrix} \quad I=1/2 \\
 S=-1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{s} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\bar{s} \\ d\bar{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix} \quad I=1/2 \\
 S=+1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}c \\ \bar{d}c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D^- \\ \bar{D}^0 \end{pmatrix} \quad I=1/2 \\
 C=+1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{c} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\bar{c} \\ d\bar{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D^+ \\ D^0 \end{pmatrix} \quad I=1/2 \\
 C=-1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}b \\ \bar{d}b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^- \\ \bar{B}^0 \end{pmatrix} \quad I=1/2 \\
 B=-1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{b} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\bar{b} \\ d\bar{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^+ \\ B^0 \end{pmatrix} \quad I=1/2 \\
 B=+1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}t \\ \bar{d}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix} \quad I=1/2 \\
 T=+1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{t} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\bar{t} \\ d\bar{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix} \quad I=1/2 \\
 T=-1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{s} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} s \end{pmatrix} = (\bar{s}s) = (**) \quad S=0$$

$$\begin{pmatrix} \bar{s} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \end{pmatrix} = (\bar{s}c) = (D_s^+) \quad S=+1 \\
 C=+1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{c} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} s \end{pmatrix} = (\bar{c}s) = (D_s^-) \quad S=-1 \\
 C=-1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{s} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b \end{pmatrix} = (\bar{s}b) = (B_s^0) \quad S=+1 \\
 B=-1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{b} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} s \end{pmatrix} = (\bar{b}s) = (\bar{B}_s^0) \quad S=-1 \\
 B=+1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{s} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} t \end{pmatrix} = (\bar{s}t) = (*) \quad S=+1 \\
 T=+1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{t} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} s \end{pmatrix} = (\bar{t}s) = (*) \quad S=-1 \\
 T=-1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{c} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \end{pmatrix} = (\bar{c}c) = (\eta_c) \quad C=0$$

$$\begin{pmatrix} \bar{c} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b \end{pmatrix} = (\bar{c}b) = (B_c^-) \quad C=-1 \\
 B=-1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{b} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \end{pmatrix} = (\bar{b}c) = (B_c^+) \quad C=+1 \\
 B=+1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{c} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} t \end{pmatrix} = (\bar{c}t) = (*) \quad C=+1 \\
 T=+1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{t} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \end{pmatrix} = (\bar{t}c) = (*) \quad C=-1 \\
 T=-1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{b} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b \end{pmatrix} = (\bar{b}b) = (\Upsilon) \quad B=0$$

$$\begin{pmatrix} \bar{b} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} t \end{pmatrix} = (\bar{b}t) = (*) \quad B=+1 \\
 T=+1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{t} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b \end{pmatrix} = (\bar{t}b) = (*) \quad B=-1 \\
 T=-1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{t} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} t \end{pmatrix} = (\bar{t}t) = (*) \quad T=0$$

Le lettere si riferiscono al nome del mesone corrispondente allo stato legato fondamentale tale $J^{PC}=0^{++}$.

Tutti gli stati sono osservati, e molti studiati a fondo.

Quelli indicati con * sono stati che è noto non possano esistere a causa della enorme **massa del quark top** che rende l'interazione debole così intensa che il top decade debolmente prima di potere formare uno stato legato via interazione forte.

Infine gli stati indicati con ** hanno una struttura di sapore tensoriale e richiedono considerazioni aggiuntive che faremo tra poco.

Ci sono alcuni commenti che vale la pena fare sullo schema delineato nella pagina precedente

- il fatto che i quark up e down risultino disposti in un doppietto d'isospin (spinore d'isopin) con masse molto determina una **corrispondente ripartizione dei mesoni in doppietti di isospin di massa prossima**. Naturalmente sono possibili anche molti singoletti d'isospin ($I=0$) come pure tensori d'isospin ($I=1$) che discuteremo tra poco. In questo modo si spiega il fatto, sperimentalmente osservato sin dagli inizi, che i mesoni (come del resto anche i barioni) spesso si presentano in famiglie di massa molto prossima e carica differente;
- lo schema prevede l'esistenza di un certo numero di **mesoni realmente neutri** (autostati della coniugazione di carica). In linea di principio dovremmo attenderci 6 mesoni realmente neutri formati dalle coppie $u\bar{u}$, $d\bar{d}$, ..., $t\bar{t}$, tuttavia la coppia del quark top è esclusa a causa della grande massa (vedi pag. prec.), quelle dei quark up, down e strange sono soggette a fenomeni di miscelamento particolari e per ora le escludiamo, rimangono allora le coppie dei quark charm (η_c) e beauty (Y). Tutti **gli altri mesoni non sono realmente neutri ma, al più, elettricamente neutri** e risultano corrispondersi in **sistemi particella-antiparticella sia che si tratti di singoletti d'isospin che di doppietti**. Tra i singoletti abbiamo allora le corrispondenze $D_S^+ D_S^-$, $B_S^0 \bar{B}_S^0$, $B_c^+ B_c^-$ mentre tra i doppietti abbiamo le caratteristiche corrispondenze dei doppietti di **K, D e B**

(mancano al solito quelli associati al top);

- si noti che i doppietti del **K, D e B** contengono altre particelle elettricamente neutre ma non realmente neutre come le coppie $K^0 \bar{K}^0$, $D^0 \bar{D}^0$, $B^0 \bar{B}^0$, che vanno ad aggiungersi alla coppia $B_S^0 \bar{B}_S^0$. Queste quattro coppie sono di eccezionale interesse! Si tratta di stati fisici elettricamente neutri che si differenziano dal solo punto di vista del sapore ($S=\pm 1$, $C=\pm 1$ e $B=\pm 1$ rispettivamente). Dato che solo le interazioni forti conservano il sapore dobbiamo attenderci che la loro identità sia differente solo dal punto di vista di queste interazioni: nulla impedisce che altre interazioni non percepiscano questa differenza! In questo caso, dato che la carica elettrica è la stessa, si osserverebbero fenomeni di interferenza tra le due identità ideali per **lo studio di aspetti fondamentali della fisica delle particelle e della meccanica quantistica**.
- dobbiamo attenderci che le masse dei mesoni aumentino mano a mano che entrano i quark strange, charm e bottom. Un criterio orientativo per ottenere la massa del mesone è quello di sommare le masse dei quark costituenti e di sottrarre il contributo della energia di legame. Le prime sono riportate all'inizio del capitolo, la seconda ha un valore che va da 100 a 300 MeV (di più, a questo livello, non si può fare!);

I mesoni con i quark leggeri u,d,s

Per quanto riguarda il sapore, gli effetti più rilevanti avvengono, come è facile attendersi, dai quark leggeri up e down che formano gli stati mesonici attraverso **il prodotto tensoriale di isospinori $\bar{2} \otimes 2$**

$$\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

Si potrebbe pensare che, in accordo con quanto avviene nei mesoni formati da quark pesanti (pagina precedente), la struttura degli stati fisici sia quella derivante dal prodotto tensoriale dei due isospinori

$$\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}u & \bar{u}d \\ \bar{d}u & \bar{d}d \end{pmatrix}$$

ma in realtà le cose non vanno in questo modo! Non dobbiamo infatti dimenticare che **per assicurare che affinché sia assicurata l'invarianza delle interazioni forti rispetto alle rotazioni nello spazio d'isospin** (a sua volta legata alla indipendenza delle interazioni forti dallo scambio dei quark up e down) **è necessario che gli stati fisici corrispondano alle rappresentazioni irriducibili del**

gruppo di trasformazioni, in questo caso di SU(2). Non è sufficiente, quindi, eseguire il prodotto tensoriale, è necessario anche procedere alla riduzione del tensore.

Ricordiamo allora che le rappresentazioni irriducibili del gruppo delle rotazioni nello spazio d'isospin, analogamente a quelle delle rotazioni nello spazio tridimensionale ordinario, si costruiscono formando tensori che abbiano proprietà invarianti rispetto al gruppo di trasformazioni. In generale tali proprietà sono la simmetria, antisimmetria e traccia.

Come abbiamo visto, nel caso di tensori $\bar{2} \otimes 2$ l'unico invariante esistente è la traccia per cui abbiamo la seguente separazione invariante della matrice

$$\begin{pmatrix} \bar{u}u & \bar{u}d \\ \bar{d}u & \bar{d}d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\bar{u}u - \bar{d}d)/2 & \bar{u}d \\ \bar{d}u & -(\bar{u}u - \bar{d}d)/2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(\bar{u}u + \bar{d}d) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(si ricordi che il gruppo nel caso del gruppo SU(2) è possibile stabilire una corrispondenza tra gli spinori $\bar{2}$ e 2 ed operare con tensori $2 \otimes 2$. In questo caso l'invariante sarebbe la simmetria e non la traccia ma si verrebbe agli stessi risultati).

Come già detto in precedenza, dagli elementi delle due matrici si ottengono i multipletti corrispondenti alle rappresentazioni irriducibili associate ai tensori $\bar{2} \otimes 2$ e quindi dei mesoni leggeri. Abbiamo allora i tre stati di sapore definito

$$\bar{d}u \quad (\bar{u}u - \bar{d}d)/2 \quad \bar{u}d$$

che hanno evidentemente isospin $3=2I+1$ da cui $I=1$, numero barionico $B=0$ e carica elettrica $Q=1, 0, -1$. Abbiamo poi lo stato

$$\bar{u}u + \bar{d}d$$

di isospin $1=2I+1$ da cui $I=0$, numero barionico $B=0$ e carica elettrica $Q=0$.

Se ora consideriamo gli stati mesonici al livello fondamentale $J^{PC}=0^{++}$ gli stati di isospin $I=1$ corrispondono perfettamente ai primi mesoni che furono scoperti, **la famiglia dei pioni $\pi^+\pi^0\pi^-$** di massa **139.6, 135.0, 139.6 MeV** rispettivamente.

Data questa identificazione, anche lo stato di isospin $I=0$ dovrebbe avere una massa simile, poiché composto con gli stessi quark tenuti insieme dalla stessa forza (dato che la forza forte non dipende dal sapore, anche il contributo del potenziale d'interazione al bilancio della massa dovrebbe essere lo stesso). **Il problema è che i mesoni $I=0, J^{PC}=0^{++}$ noti sperimentalmente sono la η che ha una massa di 548 MeV e la η' che ha una massa di 958 MeV** dunque molto più alte dei 140 MeV previsti dal modello a quark.

□ Il miscelamento dei quark $J^{PC}=0^{++}$

Per spiegare questa forte discrepanza, l'unica possibilità, all'interno del modello a quark, è ammettere che, per qualche motivo, all'interno della η , oltre ai quark leggeri up e down vi siano anche quark di massa superiore.

Dato che la simmetria di isospin è verificata in modo soddisfacente l'eventuale contributo di quark pesanti deve avvenire in accordo con la sua conservazione e quindi **può provenire solo da stati quark-antiquark di isospin $I=0$ e numeri quantici di sapore tutti nulli.**

Nel modello a quark esistono altre combinazioni quark-antiquark con isospin $I=0$ e numeri quantici di sapore nulli. Queste sono (vedi tabella pagine precedenti)

$$\bar{s}s \quad \bar{c}c \quad \bar{b}b$$

ma le ultime due devono essere scartate poiché contribuirebbero con masse troppo elevate (si noti dell'ordine di 3 e 10 GeV!) per cui non rimane che **ipotizzare che la η contenga anche frazioni dello stato legato $\bar{s}s$.**

Comprendiamo allora che il miscelamento dei quark è un fenomeno che coinvolge non solo i quark up e down ma anche il più pesante quark strano. Fenomeni di miscelamento a carico dei quark ancora più pesanti non sono noti (per cui il fenomeno del miscelamento può essere utilmente affrontato nel più ampio contesto della simmetria $SU(3)$, ma noi seguiremo una strada un po' diversa!).

Seguendo le idee appena esposte ammetteremo allora che i due stati del modello a quark

$$\eta_a = \frac{(\bar{u}u + \bar{d}d)}{\sqrt{2}} \quad \eta_b = (\bar{s}s) \quad (1)$$

possano miscelarsi tra loro (si noti che il primo è stato normalizzato). Conviene introdurre il miscelamento in modo tale che venga preservata l'ortonormalità degli stati e questo può essere fatto attraverso una trasformazione ortogonale

$$\begin{aligned} \eta'_a &= \cos\vartheta \eta_a - \sin\vartheta \eta_b \\ \eta'_b &= \sin\vartheta \eta_a + \cos\vartheta \eta_b \end{aligned} \quad (2)$$

vediamo allora che compare un secondo stato, quale è il suo significato? Ragioniamo come segue. Il modello a quark prevede due stati $I=0, J^{PC}=0^+$ di massa circa 140 MeV indicati con η_a e η_b . Sperimentalmente, invece, si osservano due stati η ed η' di massa più elevata. L'idea è che gli stati η ed η' possano essere identificati con quelli 'ruotati' η'_a e η'_b il che comporta che l'angolo di miscelamento debba essere tale da riprodurre la masse osservate.

Il problema ora è quello di estrarre dagli stati le rispettive masse, come si fa? In generale sappiamo che gli stati con massa definita sono gli autostati dell'hamiltoniano del sistema

$$H|\phi\rangle = M|\phi\rangle$$

da cui

$$\langle\phi|H|\phi\rangle = M$$

un punto problematico nel modello a quark è che facendo questa assunzione, che appare la più naturale, non si riesce a riprodurre le corrette masse dei mesoni.

L'ipotesi che invece lavora correttamente è la seguente

$$\langle\phi|H|\phi\rangle = M^2 \quad (3)$$

ovvero che l'elemento di matrice dell'hamiltoniano di uno stato mesonico fornisce il quadrato della sua massa.

