
Fisica Nucleare e Subnucleare

Corso a.a. 2014-2015

Prof. Nicola Semprini Cesari

Sito Web personale: <http://ishtar.df.unibo.it>

Email: semprini@bo.infn.it

1. INTRODUZIONE

Con l'inevitabile grado di approssimazione di ogni tentativo di classificazione, possiamo suddividere la fisica nelle due grandi macroaree della **fisica fondamentale** – orientata allo studio degli enti fondamentali della realtà fisica e delle loro proprietà - e della **fisica applicata** – che invece utilizza la fisica nella direzione di possibili applicazioni di carattere tecnologico – andando così a costituire la base delle varie aree della **ingegneria** dove tali conoscenze si concretizzano nella progettazione, costruzione, mantenimento e miglioramento di 'macchine' sia nel senso materiale (macchine, apparati) che immateriale del termine (processi di vario tipo).

Un aspetto fondamentale da sottolineare immediatamente riguarda la natura assolutamente provvisoria e non definitiva di questa suddivisione, con ciò volendo affermare che una volta che un certo corpo di leggi trova la sua formulazione definitiva all'interno della fisica fondamentale, il testimone passa alla fisica applicata che ne esplora a fondo le potenzialità tecnologiche e di qui, infine, alla ingegneria che seleziona le tecnologie che possono svilupparsi in macchine e processi utili e sostenibili.

Non è difficile verificare storicamente questo progressivo spostamento di intere discipline della fisica fondamentale verso la fisica applicata e poi verso l'ingegneria. La meccanica e elettromagnetismo hanno oramai compiuto l'intero percorso, la meccanica quantistica sta entrando ora nel pieno della esplorazione in campo ingegneristico, la teoria dei campi quantistici sta completando la sua permanenza

all'interno della fisica fondamentale mentre la teoria delle stringhe prima o poi vi entrerà.

Il corso, di livello introduttivo e centrato sulla fisica nucleare non applicativa e sulla fisica delle particelle, si colloca certamente all'interno della fisica fondamentale. Quale è il suo assetto? Con l'inevitabile grado di approssimazione già citato la fisica fondamentale ha (e forse non può non avere) una impostazione chiaramente **riduzionista** nel senso che parte dall'assunto che le proprietà della realtà fisica siano determinate dalle proprietà degli *enti costituenti* i quali pertanto diventano l'oggetto primario dello studio [va detto che da più parti della fisica si accumulano evidenze che non sempre le proprietà di un sistema coincidono con la 'somma' delle proprietà dei suoi costituenti un fatto che, una volta acquisito, cambierà radicalmente l'assetto che stiamo discutendo poiché separerà la fisica in 'strati successivi' caratterizzati da proprie leggi in larga misura indipendenti da quelle degli 'strati adiacenti'. A questo punto non esisterà più una fisica fondamentale in senso gerarchico e lo studio degli enti costituenti la realtà fisica sarà semplicemente lo studio degli enti costituenti la realtà fisica, valido all'interno del proprio 'strato' ma privato della sua funzione di fondamento della intera fisica].

Nonostante nel corso della storia abbiano cambiato radicalmente il loro significato, da tempo gli enti fondamentali sono individuati nei concetti di **spazio** (S), **tempo** (T), **particella** (P) e **forza** (F).

Con la formulazione della teoria della relatività ristretta, della meccanica quantistica e, infine, della teoria quantistica dei campi, dunque sostanzialmente nell'ultimo secolo, si è compreso che non è possibile fornire definizioni omogenee e illimitatamente valide di tali concetti. In particolare i fatti sperimentali, poi acquisiti dalla speculazione teorica, hanno chiarito che esistono due differenti domini nella **scala delle distanze** e due differenti domini nella **scala delle velocità**.