Facendo questa assunzione dalla (2) otteniamo

$$\begin{aligned} \langle\eta'_a|H|\eta'_a\rangle &= M_a'^2 = \langle\cos\vartheta \eta_a - \sin\vartheta \eta_b | H | \cos\vartheta \eta_a - \sin\vartheta \eta_b \rangle = \\ &= \cos^2\vartheta M_a^2 + \sin^2\vartheta M_b^2 - 2\sin\vartheta\cos\vartheta M_{ab}^2 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \langle\eta'_b|H|\eta'_b\rangle &= M_b'^2 = \langle\sin\vartheta \eta_a + \cos\vartheta \eta_b | H | \sin\vartheta \eta_a + \cos\vartheta \eta_b \rangle \\ &= \sin^2\vartheta M_a^2 + \cos^2\vartheta M_b^2 + 2\sin\vartheta\cos\vartheta M_{ab}^2 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \langle\eta'_a|H|\eta'_b\rangle &= 0 = \langle\cos\vartheta \eta_a - \sin\vartheta \eta_b | H | \sin\vartheta \eta_a + \cos\vartheta \eta_b \rangle = \\ &= \sin\vartheta\cos\vartheta M_a^2 - \sin\vartheta\cos\vartheta M_b^2 + \cos^2\vartheta M_{ab}^2 - \sin^2\vartheta M_{ab}^2 \end{aligned} \quad (6)$$

dove nell'ultima espressione si è tenuto conto della ortonormalità degli stati a' e b' . Dalla (6) otteniamo

$$M_{ab}^2 = \frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)} (M_b'^2 - M_a'^2) \quad (7)$$

che sostituita nelle (4) e (5) fornisce le relazioni

$$M_a'^2 = \cos^2 \vartheta M_a^2 + \sin^2 \vartheta M_b^2 - 2 \frac{\sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta}{(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta)} (M_b^2 - M_a^2)$$

$$M_b'^2 = \sin^2 \vartheta M_a^2 + \cos^2 \vartheta M_b^2 + 2 \frac{\sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta}{(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta)} (M_b^2 - M_a^2)$$

In queste espressioni conviene lavorare con la differenza $M_b^2 - M_a^2$ per cui scriveremo

$$M_a'^2 = (1 - \sin^2 \vartheta) M_a^2 + \sin^2 \vartheta M_b^2 - 2 \frac{\sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta}{(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta)} (M_b^2 - M_a^2)$$

$$M_b'^2 = (1 - \cos^2 \vartheta) M_a^2 + \cos^2 \vartheta M_b^2 + 2 \frac{\sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta}{(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta)} (M_b^2 - M_a^2)$$

da cui

$$M_a'^2 - M_a^2 = \sin^2 \vartheta (M_b^2 - M_a^2) - 2 \frac{\sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta}{(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta)} (M_b^2 - M_a^2)$$

$$M_b'^2 - M_a^2 = \cos^2 \vartheta (M_b^2 - M_a^2) + 2 \frac{\sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta}{(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta)} (M_b^2 - M_a^2)$$

$$M_a'^2 - M_a^2 = \left[\sin^2 \vartheta - 2 \frac{\sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta}{(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta)} \right] (M_b^2 - M_a^2)$$

$$M_b'^2 - M_a^2 = \left[\cos^2 \vartheta + 2 \frac{\sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta}{(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta)} \right] (M_b^2 - M_a^2)$$

passando ora al quoziente di queste espressioni otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{M_a'^2 - M_a^2}{M_b'^2 - M_a^2} &= \frac{(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) \sin^2 \vartheta - 2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta}{(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) \cos^2 \vartheta + 2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta} = \\ &= - \frac{\sin^4 \vartheta + \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta}{\cos^4 \vartheta + \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta} = - \operatorname{tg}^2 \vartheta \end{aligned}$$

e quindi la seguente relazione che fornisce l'angolo di miscelamento tra gli stati a e b in funzione delle masse degli stati a' , b' ed a

$$\operatorname{tg}^2 \vartheta = \frac{M_a'^2 - M_a^2}{M_a^2 - M_b'^2} \quad (8)$$

In questa formula le masse degli stati a' , b' sono date sperimentalmente mentre la massa dello stato a non è nota poiché a non è uno stato fisicamente osservato. La sua massa deve essere calcolata nel modo seguente.

Dalla (1) si ha

$$\eta_a = \frac{(\bar{u}u + \bar{d}d)}{\sqrt{2}}$$

e quindi

$$\begin{aligned} M_a^2 &= \langle \eta_a | H | \eta_a \rangle = \left\langle \frac{(\bar{u}u + \bar{d}d)}{\sqrt{2}} \middle| H \middle| \frac{(\bar{u}u + \bar{d}d)}{\sqrt{2}} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} (2m_u^2 + w^2 + 2m_d^2 + w^2) = 2m_u^2 + w^2 \quad (9) \end{aligned}$$

dove si è posto $m_u = m_d$ e si è rappresentata la massa dello stato legato come somma delle masse dei quark e della inerzia w^2 associata alla energia di legame che è indipendente dal sapore.

Per connettere la (9) alle masse degli stati fisici possiamo osservare che

$$M_\pi^2 = \langle \bar{u}d | H | \bar{u}d \rangle = 2m_u^2 + w^2 \quad m_u \sim m_d$$

$$M_K^2 = \langle \bar{u}s | H | \bar{u}s \rangle = m_u^2 + m_s^2 + w^2$$

le quali ci dicono che nella (9) lo stato a coincide con il pione di cui sappiamo la massa $m_\pi \sim 140 \text{ MeV}$.

Dunque, tornando alla formula (8) abbiamo

$$M_a^2 = 548^2 \quad M_b^2 = 958^2 \quad M_a^2 = 140^2 \quad \text{tg}^2 \vartheta = \frac{M_a^2 - M_b^2}{M_a^2 - M_c^2}$$

da cui

$$\vartheta \sim 29^\circ$$

Richiamando le (1) e (2) otteniamo

$$\eta'_a = \cos \vartheta \frac{(\bar{u}u + \bar{d}d)}{\sqrt{2}} - \sin \vartheta (\bar{s}s) = 0.87 \frac{(\bar{u}u + \bar{d}d)}{\sqrt{2}} - 0.48 (\bar{s}s)$$

$$\eta'_b = \sin \vartheta \frac{(\bar{u}u + \bar{d}d)}{\sqrt{2}} + \cos \vartheta (\bar{s}s) = 0.48 \frac{(\bar{u}u + \bar{d}d)}{\sqrt{2}} + 0.87 (\bar{s}s)$$

le quali forniscono la composizione a quark dei mesoni η ed η' . Tali formule rendono evidente il meccanismo del miscelamento dei quark che innalza la massa della η ed η' ben al di sopra della massa del pione attraverso frazioni consistenti di quark strani.

□ I mesoni $J^{PC} = 0^{-+}$ con i quark u, d, s

Il fenomeno del miscelamento dei quark complica un poco la configurazione degli stati fisici nel cosiddetto settore dei quark leggeri u, d ed s mentre non interessa in nessun modo quello

dei quark pesanti c, b e t (è questo uno dei motivi per cui, spesso, la trattazione dei mesoni contenenti i quark u, d ed s è separata da quella dei mesoni formati con i quark pesanti). Per questo può non essere inutile uno schema riassuntivo dei risultati ottenuti.

Come più volte detto, il sapore dei mesoni formati da quark leggeri si ottiene attraverso il prodotto tensoriale

$$\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \\ \bar{s} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}$$

che da origine alle seguenti combinazioni (separate in isospin)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \bar{u}u & \bar{u}d \\ \bar{d}u & \bar{d}d \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (\bar{u}u - \bar{d}d)/2 & \bar{u}d \\ \bar{d}u & -(\bar{u}u - \bar{d}d)/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\bar{u}u + \bar{d}d)/2 & 0 \\ 0 & (\bar{u}u + \bar{d}d)/2 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow (\bar{d}u, (\bar{u}u - \bar{d}d)/\sqrt{2}, \bar{u}d) \quad (\bar{u}u + \bar{d}d)/\sqrt{2} \\ &\quad (\pi^+, \pi^0, \pi^-) \quad (\bar{u}u + \bar{d}d)/\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \otimes (s) &= \begin{pmatrix} \bar{u}s \\ \bar{d}s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K^- \\ \bar{K}^0 \end{pmatrix} \\ (\bar{s}) \otimes \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \bar{s}u \\ \bar{s}d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix} \\ (\bar{s}) \otimes (s) &= (\bar{s}s) \end{aligned}$$

$(\bar{u}u + \bar{d}d)/\sqrt{2}, (\bar{s}s) \rightarrow \eta, \eta'$

dei nove mesoni attesi, la famiglia dei π e dei K emerge direttamente da queste combinazioni mentre η ed η' emergono solo dopo il miscelamento.

Come abbiamo già commentato la famiglia di mesoni carichi di isospin $I=1$ è chiaramente identificata con la famiglia dei pioni che hanno massa rispettivamente 139.6, 135.0, 139.6 MeV. Vi sono poi due doppietti di mesoni con isospin $I=1/2$, stranezza $S=-1$ ed $S=+1$. Si tratta dei Kaoni di massa superiore poiché contengono il quark s che è più massivo dei quark u e d . La loro massa è 493.7 e 497.6 MeV per ogni doppietto. Si noti inoltre che abbiamo due mesoni elettricamente neutri \bar{K}^0 e K^0 ma non realmente neutri. Come vedremo le interazioni deboli determinano una serie di sorprendenti fenomeni in questa coppia di mesoni. Vi sono infine i due stati $I=0$, uno di massa prossima al pione, l'altro di massa molto più elevata, che, attraverso il miscelamento danno luogo ai mesoni η ed η' che hanno masse di 548 e 958 MeV.

I 9 mesoni appena discussi rappresentano gli stati fisici della interazione forte identificati da numeri quantici di sapore che l'interazione forte stessa conserva. Se a questo aggiungiamo che i 9 mesoni $J^{PC}=0^{++}$ sono i più leggeri (essendo formati da coppie quark-antiquark nello stato fondamentale di più bassa energia) giungiamo facilmente ad alcune interessanti conclusioni di ordine generale che è facile sottoporre a verifica sperimentale

- **se il mesone ha almeno un numero quantico di sapore non nullo** (quindi la maggior parte dei mesoni π , K , D , B etc. etc.) allora non può decadere attraverso l'interazione forte poiché dovrebbe esistere un mesone più leggero con lo stesso sapore. **Tali mesoni possono decadere solo via interazione debole e quindi hanno vite medie nell'intervallo 10^{-8} - 10^{-12} s;**

- **se il mesone ha tutti i numeri quantici di sapore nulli** (η , η' , η_c , Y) allora la stabilità non è immediatamente garantita perché con due o più mesoni è possibile formare molti stati finali con numeri quantici di sapore nulli, quindi accessibili alle interazioni forti. In particolare è facile formare numeri quantici di sapore nulli combinando due o più pioni (ma anche in coppie $K\bar{K}$ etc. etc.) i quali, essendo di piccola massa, rendono instabili, rispetto alle interazioni forti, tutta la serie di mesoni η , η' , η_c , Y . **Tali mesoni quindi tendono perlopiù a decadere alla fine in sistemi di pioni (ed anche kaoni) i quali, come già detto, decadono solo debolmente.**

□ I mesoni $J^{PC}=1^{-}$ con i quark u , d , s

Secondo il modello a quark, i 9 mesoni $J^{PC}=0^{++}$ ($L=0$, $S=0$) considerati nel paragrafo precedente devono avere una esatta corrispondenza in 9 mesoni $J^{PC}=1^{-}$ ($L=0$, $S=1$) che si differenziano solo per l'orientazione dello spin dei due quark, antiparalleli nel primo caso e paralleli nel secondo.

In effetti, sono noti da molto tempo i seguenti mesoni $J^{PC}=1^{-}$ che corrispondono perfettamente a quelli $J^{PC}=0^{++}$

$$\begin{array}{ll}
 (\pi^+, \pi^0, \pi^-) & \rightarrow (\rho(770)^+, \rho(770)^0, \rho(770)^-) \\
 (K^+, K^0) & \rightarrow (K^{*+}(892), K^{*0}(892)) \\
 (K^-, \bar{K}^0) & \rightarrow (K^{*-}(892), \bar{K}^{*0}(892)) \\
 \eta & \rightarrow \omega(782) \\
 \eta' & \rightarrow \phi(1020)
 \end{array}
 \quad \text{stati miscelati di } \frac{(\bar{u}u + \bar{d}d)}{\sqrt{2}} \text{ e } (\bar{s}s)$$

Per quanto riguarda l'angolo di miscelamento, nel caso di questa serie mesonica si ha

$$M_a^2 = 782^2 \quad M_b^2 = 1020^2 \quad M_c^2 = 770^2 \quad \text{tg}^2 \vartheta = \frac{M_a^2 - M_c^2}{M_c^2 - M_b^2}$$

da cui ottiene il seguente **angolo di miscelamento per i mesoni ω e ϕ**

$$\vartheta \sim 11^\circ$$

e quindi la seguente struttura di sapore degli stati

$$\begin{aligned} \omega(782) &= \cos \vartheta \frac{(\bar{u}u + \bar{d}d)}{\sqrt{2}} - \sin \vartheta (\bar{s}s) = 0.98 \frac{(\bar{u}u + \bar{d}d)}{\sqrt{2}} - 0.20 (\bar{s}s) \\ \phi(1020) &= \sin \vartheta \frac{(\bar{u}u + \bar{d}d)}{\sqrt{2}} + \cos \vartheta (\bar{s}s) = 0.20 \frac{(\bar{u}u + \bar{d}d)}{\sqrt{2}} + 0.98 (\bar{s}s) \end{aligned}$$

la quale mostra che il mesone ω ha una struttura di sapore costituita quasi solamente da quark leggeri u e d mentre la ϕ quasi solamente da quark s . Dato che di solito si indica con il termine **miscelamento ideale** la perfetta separazione della componente $(\bar{s}s)$ da quella $(\bar{u}u + \bar{d}d)$ spesso si dice che **ω e ϕ sono prossime al miscelamento ideale**.

Per quanto riguarda la stabilità, dobbiamo ricordare che questa serie mesonica contiene coppie quark-antiquark che si trovano nel primo stato eccitato (spin paralleli, detto stato di tripletto) per cui dobbiamo attenderci che pur, in accordo con la conservazione del sapore, via interazione forte sia possibile produrre mesoni della serie fondamentale $J^{PC} = 0^{++}$. In effetti i dati sperimentali confermano questo stato di cose: l'intensità della interazione forte è tale che i mesoni

$J^{PC} = 1^-$ possono sussistere solo per tempi brevissimi che, a causa del principio di indeterminazione, determinano ampie fluttuazioni nel valore della massa di questi mesoni

$$\Delta E \Delta t \approx \hbar \quad \Delta m \approx \frac{\hbar}{\Delta t c^2}$$

Le larghezze del picco di massa di questi stati misurate sperimentalmente (queste possono facilmente essere convertite in tempi) sono di 150 MeV nel caso delle $\rho(770)$, 50 MeV per le $K^*(892)$, 8 e 4 MeV per le $\omega(782)$ e $\phi(1020)$. E' chiaro che con questi tempi, dell'ordine di 10^{-19} s o anche più, tali particelle non possono raggiungere nessun apparato di misura per cui la loro osservazione avviene attraverso l'osservazione dei prodotti di decadimento (raccolgendo un numero elevato di prodotti di decadimento e costruendo poi la loro massa invariante si formano addensamenti di eventi in corrispondenza di certe masse che sono l'unica segnatura fisica possibile di questi stati altamente instabili).

Quanto detto dovrebbe chiarire che altre serie mesoniche devono essere possibili a valori di massa ancora più elevati, corrispondenti a stati legati quark-antiquark ancora più eccitati. Altrettanto chiaro dovrebbe risultare il fatto che, aumentando il numero di canali accessibile via interazione forte, tali stati risulteranno ancora più instabili e di durata ancora più breve e dunque, alla fine, con picchi di massa ancora più larghi. E' proprio questo il fatto che impedisce alla spettroscopia mesoni di essere precisa e conclusiva come la spettroscopia atomica.

La struttura a quark dei barioni

Secondo il modello a quark i barioni risultano composti da tre quark per cui dobbiamo attenderci che siano assai più complessi dei mesoni sia dal punto di vista cinematico che della struttura di sapore. A questo si aggiunge poi il fatto che nei barioni sono ricorrenti coppie o addirittura terne di quark identici che sono soggetti alle limitazioni imposte dal principio di Pauli e che ne complicano notevolmente la costruzione. In quel che segue per contenere la complessità del problema limiteremo le nostre considerazioni alle sole combinazioni dei quark u, d, s.

□ I numeri quantici spaziotemporali dei barioni

Come nel caso dei mesoni ipotizzeremo che anche i barioni siano uniti da una forza trattabile con un **potenziale centrale e che il sistema sia non relativistico** (quest'ultima ipotesi pone dei problemi nel caso dei quark leggeri!). Possiamo allora affermare che **un generico stato del sistema legato quark-antiquark ha un certo numero quantico principale n, un momento angolare orbitale relativo L ed uno spin totale** pari alla somma degli spin dei quark componenti. In particolare **il momento angolare totale dello stato legato vale $J=L+S$** .

Osserviamo che il momento angolare orbitale non può che essere intero mentre il momento angolare di spin non può che essere semintero per cui concludiamo che il momento angolare totale dello stato deve essere semintero e dunque **i barioni appartengono alla famiglia dei fermioni**.

Richiamando l'azione dell'operatore di parità sulla parte orbitale della funzione d'onda abbiamo

$$P \varphi(\vec{r}_{12}, \vec{r}_3) = \eta_1 \eta_2 \eta_3 \varphi(-\vec{r}_{12}, -\vec{r}_3) \\ = \eta_1 \eta_2 \eta_3 (-1)^{L_{12}} (-1)^{L_3} \varphi(\vec{r}_{12}, \vec{r}_3)$$

dalla quale, assumendo positiva la parità intrinseca dei quark, otteniamo la seguente espressione della **parità dei barioni**

$$P = (-1)^{L_{12} + L_3}$$

Si osservi che, dalla stessa espressione si ottiene anche l'espressione della **parità degli antibarioni**

$$P = -(-1)^{L_{12} + L_3}$$

che risulta in accordo con il fatto che la parità intrinseca di un fermione è opposta a quella di un antifermione.

Tenendo conto che la somma degli spin dei quark può valere $s=1/2 \otimes 1/2 \otimes 1/2 = 1/2 \oplus 3/2$ e che il minimo momento orbitale totale vale $L_{12}=L_3=0$ si ottiene che **lo stato fondamentale di un barione ha $L=0$, $s=1/2$ e $J=1/2$ e quindi anche $P=+1$. Il primo stato eccitato invece avrà $L=0$, $s=3/2$ e $J=3/2$ e sempre $P=+1$.**

□ I barioni formati dai quark u, d ed s

Un barione è uno stato legato di tre quark e, come tale, caratterizzato da una funzione d'onda spaziale, di spin e di sapore. Dato che vogliamo limitare le nostre considerazioni allo stato fondamentale ed al primo stato eccitato assumeremo il momento angolare totale $L=0$, lo spin totale $s=1/2, 3/2$ e quindi gli stati $J^P=1/2^+, 3/2^+$.

Per quanto riguarda il sapore possiamo utilizzare un procedimento simile a quello impiegato con i mesoni. Mettendo in evidenza la struttura in isospin dei tre quark il sapore del barione si ottiene dal prodotto tensoriale

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

$$(s) \quad (s) \quad (s)$$

che può essere scomposto nei seguenti prodotti

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \otimes (s)$$

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \otimes (s) \otimes (s)$$

$$(s) \otimes (s) \otimes (s)$$

Tenendo conto che i doppietti di quark up-down hanno isospin $I=1/2$ e stranezza $S=0$ e che i singoli quark strani hanno $I=0$ e $S=-1$ abbiamo i seguenti numeri quantici di sapore

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad I = \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = (1 \oplus 0) \otimes \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \oplus \frac{1}{2}$$

$$I = 3/2, 1/2 \quad S = 0$$

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \otimes (s) \quad I = \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 1 \oplus 0 \quad S = 0 + 0 - 1 = -1$$

$$I = 1, 0 \quad S = -1$$

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \otimes (s) \otimes (s) \quad S = 0 + -1 - 1 = -2$$

$$I = 1/2 \quad S = -2$$

$$(s) \otimes (s) \otimes (s) \quad S = -1 - 1 - 1 = -3$$

$$I = 0 \quad S = -3$$

Sarebbe naturale pensare che i barioni formati dai quark u, d ed s - arrangiati nei multipletti d'isospin indicati - si replichino in tutti gli stati di momento angolare come accade nel caso dei mesoni. Invece il confronto con i dati sperimentali disponibili mostra che le cose non stanno in questo modo. Infatti si osservano **8 barioni** $J^P=1/2^+$ e **10 barioni** $J^P=3/2^+$.

possibili multipletti d'isospin di un barione

qqq	S=0	I=3/2,1/2						
qqs	S=-1	I=1,0						
qss	S=-2	I=1/2						
sss	S=-3	I=0						

multipletti d'isospin $J^P=1/2^+$ sperimentalmente osservati

qqq	S=0	I=3/2,1/2					940	p	n
qqs	S=-1	I=1,0	1190	Σ^+	Σ^-	Σ^0	1115	Λ	
qss	S=-2	I=1/2	1315	Ξ^0	Ξ^-				
sss	S=-3	I=0							

multipletti d'isospin $J^P=3/2^+$ sperimentalmente osservati

qqq	S=0	I=3/2,1/2	1230	Δ^{++}	Δ^+	Δ^0	Δ^-		
qqs	S=-1	I=1,0	1385	Σ^{*+}	Σ^{*-}	Σ^{*0}			
qss	S=-2	I=1/2	1530	Ξ^{*0}	Ξ^{*-}				
sss	S=-3	I=0	1670	Ω^-					

Basta uno sguardo allo schema della pagina precedente per rendersi conto che i barioni $J^P=1/2^+$ e $J^P=3/2^+$ occupano solo alcuni degli stati di isospin accessibili ad un sistema di tre quark. **Per quale motivo certi stati d'isospin vengono esclusi?**

Per cercare qualche suggerimento, è necessario analizzare un poco più a fondo le proprietà degli stati dei quark all'interno dei barioni. Per rendere più semplici le nostre considerazioni **rappresenteremo graficamente la funzione d'onda** dei barioni nel modo seguente

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \chi_1, \chi_2, \chi_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \\ &= \varphi_{L=0}(1,2,3) \chi(1,2,3) \xi(1,2,3) = \\ &= \varphi_{L=0}(1,2,3) \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \downarrow \text{ spin} \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ \uparrow & \downarrow & \downarrow \text{ isospin} \end{array} \end{aligned}$$

dove abbiamo tenuto conto che **nei barioni $J^P=1/2^+$ e $J^P=3/2^+$ il momento angolare orbitale totale è nullo** (precisiamo inoltre che con questa notazione gli spin e gli isospin compaiono associati a specifici quark mentre in realtà esistono altre combinazioni. Ci convinceremo comunque che eventuali altre combinazioni non altererebbero le conclusioni cui perverremo).

Dato che nei barioni che stiamo considerando l'unico

contributo al momento angolare proviene dallo spin è evidente che **nei barioni $J^P=3/2^+$ lo spin dei singoli quark deve essere allineato** mentre **nei barioni $J^P=1/2^+$ lo spin di un quark deve essere opposto a quello degli altri due.** Conviene allora cominciare con i primi che, data la disposizione degli spin, sono certamente più semplici da analizzare.

La Ω^- , che è formata da tre quark identici ed ha numeri quantici $I=0, J^P=3/2^+$, è allora rappresentata nel modo seguente

$$\Omega^- = \varphi_{L=0}(1,2,3) \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ s & s & s \end{array}$$

Evidentemente **la funzione d'onda di spin è simmetrica rispetto allo scambio di due qualunque quark identici.** Dato poi che il momento angolare totale è nullo e la parità intrinseca dei singoli quark positiva anche **la funzione d'onda orbitale è simmetrica rispetto allo scambio di una qualunque coppia di quark identici.** Concludiamo allora che **la funzione d'onda completa della Ω^- è simmetrica rispetto allo scambio di due qualunque quark identici.**

Esaminiamo ora la Δ ($I=0, J^P=3/2^+$) anch'essa formata da tre quark identici. Si ha

$$\Delta = \varphi_{L=0}(1,2,3) \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ q & q & q \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{array}$$

Per quanto riguarda la funzione d'onda orbitale e di spin valgono esattamente le stesse considerazioni fatte prima, per l'isospin osserviamo che, valendo $I=3/2$, è necessario che gli isospin dei singoli quark sono allineati tra loro per cui la funzione d'onda d'isospin è simmetrica rispetto allo scambio di una qualunque coppia di quark. Giungiamo allora alla conclusione che anche la funzione d'onda completa della Δ è simmetrica rispetto allo scambio di due qualunque quark identici.

Consideriamo ora la Ξ^* ($I=1/2, J^P=3/2^+$) formata da due quark identici. Si ha

$$\Xi^* = \varphi_{L=0}(1,2,3) \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ q & s & s \\ \uparrow & & \end{array}$$

con gli stessi ragionamenti concludiamo immediatamente che la funzione d'onda completa della Ξ^* è simmetrica rispetto allo scambio dei quark identici.

Infine la Σ^* ($I=1, J^P=3/2^+$) formata anch'essa da due quark identici

$$\Sigma^* = \varphi_{L=0}(1,2,3) \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ q & q & s \\ \uparrow & \uparrow & \end{array}$$

evidentemente la funzione d'onda completa della Σ^* è simmetrica rispetto allo scambio dei quark identici.

Ora non ci sono altri barioni $J^P=3/2^+$ da analizzare tuttavia risulta molto utile rappresentare anche gli stati d'isospin non occupati. Cominciamo con lo stato di tre quark identici

$$\Psi_{I=1/2, J^P=3/2^+} = \varphi_{L=0}(1,2,3) \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ q & q & q \\ \uparrow & \downarrow & \uparrow \end{array}$$

e poi con quello con due quark identici

$$\Psi_{I=0, J^P=3/2^+} = \varphi_{L=0}(1,2,3) \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ q & q & s \\ \uparrow & \downarrow & \end{array}$$

è evidente che nel caso di questi stati la funzione d'onda completa non risulta in generale simmetrica rispetto allo scambio dei quark identici. Anzi, in alcuni casi (quando gli isospin sono contrapposti) essa deve risultare antisimmetrica. In questi stati, quindi, non risulta possibile soddisfare il criterio della simmetria rispetto allo scambio di due quark identici che, a quanto pare, deve essere un requisito fondamentale affinché un barione $J^P=3/2^+$ possa sussistere.