Nella scala delle distanze il punto di separazione cade più o meno alle dimensioni dell'atomo vale a dire a circa **10^{-8} cm** poiché al di sotto di tale valore si deve ricorrere al **concetto quantomeccanico di particella** (MQ) ed alla equazione d'onda di Schroedinger (si ricordi però che la meccanica quantistica non fissa questo valore ponendo il noto problema della *demarcazione*) mentre al di sopra di tale valore sono giustificati il **concetto classico di punto materiale** e la equazione del moto di Newton.

Nella scala delle velocità la teoria della relatività ristretta (TRR) pone come riferimento la velocità della luce c . Nel caso siano in gioco velocità piccole rispetto a quella della luce sono giustificati i **concetti classici di spazio e tempo**, mentre in caso contrario si deve ricorrere ai ben definiti **concetti relativistici di spazio e tempo** di ispirazione fortemente operazionista (una caratteristica assai positiva della TRR è che il passaggio tra i due regimi avviene in modo graduale e continuo secondo espressioni chiare in ogni dominio).

All'interno di questi differenti domini cambia anche il **concetto di forza** o interazione evolvendosi dalla semplice

azione a distanza della fisica newtoniana, al concetto di *campo classico* in ultima analisi richiesto dalla teoria della relatività ristretta (ma, si badi bene, incorporato già a forza nella fisica classica attraverso l'elettromagnetismo) fino a giungere al radicale concetto di *campo quantizzato* dove viene sostanzialmente superata la tradizionale separazione tra forza e particella.

Potremmo allora sintetizzare questi fatti in uno schema ottenuto introducendo un asse delle distanze ed un asse delle velocità e riportando i valori che separano i diversi regimi. Emergono così **quattro domini** caratterizzati da diverse definizioni dei concetti basilari di spazio (S), tempo (T), particella (P) e forza (F) (vedi pagina seguente). All'interno di tali domini vanno poi a collocarsi le nostre **teorie fondamentali** che danno forte risalto ai concetti di particella (P) e forza (F) poiché sono interessate alla evoluzione temporale di sistemi di particelle interagenti ma che si fondano su di una sottostante concezione dello spazio e del tempo. Per questo, nella pagina ancora successiva, riportiamo uno schema dove S e T vengono omessi, per quanto riguarda P ci si riferisce alla equazione dinamica e per quanto riguarda le forze vengono specificate le interazioni naturali oggi note.

L'assetto generale della fisica fondamentale

R < 10 ⁻⁸ cm	ST	intervalli spaziali e temporali assoluti che soddisfano le trasformazioni di Galileo; leggi naturali che soddisfano il principio di relatività galileiano.	ST	intervalli spaziali e temporali relativi ma spazio-temporali assoluti che soddisfano le trasformazioni di Lorentz; leggi naturali che soddisfano il principio di relatività einsteiniano.	
	P	Particella quantomeccanica descritta da una funzione d'onda $\Psi(\vec{r}, t)$ della quale è osservabile il modulo quadrato (4).	PF	L'ente fondamentale è il campo quantizzato associato sia alle particelle materiali che alle interazioni. Le interazioni sono un processo locale e statistico di trasferimento di quantità discrete di energia impulso etc. etc. (multiple di una quantità minima detta quanto) tra i campi della materia ed i campi delle forze. Le particelle si devono identificare con quanti di energia etc. etc. scambiati tra tali campi (5).	
	F	azione istantanea a distanza oppure teorie di campo basate sul concetto di etere meccanico che violano il principio di relatività galileiano.			
R > 10 ⁻⁸ cm	ST	intervalli spaziali e temporali assoluti che soddisfano le trasformazioni di Galileo; leggi naturali che soddisfano il principio di relatività galileiano.	ST	intervalli spaziali e temporali relativi ma spazio-temporali assoluti che soddisfano le trasformazioni di Lorentz; leggi naturali che soddisfano il principio di relatività einsteiniano.	
	P	punto materiale classico con posizione spaziale e temporale definita e descritta da $\vec{r}(t)$ (1).	P	punto materiale classico con posizione spaziale e temporale definita e descritta da $\vec{r}(t)$.	
	F	azione istantanea a distanza oppure teorie di campo basate sul concetto di etere meccanico che violano il principio di relatività galileiano (2).	F	teorie di campo basate sul concetto di etere non meccanico o relativistico che soddisfano il principio di relatività einsteiniano (3).	
		$V \ll c$		$V \sim c$	

(1) il punto materiale è un 'grano' di materia pensata come un fluido continuo privo di struttura interna.