Giungiamo allora alla conclusione che i barioni $J^P=3/2^+$ osservati sperimentalmente sono descritti da funzioni d'onda complessivamente simmetriche rispetto allo scambio dei quark identici.

Senza cercare per ora di comprenderne il significato, vogliamo ora analizzare i barioni $J^P=1/2^+$ nella speranza che quello appena enunciato sia il principio capace di riassumere le peculiarità di tutti gli stati barionici.

Come osservato, nei barioni $J^P=1/2^+$ lo spin di un quark deve essere opposto a quello degli altri due. Consideriamo allora il doppietto nucleonico N ($I=1/2, J^P=1/2^+$) formato da tre quark identici ed immaginiamo che spin ed isospin sia disposti come indicato

$$N = \varphi_{L=0}(1,2,3) \begin{array}{ccc} \uparrow & \downarrow & \uparrow \\ q & q & q \\ \uparrow & \downarrow & \uparrow \end{array}$$

Consideriamo poi la Σ ($I=1, J^P=1/2^+$), formata da due quark identici di cui ipotizziamo la seguente disposizione di spin ed isospin

$$\Sigma = \varphi_{L=0}(1,2,3) \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \downarrow \\ q & q & s \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{array}$$

la Λ ($I=0, J^P=1/2^+$), pure formata da due quark identici con la seguente possibile disposizione di spin ed isospin

$$\Lambda = \varphi_{L=0}(1,2,3) \begin{array}{ccc} \uparrow & \downarrow & \uparrow \\ q & q & s \\ \uparrow & \downarrow & \uparrow \end{array}$$

ed infine la Ξ ($I=1/2, J^P=1/2^+$), con la seguente possibile disposizione di spin ed isospin

$$\Xi = \varphi_{L=0}(1,2,3) \begin{array}{ccc} \downarrow & \uparrow & \uparrow \\ q & s & s \\ \downarrow & & \end{array}$$

In tutti questi barioni è risultato possibile riprodurre i corretti numeri quantici, mantenendo, al tempo stesso, la funzione d'onda complessiva simmetrica rispetto allo scambio di due quark identici (si noti che nel caso di N e della Λ si ha che sia la funzione d'onda di spin che di isospin sono antisimmetriche rispetto allo scambio dei quark identici il che assicura che la funzione d'onda completa debba essere simmetrica). Non risulta invece possibile assicurare questa proprietà nel caso degli stati formati da quark tutti identici $I=3/2, J^P=1/2^+$ e $I=0, J^P=1/2^+$

$$\Psi_{I=3/2, J^P=1/2^+} = \varphi_{L=0}(1,2,3) \begin{array}{ccc} \uparrow & \downarrow & \uparrow \\ q & q & q \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{array}$$

$$\Psi_{I=0, J^P=1/2^+} = \varphi_{L=0}(1,2,3) \begin{array}{ccc} \uparrow & \downarrow & \uparrow \\ s & s & s \\ \uparrow & \downarrow & \uparrow \end{array}$$

Concludiamo allora che anche per i barioni $J^P=1/2^+$ la simmetria della funzione d'onda complessiva rispetto allo scambio di due quark identici è un requisito necessario affinché lo stato possa sussistere.

Riassumendo, possiamo allora affermare in generale che affinchè un barione $J^P=1/2^+$ e $3/2^+$ possa sussistere è necessario che la funzione d'onda completa sia simmetrica rispetto allo scambio dei quark identici. Rimane ora da stabilire il significato di questa restrizione.

□ Un nuovo grado di libertà dei quark

La conclusione appena riassunta contiene un grave paradosso poiché apparentemente viola il fondamentale teorema spin- statistica il quale richiede che la funzione d'onda di due fermioni identici (quali sono i quark di cui stiamo parlando) sia complessivamente antisimmetrica rispetto allo scambio delle particelle.

Non ci sono alternative, o il teorema spin-statistica fallisce nel caso dei barioni, oppure abbiamo omissso qualche fatto fisico sostanziale.

Se ripensiamo con attenzione a ciò che abbiamo fatto nel precedente paragrafo comprendiamo che ciò che abbiamo realmente dimostrato è che la funzione d'onda di un barione è simmetrica quando scambiamo la posizione, lo spin e l'isospin di due quark identici. Se scartiamo l'ipotesi che il teorema spin-statistica sia sbagliato, l'unica possibilità è ammettere che tali scambi non coincidano con lo scambio delle due particelle e questo è possibile solo se nei quark esiste un grado di libertà interno fino ad ora non considerato. Secondo i principi generali della meccanica

quantistica tale grado di libertà dovrà essere descritto da un nuovo 'pezzo' di funzione d'onda che dovrà essere antisimmetrica rispetto allo scambio dei quark in modo da ripristinare la complessiva antisimmetria della funzione d'onda quando si scambiano quark identici in accordo con il teorema spin-statistica.

Questo nuovo grado di libertà interno può essere introdotto per ora nella forma di un nuovo numero quantico interno che viene conservato dalle interazioni forti e che chiameremo colore. Come già osservato il colore di un barione deve essere antisimmetrico rispetto allo scambio dei quark per cui deve possedere una struttura algebrica non banale quale quella di un vettore in un spazio interno complesso di dimensione N che chiameremo spazio di colore. Per assicurare la conservazione del colore sarà sufficiente rappresentare gli stati fisici per mezzo delle rappresentazioni irriducibili del gruppo di trasformazioni su questi vettori che assumeremo essere unitarie ed unimodulari, dunque trasformazioni di SU(N).

Le proprietà dei vettori di colore devono essere tali da assicurare l'antisimmetria della funzione d'onda di colore non solo rispetto allo scambio di due quark ma anche di tre quark come richiedono i barioni Δ ed Ω .

Se il colore di un quark viene descritto dal vettore complesso ad N componenti

$$c_j$$

il colore di due quark, secondo le regole generali della meccanica quantistica, è descritto dal tensore di rango 2

$$c_j' c_k''$$

ed il colore di tre quark dal tensore di rango 3

$$C_{jkl} = C_j' C_k'' C_l'''$$

il quale per spiegare le proprietà dei barioni deve essere antisimmetrico rispetto allo scambio di una qualunque coppia di vettori (ovvero di indici)

$$C_{jkl} = -C_{kjl} \quad C_{jkl} = -C_{lkj} \quad C_{jkl} = -C_{jlk}$$

Ora si noti che questa condizione richiede che le componenti del tensore con due indici uguali debbano essere tutte nulle

$$C_{jji} = -C_{jji} = 0$$

per cui le uniche componenti non nulle sono quelle con valori distinti dei tre indici. E' chiaro che affinché ciò sia possibile è necessario che il vettore di colore abbia tre o più componenti.

- Se il vettore di colore ha 3 componenti il tensore C_{jkl} completamente antisimmetrico può avere 6 componenti non nulle

$$C_{123} \quad C_{132} \quad C_{213} \quad C_{231} \quad C_{312} \quad C_{321}$$

di cui una sola indipendente in virtù dell'antisimmetria. Dunque se il vettore di colore ha dimensione 3 il colore di un sistema di tre quark è rappresentato da un tensore

con una sola componente indipendente ovvero da uno scalare.

Immediata conseguenza di questo fatto è che non si può formare un tensore di rango 4

$$C_{jklm} = C_j' C_k'' C_l''' C_m''''$$

che sia antisimmetrico rispetto allo scambio di una qualunque coppia di quark. Questo fatto, a sua volta, comporta che non sia possibile attribuire un colore ad uno stato legato di 4 quark il che equivale ad affermare che non possono esistere stati legati di 4 quark. Dunque se il vettore di colore ha 3 componenti si possono formare stati legati di 3 quark ma non di 4 quark.

Altrettanto immediata è la conseguenza che stati legati di due quark devono avere un colore rappresentato da un tensore di rango 2 antisimmetrico

$$C_{jk} = C_j' C_k''$$

che ha 3 componenti indipendenti. Dunque se il vettore di colore ha 3 componenti il colore di un sistema di 2 quark è rappresentato da un tensore antisimmetrico con 3 componenti indipendenti.

- **Se il vettore di colore ha 4 componenti**, il colore di uno stato di tre quark è rappresentato dal tensore

$$C_{jkl} = c'_j c''_k c'''_l$$

con 4 componenti indipendenti, mentre il colore di uno stato legato di 4 quark viene rappresentato dal tensore

$$C_{jklm} = c'_j c''_k c'''_l c''''_m$$

che, in questo caso ha una componente indipendente (è facile mostrarlo con prova diretta). Dunque risulta possibile attribuire un colore ad uno stato legato di 4 quark il che equivale ad affermare che possono esistere stati legati di 4 quark. Giungiamo allora alla conclusione che **se il vettore di colore ha 4 componenti si possono formare stati legati sia di 3 quark che di 4 quark.**

Immediata è anche l'affermazione seguente: se **il vettore di colore ha 4 componenti il colore di un sistema di 2 quark è rappresentato da un tensore antisimmetrico con 6 componenti indipendenti.**

- **Se il vettore di colore ha 3, 4 o più componenti**, il colore di uno stato quark-antiquark (mesone) è rappresentato dal tensore

$$C_{jk} = c'_j c''^*_k$$

dove abbiamo tenuto conto che, secondo le regole generali, dobbiamo attribuire il vettore di colore c_j^* agli antiquark.

Si deve ora ricordare che abbiamo assunto che la dinamica sia invariante per trasformazioni lineari, unitarie ed unimodulari nello spazio di colore. In particolare la condizione di unitarietà assicura che la traccia del tensore di colore del mesone

$$C_{jj} = c'_j c''^*_j$$

sia uno scalare per cui abbiamo la possibilità di associare uno scalare di colore non solo ai barioni ma anche ai mesoni. Si sottolinea che questa possibilità non ha alcuna relazione con la dimensionalità del vettore di colore ma solo con il fatto che le trasformazioni nello spazio di colore sono unitarie. Dunque affermeremo semplicemente che **poiché le trasformazioni nello spazio di colore sono unitarie risulta possibile rappresentare il colore di un sistema quark-antiquark con uno scalare.**

Dato che le conseguenze che discendono dalle diverse opzioni sul numero di dimensioni del vettore di colore sono tutte fisicamente ragionevoli si capisce che **la scelta non può che essere demandata agli esperimenti.**

Ora, gli esperimenti affermano in primo luogo che non esistono barioni formati da 4 quark. Questo significa che il vettore di colore e con esso **lo spazio di colore deve avere dimensione 3.** Gli esperimenti affermano anche che si osservano stati legati di 2 quark del tipo quark-antiquark (mesoni) o stati legati di 3 quark (barioni) ma non stati legati di 2 quark del tipo quark-quark. Questo significa che **il colore degli adroni esistenti in natura è sempre rappresentato da uno scalare** (quest'ultima condizione viene spesso affermata dicendo che gli stati legati esistenti in natura sono bianchi).

□ La funzione d'onda di colore

Riassumendo, esiste un nuovo grado di libertà interno nei quark chiamato colore cui è associato **lo spazio di colore.** I vettori di stato e con essi lo spazio di colore ha 3 dimensioni il che significa **esistono 3 diversi colori.**

Come conseguenza, **per ciascun sapore esistono tre quark di colore differente** e quindi in totale $6 \times 3 = 18$ differenti tipi di quark nel modello standard.

Per essere in accordo con la esistenza dei mesoni e dei barioni si deve **ipotizzare che possono esistere solo gli adroni il cui colore è uno scalare** (nello spazio del colore). In

questo modo la struttura di colore degli adroni risulta essere definita nel modo seguente.

Nel caso dei **mesoni** il colore è definito dalla traccia del tensore

$$C_{jj} = c'_j c_j''^* = c'_1 c_1''^* + c'_2 c_2''^* + c'_3 c_3''^*$$

ovvero dalla somma dei contributi delle coppie quark-antiquark di ciascun colore (coppie quark-antiquark colorate). Giungiamo allora alla conclusione che la parte di colore della funzione d'onda di un mesone può essere scritta in forma normalizzata

$$C_{12} = \frac{c'_1 c_1''^* + c'_2 c_2''^* + c'_3 c_3''^*}{\sqrt{3}}$$

dove C_{12} è un numero complesso. La funzione d'onda completa di un quark up o down (con isospin) è data allora dalla espressione

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \chi_1, \chi_2, \xi_1, \xi_2, c_1, c_2) = \varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \chi_{12} \xi_{12} C_{12}$$

mentre quella di un quark con un qualunque altro sapore s

$$\psi_s(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \chi_1, \chi_2, c_1, c_2) = \varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \chi_{12} I_{12} C_{12}$$

Nel caso dei **barioni** il colore è definito dal tensore completamente antisimmetrico

$$C_{jkl} = c'_j c''_k c'''_l$$

che ha una componente indipendente. Per ottenere le componenti di questo tensore si può ricorrere ad una ben nota proprietà del determinante il quale cambia di segno quando vengono scambiate due colonne (o righe) qualunque. In questo modo, se disponiamo i vettori c' , c'' e c''' nelle colonne di una matrice quadrata 3×3 , dal semplice sviluppo del determinante otteniamo la corretta struttura del colore di un barione

$$C = \det \begin{pmatrix} c'_1 & c''_1 & c'''_1 \\ c'_2 & c''_2 & c'''_2 \\ c'_3 & c''_3 & c'''_3 \end{pmatrix} =$$

$$c'_1 c''_2 c'''_3 - c'_1 c'''_2 c''_3 - c''_1 c'_2 c'''_3 + c''_1 c'''_2 c'_3 + c'''_1 c'_2 c''_3 - c'''_1 c''_2 c'_3$$

Si vede allora che la struttura di colore di un barione è ben più complessa. Essa è data dalla somma o differenza di termini ciascuno formato dai tre quark di differente colore che può essere scritta in forma normalizzata

$$C_{123} = \frac{c'_1 c''_2 c'''_3 - c'_1 c'''_2 c''_3 - c''_1 c'_2 c'''_3 + c''_1 c'''_2 c'_3 + c'''_1 c'_2 c''_3 - c'''_1 c''_2 c'_3}{\sqrt{6}}$$

La funzione d'onda complessiva di un barione formato da quark con isospin potrà essere scritta nella seguente forma

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \chi_1, \chi_2, \chi_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3, c_1, c_2, c_3) = \\ = \varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) \chi_{123} \xi_{123} C_{123} \end{aligned}$$

mentre se uno o più quark hanno un altro sapore, in luogo della funzione d'isospin si può usare un pedice nella funzione d'onda come fatto nel caso dei mesoni. Al di là di questi dettagli il punto essenziale è che **con l'introduzione del colore risulta stabilita l'antisimmetria complessiva della funzione d'onda dei barioni rispetto allo scambio di due quark identici** come richiesto dal teorema spin-statistica.

Esempio facoltativo

Un accenno alla rinormalizzazione

Note storiche

- ❑ Già l'elettromagnetismo classico era afflitto da grandezze fisiche di valore infinito (ad esempio la massa elettromagnetica di una carica puntiforme $U = q^2/6\pi\epsilon_0 c^2 a$ che diverge quando il raggio della carica $a \rightarrow 0$) ma, contrariamente alle attese, le cose peggiorarono con i primi calcoli di elettrodinamica quantistica (Heisenberg e Pauli 1929 e poi Oppenheimer 1930) che evidenziarono, per le stesse grandezze, divergenze con andamento $1/a^2$ (con $a \rightarrow 0$, divergenze ultraviolette) quando si sommava sugli stati virtuali intermedi del campo.
- ❑ La situazione migliorò negli anni seguenti quando si cominciò ad eseguire tali calcoli nel contesto della teoria dell'elettrone di Dirac. Weisskopf, in un lavoro del 1934, mostrò che il ruolo dei positoni introdotti da Dirac era tale da eliminare i termini in $1/a^2$ ($a \rightarrow 0$) lasciando la più debole divergenza con andamento $\ln h/2\pi mca$ ($a \rightarrow 0$).
- ❑ Nonostante questo gli infiniti erano da molti considerati un problema che andava risolto con modifiche radicali dell'impianto teorico della nascente QFT: Dirac, nel 1942, introduce una metrica indefinita nello spazio di Hilbert per manipolare probabilità negative ed eliminare le divergenze, mentre Wheeler nel 1937 e Heisenberg nel 1943 suggeriscono di assumere come grandezza fondamentale in QFT la matrice S piuttosto che i vettori di stato.

Esempio facoltativo

- ❑ Tra le idee in circolazione ve ne era una, ispirata dalla elettrodinamica di Lorentz, che cercava di eliminare le grandezze infinite ridefinendo la carica e la massa delle particelle cariche. Weisskopf imboccò questa strada e, nel 1936, pubblicò un lavoro nel quale mostrò che tutti gli infiniti fino ad allora noti potevano essere riassorbiti in questo modo.
- ❑ La svolta si ebbe subito dopo la seconda guerra mondiale nel corso della *Conference on the Foundations of quantum Mechanics* tenuta a Shelter Island (NY) nel Giugno del 1947. Qui si incontrarono i migliori teorici del tempo ed alcuni fisici sperimentali che richiamarono l'attenzione su due piccoli ma decisivi effetti. Willis Lamb, con una tecnica geniale, riuscì a misurare lo splitting tra i livelli $2S_{1/2}$ e $2P_{1/2}$ dell'atomo di idrogeno (circa 1000 MHz) mentre Isidor Rabi misurò una deviazione nel momento magnetico dell'elettrone che risultava essere lievemente maggiore di quello previsto da Dirac (1.0013).
- ❑ Per quanto riguarda lo splitting $2S_{1/2}$ - $2P_{1/2}$ (Lamb-shift), un primo calcolo non relativistico, che eliminava le divergenze con un semplice taglio sugli integrali, fu eseguito nel 1947 da Bethe e fornì il valore quasi corretto di 1040 MHz. Calcoli relativistici furono eseguiti negli anni seguenti da diversi autori: Feynmann 1948, Tomonaga et al. 1948, Weisskopf & French 1949, Schwinger 1949, Kroll e Lamb 1949. Per quanto riguarda invece il momento magnetico dell'elettrone il primo calcolo relativistico fu compiuto da Schwinger nel 1948. In entrambi i casi la precisione del calcolo era in eccellente accordo con i valori sperimentali e fu determinante nel convincere la comunità dei fisici che le particelle virtuali e gli elaborati metodi per la rimozione degli infiniti dovevano essere prese molto sul serio.

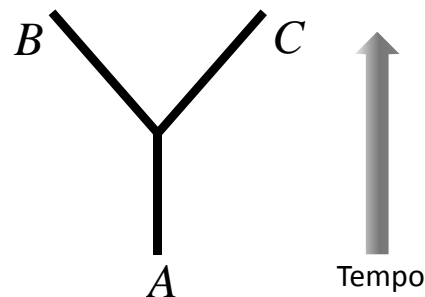
Esempio facoltativo

- Gli approcci al problema che per rigore e coerenza emersero in questo periodo furono quelli di Schwinger e Tomonaga da un lato (basato sugli operatori) e quello di Feynman dall'altro (basato sui funzionali e su una razionale e pratica rappresentazione diagrammatica della interazione). Fu Dyson, nel 1949, che dimostrò i) la sostanziale equivalenza degli approcci di Schwinger, Tomonaga e Feynmann; ii) che la tecnica di rimozione degli infiniti utilizzata era capace di rimuovere le divergenze in tutti gli ordini successivi dello sviluppo perturbativo della interazione; iii) che introdusse l'idea di teoria di campo rinormalizzabile, ovvero di una teoria di campo dove tutti gli infiniti possono essere riassorbiti dalla ridefinizione di un numero finito di parametri fisici della teoria.

Gli aspetti tecnici

Per commentare gli aspetti algoritmici della rinormalizzazione nella loro forma più essenziale immagineremo di avere a che fare con una interazione naturale semplificata al massimo grado [vedi Am J. Phys. 60, (1992) 1013]. In particolare supporremo che

- i) esistano solo tre tipi di particelle: A , B e C di massa m_A , m_B ed m_C , ciascuna di spin nullo e coincidente con la propria antiparticella;
- ii) esista un solo tipo di interazione che determina il decadimento di A nella coppia di particelle B e C ($m_A > m_B + m_C$) secondo la rappresentazione diagrammatica seguente

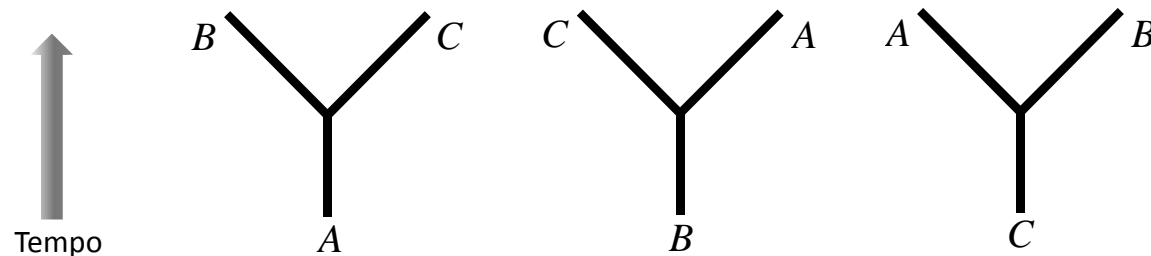


Esempio facoltativo

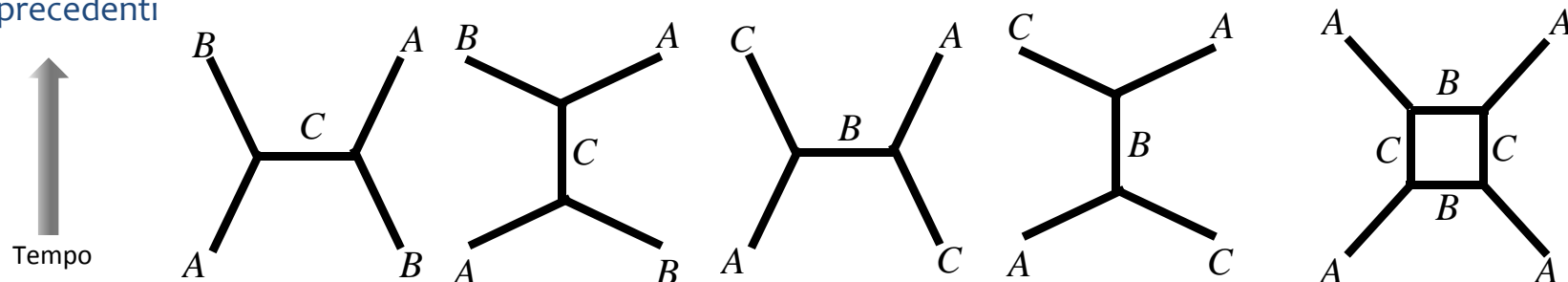
Sviluppando perturbativamente l'hamiltoniano della interazione si otterrebbero, a partire da quello fondamentale, tutta una serie di processi di intensità decrescente e complessità crescente riconducibili comunque a combinazioni del processo fondamentale. Per capire almeno qualitativamente come questo sia possibile occorre riferirsi al principio di indeterminazione (meccanica quantistica) ed alla equivalenza tra massa ed energia (Teoria della relatività ristretta)

$$\Delta E \Delta t \sim h \quad \Delta E = mc^2 \quad \Delta t \sim \frac{h}{mc^2} \quad \Delta x = c \Delta t \sim \frac{h}{mc}$$

all'interno di intervalli temporali (spaziali) molto brevi hanno luogo tutti i seguenti processi (processi virtuali), alcuni dei quali (gli ultimi due) impossibili su tempi lunghi



Con intensità inferiore risultano poi possibili seguenti processi ottenuti combinando tra loro i diagrammi precedenti



Esempio facoltativo

Una volta rappresentata graficamente l'interazione (*diagrammi di Feynmann*) è possibile associare ad ogni elemento grafico una specifica funzione (*regole di Feynmann* per l'interazione considerata) e calcolare l'*ampiezza del processo* (numero complesso) con la quale calcolare le quantità sperimentalmente misurabili (tasso di decadimento, sezione d'urto, etc. etc.). Attraverso una procedura che qui non riportiamo è possibile calcolare le regole di Feynmann nel caso della nostra interazione:

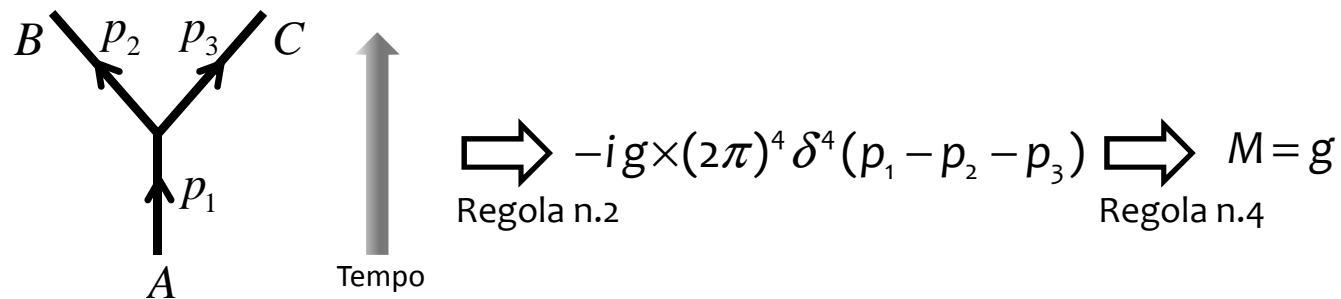
- 1) associare ad ogni linea entrante o uscente il quadrimpulso P_j e ad ogni linea interna il quadrimpulso q_j in relazione ad una orientazione arbitraria;
- 2) scrivere per ogni vertice il termine $-ig$ (g rappresenta la costante di accoppiamento della interazione) ed il termine $(2\pi)^4 \delta^4(P_j + P_k - P_l)$ che garantisce la conservazione del quadrimpulso (energia e quantità di moto);
- 3) scrivere, per ogni linea interna, il termine $i/(q_j^2 - m_j^2)$ (propagatore) dove m_j è la massa della particella virtuale cui è associata la linea ed il termine $1/(2\pi)^4 dq_j^4$ integrando sul relativo quadrimpulso;
- 4) si elimini infine il termine $-i(2\pi)^4 \delta^4(\sum P_j)$;

si ottiene allora l'ampiezza del processo associato al diagramma.

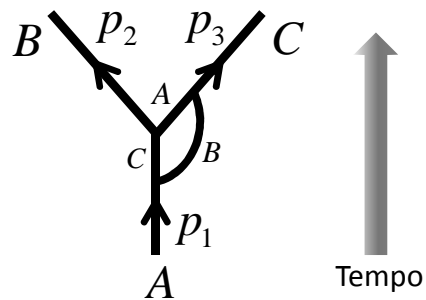
Esempio facoltativo

Il decadimento di A in B e C.