(2) l'elettromagnetismo che si inquadra nella fisica classica è quello formulato inizialmente da Maxwell, basato sul concetto di etere meccanico ma oramai superato (nei nostri corsi, ancor oggi, si insegna uno strano ibrido!).

(3) E' oramai chiaro che la fisica non può fare a meno del concetto di etere (forze inerziali, etc. etc.) che però non è di natura meccanica ed è in accordo con la TTR.

(4) la particella quantomeccanica ha proprietà assai diverse da quella classica potendo al tempo stesso dare luogo, a seconda della situazione sperimentale, a fenomeni di natura particellare ma anche di natura ondulatoria.

(5) viene superata la tradizionale separazione in particelle ed interazioni riducendosi entrambe a pure manifestazioni del campo che è l'ente fisico davvero fondamentale.

Fisica Nucleare

Da un punto di vista di principio la fisica nucleare dovrebbe essere un capitolo del modello standard (stati legati di quark leggeri) tuttavia, la teoria delle interazioni forti, la Cromodinamica, non è ancora matura per affrontare il problema del nucleo atomico a partire dai principi primi per cui ci appoggia a teorie approssimate di tipo fenomenologico spesso nell'ambito della meccanica quantistica e non della teoria dei campi.

$R < 10^{-8}$ cm	P	Equazione di Schroedinger	PF	Teorie di campo quantizzato, equazioni di Schroedinger e Heisenberg	+	definizione dei campi materiali fondamentali =	
	F	FG	Gravitazione Newtoniana	FG			non esiste una teoria coerente della gravitazione
	FD	Teorie fenomenologiche	FD	Teoria elettrodebole. Incorpora la Elettrodinamica Quantistica			
	FE	Elettromagnetismo classico	FE	Elettrodinamica Quantistica			
	FF	Teorie fenomenologiche	FF	Cromodinamica Quantistica			
$R > 10^{-8}$ cm	P	Secondo principio della dinamica	P	Secondo principio della dinamica in forma covariante	+	Fisica delle Particelle Modello Standard	
	F	FG	Gravitazione Newtoniana. Azione a distanza.	F			Teoria della Relatività Generale. Teoria di campo in accordo con i concetti relativistici di spazio e tempo e con il principio di relatività einsteniano
	FD	assente macroscopicamente	FD	assente macroscopicamente			
	FE	Elettromagnetismo Classico. Teoria di campo nell'ambito dei concetti classici di spazio e tempo e del principio di relatività galileiano (ibrido!)	FE	Elettromagnetismo. teoria di campo in accordo con i concetti relativistici di spazio e tempo e con il principio di relatività einsteniano			
	FF	assente macroscopicamente	FF	assente macroscopicamente			
		$V \ll c$		$V \sim c$			

Le unità di misura nella fisica nucleare e subnucleare

Il **Sistema Internazionale**, fondato sulle unità di misura meccaniche [metro (m), secondo (s), kilogrammo (Kg)], elettromagnetiche [Ampere (A)], termodinamiche [Kelvin (K)] etc. etc. **non è adatto per la descrizione delle grandezze fisiche subatomiche** [raggio nucleare $\sim 10^{-15}$ m; vita media muone 2.2×10^{-6} s; massa elettrone 9.1×10^{-31} kg; ...]. **Come si costruisce un sistema di unità di misura più adeguato?** Sono necessarie alcune premesse.