Applicando le regole di Feynmann valide per la nostra interazione otteniamo facilmente la seguente ampiezza

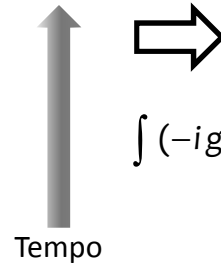
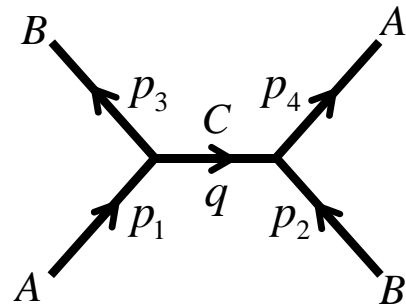


tuttavia se volessimo una valutazione ancora più precisa dell'ampiezza del processo di decadimento dovremmo valutare e sommare anche diagrammi a tre vertici del tipo seguente assai più complesso!



Esempio facoltativo

La diffusione AB.



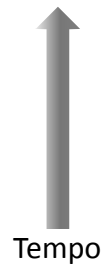
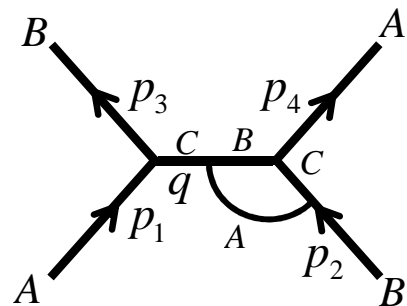
$$\int (-ig)(2\pi)^4 \delta^4(p_1 - q - p_3) \times \frac{i}{q^2 - m_c^2 c^2} \frac{1}{(2\pi)^4} dq^4 \times (-ig)(2\pi)^4 \delta^4(p_2 + q - p_4) =$$

$$= (-ig)(2\pi)^4 \frac{i}{(p_1 - p_3)^2 - m_c^2 c^2} \frac{1}{(2\pi)^4} (-ig)(2\pi)^4 \delta^4(p_2 + p_1 - p_3 - p_4) =$$

$$= (-ig) \frac{i}{(p_1 - p_3)^2 - m_c^2 c^2} (-ig)(2\pi)^4 \delta^4(p_2 + p_1 - p_3 - p_4)$$

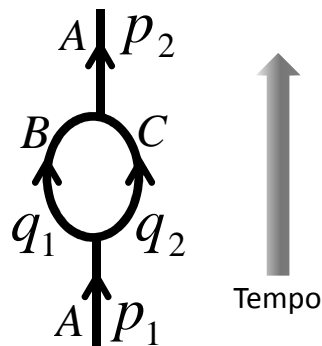
$$\Rightarrow M = \frac{g^2}{(p_1 - p_3)^2 - m_c^2 c^2}$$

Anche in questo caso, un calcolo più preciso richiederebbe la valutazione di ampiezze a quattro vertici del tipo seguente



Esempio facoltativo

Il diagramma a 'loop'.



$$\Rightarrow \int \int (-ig)(2\pi)^4 \delta^4(p_1 - q_1 - q_2) \times$$

$$\times \frac{i}{q_1^2 - m_B^2 c^2} \frac{1}{(2\pi)^4} dq_1^4 \times \frac{i}{q_2^2 - m_C^2 c^2} \frac{1}{(2\pi)^4} dq_2^4 \times$$

$$\times (-ig)(2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_2 - p_2) =$$

$$= -i(2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2) \times \frac{ig^2}{(2\pi)^4} \int \frac{1}{[q_1^2 - m_B^2 c^2][(q_1 - p_2)^2 - m_C^2 c^2]} dq_1^4$$

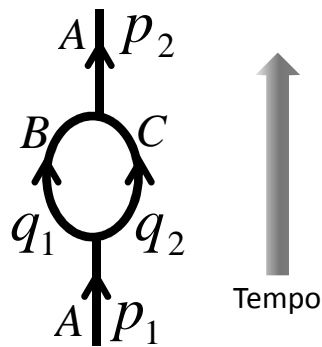
ponendo $p_1 = p_2 = p$ $q_1 = q$

$$\Rightarrow M(p) = \frac{ig^2}{(2\pi)^4} \int \frac{1}{[q^2 - m_B^2 c^2][(q - p)^2 - m_C^2 c^2]} dq^4$$

$$= \frac{ig^2}{(2\pi)^4} \int \frac{1}{[q_0^2 - \vec{q}^2 - m_B^2 c^2][(q_0 - p_0)^2 - (\vec{q} - \vec{p})^2 - m_C^2 c^2]} dq_0 d^3q$$

Gli integrali divergenti

Il diagramma a 'loop'.



$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \int & (-ig)(2\pi)^4 \delta^4(p_1 - q_1 - q_2) \times \\ & \times \frac{i}{q_1^2 - m_B^2 c^2} \frac{1}{(2\pi)^4} dq_1^4 \times \frac{i}{q_2^2 - m_C^2 c^2} \frac{1}{(2\pi)^4} dq_2^4 \times \\ & \times (-ig)(2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_2 - p_2) = \\ & = -i(2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2) \times \frac{ig^2}{(2\pi)^4} \int \frac{1}{[q_1^2 - m_B^2 c^2][(q_1 - p_2)^2 - m_C^2 c^2]} dq_1^4 \end{aligned}$$

ponendo $p_1 = p_2 = p$ $q_1 = q$

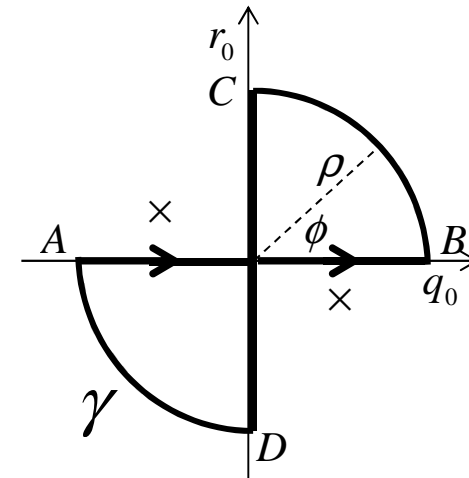
$$\begin{aligned} \Rightarrow M(p) &= \frac{ig^2}{(2\pi)^4} \int \frac{1}{[q^2 - m_B^2 c^2][(q - p)^2 - m_C^2 c^2]} dq^4 \\ &= \frac{ig^2}{(2\pi)^4} \int \frac{1}{[q_0^2 - \vec{q}^2 - m_B^2 c^2][(q_0 - p_0)^2 - (\vec{q} - \vec{p})^2 - m_C^2 c^2]} dq_0 d^3 q \end{aligned}$$

Esempio facoltativo

In primo luogo estendiamo le nostre variabili reali q_0 e p_0 al campo complesso ponendo $Q_0 = q_0 + i r_0$ e $P_0 = p_0 + i s_0$ (si noti che viene introdotta una parte immaginaria arbitraria), poi spostiamo poi i poli dall'asse reale di una quantità arbitraria ϵ che poi manderemo a zero. Il teorema dei residui, applicato al contorno a forma di 'otto' indicato in figura che esclude i poli, fornisce allora

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{[Q_0^2 - \vec{q}^2 - m_B^2 c^2][(Q_0 - P_0)^2 - (\vec{q} - \vec{p})^2 - m_C^2 c^2] + i\epsilon} dQ_0 d^3 q = 0$$

Assumendo la rappresentazione polare per la variabile d'integrazione e limitandoci a considerare gli archi BC e DA del contorno, si ha $Q_0 = \rho e^{i\phi}$ e $dQ_0 = i \rho e^{i\phi} d\phi$ (dato che su BC e DA ρ è costante). Ora si noti che l'elemento differenziale è proporzionale a ρ mentre la funzione integranda è proporzionale a $1/\rho^2$ per cui nel limite $\rho \rightarrow \infty$ (il che significa che i punti A e B si spostano essi stessi all'infinito sull'asse reale) l'integrazione sugli archi BC e AD può essere trascurata e l'integrale sul percorso chiuso si riduce ai soli integrali su CD e AB con la condizione che tali punti vadano all'infinito. Abbiamo allora



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[q_0^2 - \vec{q}^2 - m_B^2 c^2][(q_0 - p_0)^2 - (\vec{q} - \vec{p})^2 - m_C^2 c^2] + i\epsilon} dq_0 d^3 q + \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{1}{[(ir_0)^2 - \vec{q}^2 - m_B^2 c^2][(ir_0 - is_0)^2 - (\vec{q} - \vec{p})^2 - m_C^2 c^2] + i\epsilon} (idr_0) d^3 q = 0$$

da cui, nel limite $\epsilon \rightarrow 0$ e con ovvi passaggi, si ottiene, per l'integrale che ci interessa l'eguaglianza

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[q_0^2 - \vec{q}^2 - m_B^2 c^2][(q_0 - p_0)^2 - (\vec{q} - \vec{p})^2 - m_C^2 c^2]} dq_0 d^3 q = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[r_0^2 + \vec{q}^2 + m_B^2 c^2][(r_0 - s_0)^2 + (\vec{q} - \vec{p})^2 + m_C^2 c^2]} dr_0 d^3 q$$

Esempio facoltativo

Sostituendo nella espressione della ampiezza otteniamo

$$M = -\frac{g^2}{(2\pi)^4} \int \frac{1}{[r_o^2 + \vec{q}^2 + m_B^2 c^2][(r_o - s_o)^2 + (\vec{q} - \vec{p})^2 + m_c^2 c^2]} dr_o d^3 q$$

Si noti ora che la segnatura a denominatore non è più quella pseudoeuclidea tipica dei quadrivettori relativistici ma una normale segnatura euclidea quadridimensionale (a questo è servita la rotazione di Wick). Possiamo a questo punto riesprimere l'integrale attraverso vettori in quattro dimensioni con metrica euclidea

$$\hat{Q} = (r_o, \vec{q}) \quad \hat{P} = (s_o, \vec{p})$$

ottenendo

$$M = -\frac{g^2}{(2\pi)^4} \int \frac{1}{[\hat{Q}^2 + m_B^2 c^2][(\hat{Q} - \hat{P})^2 + m_c^2 c^2]} d^4 Q$$

Espresso l'integrale in una metrica euclidea quadridimensionale possiamo passare a variabili polari sferiche quadridimensionali ponendo

$$|\hat{Q}| = \sqrt{r_o^2 + q^2} = \lambda \quad dQ^4 = dr_o dq^3 = \lambda^3 d\lambda d\Omega$$

vediamo immediatamente che la funzione integranda e l'elemento differenziale si comportano asintoticamente come $1/\lambda^4$ e λ^3 rispettivamente da cui

$$M \approx -\frac{g^2}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^4} \lambda^3 d\lambda d\Omega = -\frac{g^2}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda} d\lambda d\Omega$$

ovvero un integrale logaritmicamente divergente.

Per lungo tempo difficoltà di questo tipo giustificavano un certo scetticismo nei confronti della teoria dei campi. Fu solo con i lavori di Weisskopf (1936) e, nell'immediato dopoguerra, Bethe (1947) che si mise a punto una tecnica di calcolo capace di aggirare il problema e rendere nuovamente predittiva la teoria dei campi. Subito dopo, i lavori, tra gli altri, di Feynmann, Schwinger e Tomonaga (1948-1949) ponevano le intuizioni di Weisskopf e Bethe su di una base generale e più rigorosa anche se le sottili questioni di carattere concettuale ed interpretativo che esse ponevano sono ancora oggi oggetto di dibattito e discussione.

La regolarizzazione degli integrali

Esistono diversi modi per eliminare la parte divergente di un integrale ma tutti basati sulla introduzione di una grandezza estranea alla fisica contenuta nel problema: il regolatore, un parametro che rende finito l'integrale e che viene rimosso nelle fasi successive del calcolo. Quando il risultato ottenuto dipendente dallo schema di regolarizzazione adottato si dice che la teoria possiede una anomalia. Gli schemi più importanti nella teoria quantistica dei campi sono

regolarizzazione di Pauli Villars: si modificano i propagatori (non i vertici) introducendo particelle massive fittizie (oppure ipotizzandone l'esistenza) la cui massa sarà poi mandata all'infinito al momento della rimozione del regolatore. In QED, ad esempio, l'accoppiamento di queste particelle è definito in modo tale da preservare la gauge invarianza dei propagatori così modificati;

regolarizzazione su reticolo: si calcolano gli integrali su uno spazio-tempo discretizzato (reticolo) che risultano convergenti fin tanto che il passo del reticolo rimane finito e che convergono al limite fisico nel momento in cui tale passo va a zero. Si tratta di uno schema che non richiede uno sviluppo perturbativo della interazione e quindi applicabile a teorie non affrontabili perturbativamente come la QCD ad esempio;

regolarizzazione Zeta: particolarmente utile in presenza di serie divergenti le quali vengono modificate in modo tale da potere essere eguagliate alla funzione Zeta di Riemann calcolata per un opportuno valore complesso. E' usata ad esempio nel calcolo dell'effetto Casimir;

regolarizzazione dimensionale: Introdotta da Giambiagi e Bollini nel 1972 fu quasi contemporaneamente utilizzata da Veltman e t'Hooft ed è nella loro forma che viene usata e rappresenta forse il migliore dei metodi di regolarizzazione oggi disponibili. Applicheremo questa tecnica agli integrali divergenti del nostro problema.

Esempio facoltativo

A grandi linee l'idea è quella di eseguire il calcolo dell'ampiezza in uno spazio dove il numero delle dimensioni è diminuito di una frazione ε e quindi di dimensione $4 - \varepsilon$. Attraverso una tecnica che vedremo risulta così agevole isolare in modo non ambiguo dall'integrale il termine divergente dopodichè ε viene mandato a zero per recuperare il risultato finale.

Richiamiamo allora la

$$M = -\frac{g^2}{(2\pi)^4} \int \frac{1}{[\hat{Q}^2 + m_B^2 c^2][(\hat{Q} - \hat{P})^2 + m_C^2 c^2]} d^4 Q$$

In primo luogo consideriamo l'identità $\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{1}{[A(1-x) + Bx]} dx$ che ci permette di riscrivere l'ampiezza come

$$\begin{aligned} M &= -\frac{g^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 \int \frac{1}{\{ [\hat{Q} + m_B^2 c^2](1-x) + [(\hat{Q} - \hat{P})^2 + m_C^2 c^2]x \}^2} dx d^4 Q = \\ &= -\frac{g^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 \int \frac{1}{\{ (\hat{Q} - \hat{P}x)^2 + \hat{P}^2 x(1-x) + m_B^2 c^2 (1-x) + m_C^2 c^2 x \}^2} dx d^4 Q = \\ &= -\frac{g^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 \int \frac{1}{\{ \hat{Q}'^2 + \hat{P}^2 x(1-x) + m_B^2 c^2 (1-x) + m_C^2 c^2 x \}^2} dx d^4 Q' = \\ &= -\frac{g^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 \int \frac{1}{\{ \hat{Q}'^2 + R(x) \}^2} dx d^4 Q' \end{aligned}$$

dove si è posto $R(x) = \hat{P}^2 x(1-x) + m_B^2 c^2 (1-x) + m_C^2 c^2 x$

Esempio facoltativo

Dato che g ha le dimensioni di una quantità di moto possiamo richiamare l'espressione ottenuta esprimendo l'accoppiamento nel modo seguente $g = g_0 Mc$

$$M = -\frac{g_0^2 (Mc)^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 \int \frac{dx d^4 Q'}{\{\hat{Q}'^2 + R^2(x)\}^2}$$

E' utile ora esprimere l'elemento di volume in coordinate sferiche quadridimensionali. Si noti che non comparendo gli angoli nella funzione integranda possiamo considerare direttamente il volume del guscio sferico quadridimensionale che vale (vedi Appendice 1)

$$dQ'^4 = |Q'|^3 d|Q'| \int \int \int d\Omega_4$$

sostituendo otteniamo l'espressione

$$M = -\frac{g_0^2 (Mc)^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 \int \frac{dx |Q'|^3 d|Q'|}{\{\hat{Q}'^2 + R^2(x)\}^2} \int \int \int d\Omega_4$$

che possiamo riscrivere facilmente nel caso che le dimensioni dello spazio vengano diminuite in modo continuo di una quantità arbitraria ε . Richiamando la A.1.3 (Vedi Appendice 1) si ottiene allora

$$M = -\frac{g_0^2 (Mc)^{2+\varepsilon}}{(2\pi)^{4-\varepsilon}} \int_0^1 \int \frac{dx |Q'|^{3-\varepsilon} d|Q'|}{\{\hat{Q}'^2 + R^2(x)\}^2} \int \int \int d\Omega_{4-\varepsilon} = -\frac{g_0^2 (Mc)^{2+\varepsilon}}{(2\pi)^{4-\varepsilon}} \frac{2\pi^{2-\varepsilon/2}}{\Gamma(2-\varepsilon/2)} \int_0^1 dx \int \frac{|Q'|^{3-\varepsilon} d|Q'|}{\{\hat{Q}'^2 + R^2(x)\}^2}$$

Possiamo ora eseguire l'integrale nel modulo di Q' ponendo per semplicità $|Q'|=Q$ e sfruttando le funzioni Beta e Gamma (vedi 6.2.1 e 6.2.2 pag 258 Abramowitz & Stegun)

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{|Q'|^{3-\varepsilon} d|Q'|}{\{\hat{Q}'^2 + R^2\}^2} &= \int_0^\infty \frac{Q^{3-\varepsilon} dQ}{\{Q^2 + R^2\}^2} = \int_0^\infty \frac{R^{3-\varepsilon} (Q/R)^{3-\varepsilon} R d(Q/R)}{R^4 \{(Q/R)^2 + 1\}^2} = \frac{1}{R^\varepsilon} \int_0^\infty \frac{\xi^{3-\varepsilon} d\xi}{\{\xi^2 + 1\}^2} = \frac{1}{R^\varepsilon} \int_0^\infty \frac{\xi^{3-\varepsilon} \frac{1}{2\xi} 2\xi d\xi}{\{\xi^2 + 1\}^2} = \\ &= \frac{1}{2R^\varepsilon} \int_0^\infty \frac{\xi^{2(1-\varepsilon/2)} d\xi^2}{\{\xi^2 + 1\}^2} = \frac{1}{2R^\varepsilon} \int_0^\infty \frac{\eta^{(1-\varepsilon/2)} d\eta}{\{\eta + 1\}^2} = \frac{1}{2R^\varepsilon} B(2-\varepsilon/2, \varepsilon/2) = \frac{1}{2R(x)^\varepsilon} \frac{\Gamma(2-\varepsilon/2)\Gamma(\varepsilon/2)}{\Gamma(2)} \end{aligned}$$

Esempio facoltativo

Sostituendo allora nella espressione della ampiezza otteniamo

$$\begin{aligned} M &= -\frac{g_0^2 (Mc)^{2+\varepsilon}}{(2\pi)^{4-\varepsilon}} \frac{\Gamma(2-\varepsilon/2)\Gamma(\varepsilon/2)}{2\Gamma(2)} \frac{2\pi^{2-\varepsilon/2}}{\Gamma(2-\varepsilon/2)} \int_0^1 \frac{dx}{R(x)^{\varepsilon/2}} = -\frac{g_0^2 (Mc)^{2+\varepsilon}}{(4\pi)^{2-\varepsilon/2}} \Gamma(\varepsilon/2) \int_0^1 \frac{dx}{R(x)^{\varepsilon/2}} = \\ &= -\frac{g_0^2 (Mc)^2}{(4\pi)^2} (4\pi)^{\varepsilon/2} (Mc)^{2\varepsilon/2} \Gamma(\varepsilon/2) \int_0^1 \frac{dx}{R(x)^{\varepsilon/2}} = -\frac{g_0^2 (Mc)^2}{(4\pi)^2} \Gamma(\varepsilon/2) \int_0^1 \left[\frac{4\pi (Mc)^2}{R(x)} \right]^{\varepsilon/2} dx \end{aligned}$$

In questa espressione l'unica singolarità risiede nella funzione $\Gamma(\varepsilon/2)$. Infatti, dalla espressione di R si deduce immediatamente che l'integrale è finito e può, pertanto, essere sviluppato in serie rispetto all'esponente ε della funzione integranda. Utilizzando la relazione

$$\lambda^{\varepsilon/2} = e^{\ln \lambda^{\varepsilon/2}} = e^{\varepsilon/2 \ln \lambda} \approx 1 + \frac{\varepsilon}{2} \ln \lambda = 1 - \frac{\varepsilon}{2} \ln \frac{1}{\lambda}$$

si ottiene per l'integrale

$$\int_0^1 \left[\frac{4\pi (Mc)^2}{R(x)} \right]^{\varepsilon/2} dx \approx \int_0^1 \left[1 - \frac{\varepsilon}{2} \ln \frac{R(x)}{4\pi (Mc)^2} \right] dx = 1 - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 \ln \frac{R(x)}{4\pi (Mc)^2} dx$$

mentre per la funzione Gamma (vedi 6.1.34 pag 256 Abramowitz & Stegun relativa a $1/\Gamma(z)$ da cui si ricava, sviluppando in serie per piccoli valori di z, l'espressione per $\Gamma(z)$)

$$\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \approx \frac{2}{\varepsilon} - a_2 - a_3 \frac{\varepsilon}{2} \quad a_2 \approx 0.57721 \quad a_3 \approx -065587$$

Sostituendo nella espressione della ampiezza otteniamo

Esempio facoltativo

$$M_{\text{Loop}} \approx -\frac{g_0^2 (Mc)^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} - a_2 - \int_0^1 \ln \frac{R(x)}{4\pi (Mc)^2} dx - \frac{\varepsilon}{2} a_3 + \frac{\varepsilon}{2} a_2 \int_0^1 \ln \frac{R(x)}{4\pi (Mc)^2} dx \right)$$

La proprietà rilevante di questa espressione è che la parte divergente risulta separata da quella finita. Infatti, per $\varepsilon \rightarrow 0$ il primo termine diverge mentre i rimanenti assumono un valore finito o nullo. Si esprime questo fatto affermando che l'integrale che compare nella espressione dell'ampiezza è stato regolarizzato.

Rinormalizzazione

La regolarizzazione dell'integrale dell'ampiezza serve ad enucleare la parte divergente che, nella fase successiva, detta rinormalizzazione, viene eliminata.

Richiamiamo il solo termine divergente nella espressione dell'ampiezza

$$M_{Loop}^{Divergente} \approx -\frac{g_0^2 (Mc)^2}{(4\pi)^2} \frac{2}{\epsilon}$$

nella sua forma essenziale l'idea della rinormalizzazione è quella di ritornare all'inizio del calcolo immaginando che, accanto al diagramma a loop che abbiamo calcolato e che contiene il termine divergente appena scritto, esista un diagramma addizionale, esso stesso divergente, capace di produrre nell'ampiezza un contributo di eguale modulo ma opposto in segno

$$M_{Correzione}^{Divergente} = \frac{g_0^2 (Mc)^2}{(4\pi)^2} \frac{2}{\epsilon}$$

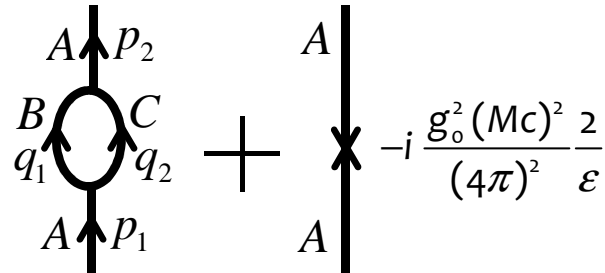
ovvero in grado di eliminare esattamente la parte divergente di M_{Loop} .

Ora un contributo costante all'ampiezza non può che originarsi dal vertice (vedi il calcolo del Decadimento di A in B e C) e, tenendo conto della seconda regola di Feynmann per il nostro problema, si capisce immediatamente che è necessario ipotizzare un contributo del vertice dato dalla espressione seguente detta **controtermine**

$$-i \frac{g_0^2 (Mc)^2}{(4\pi)^2} \frac{2}{\epsilon}$$

Esempio facoltativo

Esprimendo attraverso i consueti diagrammi questa strategia avremmo dunque dovuto calcolare i seguenti termini



Loop calcolato con le regole di Feynmann
(valore divergente)

Controtermine calcolato per definizione con questa regola
(valore divergente)

che ci avrebbero condotto alla seguente espressione dell'ampiezza chiaramente convergente per qualunque valore di ϵ

$$M \approx M_{\text{Loop}} + M_{\text{Controt}} \approx -\frac{g_0^2 (Mc)^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - a_2 - \int_0^1 \ln \frac{R(x)}{4\pi (Mc)^2} dx - \frac{\epsilon}{2} a_3 + \frac{\epsilon}{2} a_2 \int_0^1 \ln \frac{R(x)}{4\pi (Mc)^2} dx \right) + \frac{g_0^2 (Mc)^2}{(4\pi)^2} \frac{2}{\epsilon} \approx -\frac{g_0^2 (Mc)^2}{(4\pi)^2} \left(-a_2 - \int_0^1 \ln \frac{R(x)}{4\pi (Mc)^2} dx - \frac{\epsilon}{2} a_3 + \frac{\epsilon}{2} a_2 \int_0^1 \ln \frac{R(x)}{4\pi (Mc)^2} dx \right)$$

Si può allora ristabilire il numero corretto di dimensioni spaziali che competono al nostro problema mandando ϵ a zero ed ottenendo l'**ampiezza rinormalizzata** di valore finito

$$M_{\text{Rinormalizzata}} = M_{\text{Loop}} + M_{\text{Corr}} = -\frac{g_0^2 (Mc)^2}{(4\pi)^2} \left(-a_2 - \int_0^1 \ln \frac{R(x)}{4\pi (Mc)^2} dx \right)$$

Esempio facoltativo

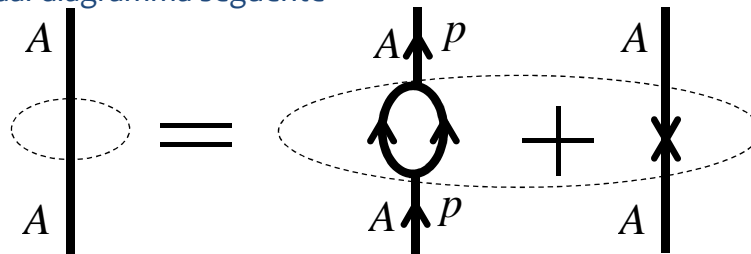
Si noti ora che l'ampiezza rinormalizzata

$$M_{\text{Rinormalizzata}} = -\frac{g_0^2 (Mc)^2}{(4\pi)^2} \left(-a_2 - \int_0^1 \ln \frac{R(x)}{4\pi (Mc)^2} dx \right)$$

può essere interpretata come derivante da un vertice che complessivamente assume il valore finito (valido al secondo ordine) dato dalla espressione seguente (vedi il calcolo del Decadimento di A in B e C e la seconda regola di Feynmann)

$$\Sigma(p) = -i \frac{g_0^2 (Mc)^2}{(4\pi)^2} \left(a_2 + \int_0^1 \ln \frac{R(x)}{4\pi (Mc)^2} dx \right)$$

e dipendente dalla quantità di moto (vedi espressione di R(x)). Esprimendo gli stessi concetti in termini grafici, l'ampiezza rinormalizzata può essere espressa dal diagramma seguente



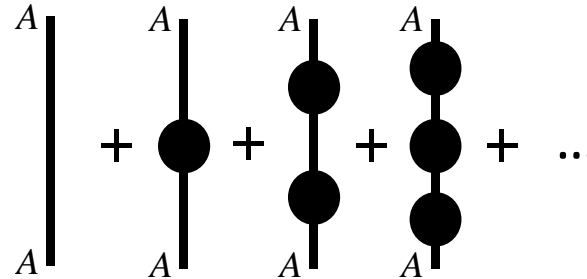
Calcolato per definizione con questa regola
(valore finito)

con la condizione che il vertice venga calcolato non con le ordinarie regole di Feynmann ma secondo la nuova regola che gli associa il valore $\Sigma(p)$ dipendente dall'impulso.

Per quanto detto in precedenza la ridefinizione del valore da associare al vertice si riflette non solo nelle interazioni cui la particella A potrà essere soggetta ma anche sulle sue proprietà intrinseche come mostreremo immediatamente.

Esempio facoltativo

Per vedere quali proprietà intrinseche della particella vengano coinvolte dalla procedura di rinormalizzazione ricordiamo che, in generale, la particella libera può essere pensata come la somma dei processi per cui $A \rightarrow A$ (diffusione di A in A) per cui vi contribuiscono le seguenti ampiezze



Se tali diagrammi dovessero trovarsi all'interno di altri diagrammi più grandi come linee interne essi porterebbero alla seguente serie di propagatori

$$\frac{i}{q_A^2 - m_A^2 c^2} + \frac{i}{q_A^2 - m_A^2 c^2} (-i\Sigma) \frac{i}{q_A^2 - m_A^2 c^2} + \frac{i}{q_A^2 - m_A^2 c^2} (-i\Sigma) \frac{i}{q_A^2 - m_A^2 c^2} (-i\Sigma) \frac{i}{q_A^2 - m_A^2 c^2} + \dots$$

che può essere facilmente sommata

$$\frac{i}{q_A^2 - [m_A^2 + \Sigma(p)/c^2] c^2}$$

e dalla quale si evince che ogni modifica del vertice si riflette su di una corrispondente variazione della massa della particella per cui la rinormalizzazione del vertice determina una corrispondente rinormalizzazione della massa della particella la quale, oltretutto, diventa una funzione dell'impulso.

La rinormalizzazione a tutti gli ordini di approssimazione

Ora vogliamo vedere se la nostra teoria è rinormalizzabile anche agli ordini successivi.

Per sviluppare i nostri ragionamenti con una certa generalità osserviamo che per qualunque diagramma sussiste la seguente relazione tra numero E di linee esterne, numero L di linee interne e numero V di vertici

$$E + 2L = 3V$$

D'altra parte ciascuna linea interna porta un propagatore ed una integrazione nel corrispondente impulso, mentre ad ogni vertice è associata una funzione delta sugli impulsi entranti e uscenti

$$\left(\frac{1}{q^2} d^4q\right)^L \quad \delta^4(q)^V$$

Si possono poi eseguire $(V-1)$ integrazioni delle funzioni delta (la delta sull'impulso esterno non viene integrata) che eliminano $(V-1)$ elementi d'integrazione d^4q per cui abbiamo l'integrale

$$\int \delta^4(q)^V \left(\frac{1}{q^2} d^4q\right)^L = \delta^4(q) \int \left(\frac{1}{q^2}\right)^L (d^4q)^{L-(V-1)} = \delta^4(q) \int \left(\frac{1}{q^2}\right)^L (q^3 dq)^{L-(V-1)} = \delta^4(q) \int q^{L-3V+3} dq^{L-(V-1)}$$

che risulta divergente se

$$L - 3V + 3 \geq -1$$

ovvero, sostituendo $L=(3V-E)/2$ e tenendo conto che $E \geq 2$ sempre, se

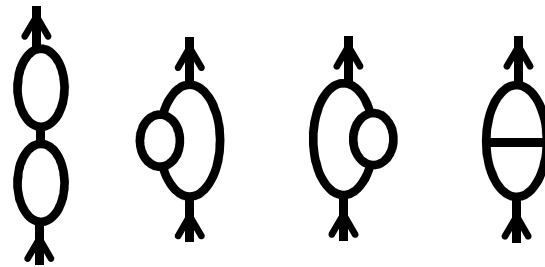
$$V \leq 2$$

Dato che $V=1$ è un diagramma convergente, l'unico diagramma divergente ha due vertici ($V=2$), almeno due linee esterne ($E \geq 2$) e quindi due linee interne ($L=(3V-E)/2$). Possiamo allora affermare che il diagramma loop è l'**unico diagramma divergente** contenuto nella nostra teoria.

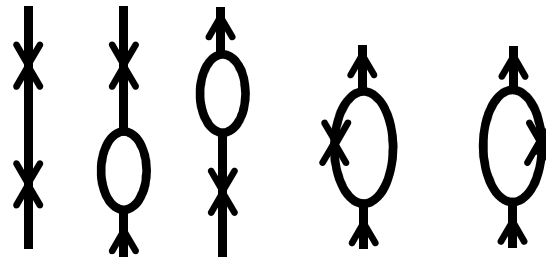
Esempio facoltativo

Ne consegue allora che un unico controtermine come quello che abbiamo introdotto è sufficiente per eliminare i diagrammi divergenti in ogni ordine successivo di approssimazione nel calcolo dell'ampiezza.

Ad esempio i diagrammi del quarto ordine della nostra teoria sono i seguenti



ed è relativamente semplice mostrare che i seguenti controtermini, costruiti a partire da quello che elimina la divergenza del diagramma loop, eliminano le divergenze che insorgono a questo ordine di approssimazione



Questo stesso ragionamento può essere ripetuto a qualsiasi ordine successivo per cui perveniamo alla conclusione che, nella nostra teoria, un solo controtermine è sufficiente per eliminare le divergenze a qualunque ordine di approssimazione. Quando questo accade si dice che la teoria di campo è rinormalizzabile.

Considerazioni finali

- i) Esistono diverse procedure di regolarizzazione degli integrali divergenti. Oggi si tende a preferire la regolarizzazione dimensionale in quanto conserva tutte le simmetrie del sistema fisico tuttavia il senso fisico della stessa, al pari delle altre, non risulta stabilito;
- ii) la procedura di rinormalizzazione prevede la eliminazione di una grandezza fisica in se divergente attraverso l'introduzione, ad hoc, di un controtermine altrettanto divergente capace di eliminarla. Si tratta di un aspetto evidentemente assai critico sia sotto il profilo del rigore matematico che della interpretazione fisica.

Qualunque sia l'opinione su questo modo di procedere è chiaro che la possibilità di rimuovere tutti i termini divergenti attraverso un numero finito di controtermini (nella nostra teoria un solo controtermine) è in se non banale e permette di dividere le teorie di campo in due classi ben distinte:

- i) le teorie non rinormalizzabili ovvero quelle teorie la cui rimozione degli infiniti richiederebbe un numero infinito di controtermini ;
- ii) le teorie rinormalizzabili ovvero quelle teorie la cui rimozione degli infiniti richiede un numero finito di controtermini ;

Benchè questa ripartizione sia un fatto oggettivo sul suo significato vi sono, ancora una volta, opinioni discordanti. Fino ad oggi si è più o meno implicitamente ritenuto che le teorie di campo associate alle interazioni naturali dovessero essere rinormalizzabili relegando le teorie di campo non rinormalizzabili tra le teorie patologiche. Oggi questo orientamento è cambiato...

A1 Angolo solido ipersferico

Vogliamo calcolare l'elemento di angolo solido di una ipersfera. In analogia con il caso tridimensionale avremo

$$d\Omega_N = \frac{dA_N}{R^{N-1}}$$

dove dA_N è l'elemento di superficie della ipersfera (sfera immersa nello spazio N-dimensionale). Ora si noti che il differenziale del volume ipersferico V_N è uguale al volume del guscio ipersferico per cui, indicando con A_N la superficie della ipersfera, possiamo scrivere

$$dV_N = dR A_N = dR \times \int_{\text{superficie ipersfera}} dA_N = dR \times \int_{\text{angolosolido ipersfera}} R^{N-1} d\Omega_N = dR R^{N-1} \times \int_{\text{angolosolido ipersfera}} d\Omega_N$$

da cui otteniamo la formula seguente che connette l'integrale dell'angolo solido ipersferico alla derivata, rispetto ad R del volume ipersferico

$$\int_{\text{angolosolido ipersfera}} d\Omega_N = \frac{1}{R^{N-1}} \frac{dV_N}{dR} \quad (\text{A1.1})$$

questo significa che ora dovremo calcolare il volume ipersferico.

Esempio facoltativo

Calcoliamo esplicitamente il volume di sfera in 4 dimensioni. Si ha semplicemente

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = R^2 \quad t = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} \quad V_4 = \int_{-\sqrt{R^2 - y^2 - z^2}}^{+\sqrt{R^2 - y^2 - z^2}} \int_{-\sqrt{R^2 - z^2}}^{+\sqrt{R^2 - z^2}} \int_{-R}^{+R} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} \, dx \, dy \, dz$$

e quindi i seguenti passaggi con ovvie sostituzioni di variabile negli integrali

$$V_4 = \int_{-\sqrt{R^2 - y^2 - z^2}}^{+\sqrt{R^2 - y^2 - z^2}} \int_{-\sqrt{R^2 - z^2}}^{+\sqrt{R^2 - z^2}} \int_{-R}^{+R} (R^2 - y^2 - z^2) \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2 - y^2 - z^2}} \, d\frac{x}{\sqrt{R^2 - y^2 - z^2}} \, dy \, dz$$

$$V_4 = \int_{-1}^{+1} \sqrt{1 - \xi^2} \, d\xi \int_{-\sqrt{R^2 - z^2}}^{+\sqrt{R^2 - z^2}} \int_{-R}^{+R} (R^2 - z^2)^{3/2} \left(1 - \frac{y^2}{R^2 - z^2}\right) \, d\frac{y}{\sqrt{R^2 - z^2}} \, dz =$$

$$V_4 = \int_{-1}^{+1} \sqrt{1 - \xi^2} \, d\xi \int_{-1}^{+1} (1 - \xi^2) \, d\xi \int_{-R}^{+R} R^4 \left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right)^{3/2} \, d\frac{z}{R}$$

$$V_4 = \int_{-1}^{+1} (1 - \xi^2)^{1/2} \, d\xi \int_{-1}^{+1} (1 - \xi^2)^{2/2} \, d\xi \int_{-1}^{+1} (1 - \xi^2)^{3/2} \, d\xi \, R^4$$

Possiamo allora intuire che l'espressione generale del volume di una ipersfera in N dimensioni sarà

$$V_N = 2^{N-1} R^N \int_0^1 (1 - \xi^2)^{\frac{1}{2}} \, d\xi \int_0^1 (1 - \xi^2)^{\frac{2}{2}} \, d\xi \dots \int_0^1 (1 - \xi^2)^{\frac{N-1}{2}} \, d\xi$$

Esempio facoltativo

Consideriamo ora l'espressione generale appena trovata

$$V_N = 2^{N-1} R^N \int_0^1 (1-\xi^2)^{\frac{1}{2}} d\xi \int_0^1 (1-\xi^2)^{\frac{2}{2}} d\xi \dots \int_0^1 (1-\xi^2)^{\frac{N-1}{2}} d\xi$$

ed eseguiamo il cambio di variabile $1-\xi^2=t$, si ottiene

$$V_N = 2^{N-1} R^N \int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{1-t}} dt \int_0^1 \frac{t^{\frac{2}{2}}}{2\sqrt{1-t}} dt \dots \int_0^1 \frac{t^{\frac{N-1}{2}}}{2\sqrt{1-t}} dt = R^N \int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-t}} dt \int_0^1 \frac{t^{\frac{2}{2}}}{\sqrt{1-t}} dt \dots \int_0^1 \frac{t^{\frac{N-1}{2}}}{\sqrt{1-t}} dt$$

In questa forma gli integrali sono riconducibili alla funzione Beta associata a sua volta alla funzione Gamma di Eulero (vedi Abramowitz & Stegun, pag.258, 6.2.1)

$$V_N = R^N B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) B\left(\frac{4}{2}, \frac{1}{2}\right) \dots B\left(\frac{N+1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

il risultato può essere riespresso attraverso la funzione Gamma (vedi Abramowitz & Stegun, pag.258, 6.2.2) e poi semplificato (pag. 255-256, 6.1.8, 6.1.9, 6.1.15)

$$V_N = R^N \frac{\Gamma(\frac{3}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{4}{2})} \frac{\Gamma(\frac{4}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{5}{2})} \dots \frac{\Gamma(\frac{N+1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{N+2}{2})} = 2 R^N \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{N+2}{2})} = 2 R^N \pi^{\frac{N-1}{2}} \frac{1}{2} \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{N}{2})}$$

da cui segue il volume di una ipersefera di dimensione N e raggio R

$$V_N = \frac{2R^N \pi^{\frac{N}{2}}}{N \Gamma(\frac{N}{2})}$$

(A1.2)

Esempio facoltativo

Dalla (1.2), richiamando la (1.1), è immediato ricavare l'espressione dell'integrale dell'angolo solido nello spazio N-dimensionale

$$\int_{\substack{\text{angolo solido} \\ \text{ipersfera}}} d\Omega_N = \frac{2 \pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(\frac{N}{2})} \quad (\text{A1.3})$$