□ Unità di misura fondamentali e derivate

La scelta del campione di unità di misura è, in linea di principio, assolutamente arbitraria anche se col tempo si è capito che è bene attenersi ad alcune semplici regole pienamente recepite dai moderni sistemi di unità di misura:

- **l'unità deve essere connessa ad un fenomeno naturale** che riteniamo stabile ed invariabile nel tempo piuttosto che ad un oggetto e manufatto particolare (questo potrebbe deteriorarsi o modificare le sue proprietà con il tempo);
- **l'unità deve essere riproducibile in laboratorio con una relativa facilità** (in realtà è lavoro da professionisti quali sono i metrologi!);
- **le unità non devono essere ridondanti** e devono costituire un sistema di grandezze fisiche irriducibili dette **fondamentali** dalle quali derivare tutte le altre che invece vengono dette **derivate**.

Le grandezze fisiche fondamentali portate dalle diverse aree della fisica sono:

Meccanica	metro (m), secondo (s), kilogrammo (Kg)
Termodinamica	grado Kelvin (K);
Teoria della gravitazione	nessuna nuova unità di misura (a causa della rigorosa proporzionalità tra massa inerziale e gravitazionale);
Teoria elettromagnetica	ampere (A)
Teoria della relatività	nessuna nuova unità di misura
Meccanica Quantistica	nessuna nuova unità di misura

□ Costanti fisiche

Accanto alle grandezze fisiche fondamentali, ogni area della fisica introduce anche specifiche **costanti fisiche** sia **dimensionali** che **adimensionali** (il cui valore numerico rispettivamente dipende e non dipende dalla scelta delle unità di misura. Le costanti adimensionali assai spesso sono il sintomo di incompletezze nella teoria sottostante). Tali costanti possono riferirsi a classi di fenomeni interni alla area stessa (**costanti di rango locale**) oppure essere di validità generale (**costanti di rango universale**):

Meccanica	nessuna costante caratteristica
Termodinamica	costante dei gas R o costante Boltzmann k e numero di Avogadro N_A ($R=k N_A$)
Teoria della gravitazione	costante di gravitazione G
Teoria elettromagnetica	ϵ_0 e μ_0 oppure ϵ_0 e c dove $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ (costante di rango locale)
Teoria della relatività	eleva c a costante dello spazio-tempo di rango universale
Meccanica Quantistica	eleva h (\hbar) a costante dei fenomeni microscopici di rango universale

□ I sistemi naturali di unità di misura

Premesso che stabilire l'appartenenza di una costante ad uno dei due gruppi non è sempre semplice (molti sono i casi di costanti passate da un gruppo all'altro: ad esempio la velocità della luce), la constatazione che in fisica esistono costanti di rango universale suggerì a Planck di assumerle nel ruolo di grandezze fisiche fondamentali. *Un sistema di unità di misura che assume come grandezze fisiche fondamentali delle costanti naturali di rango universale viene detto **Sistema Naturale**. E' evidente che questo modo di procedere comporta una ridefinizione di tutte le grandezze fisiche di una teoria da quelle - come la lunghezza, il tempo, la massa - che solitamente vengono assunte come fondamentali.*

Planck, in un celebre articolo presentato nel 1899 all'accademia di Berlino, sviluppò un Sistema Naturale basato sulle costanti universali G (costante di gravitazione), k (costante di Boltzmann), c (velocità della luce) ed h (costante di Planck) con la idea di individuare scale di lunghezze, tempi, masse e temperature connesse con i fenomeni naturali e non da una qualche convenzione di natura metrologica (fare questo utile esercizio). In fisica nucleare e subnucleare si costruisce una scala naturale un poco diversa ma sostanzialmente basata sugli stessi principi.

□ Il sistema naturale della Fisica Nucleare e delle Particelle

Dato che la **teoria della relatività ristretta** e la **meccanica quantistica** forniscono il quadro concettuale all'interno del quale devono collocarsi tutte le teorie fisiche **le costanti universali \hbar e c costituiscono una coppia di grandezze fisiche fondamentali**. Poiché relatività e meccanica quantistica sono fondate sulle tre dimensioni fondamentali L , T ed M , occorre scegliere una terza grandezza fondamentale.

Il particolare ruolo giocato in fisica nucleare e delle particelle dalle macchine acceleratrici il cui parametro più significativo è l'energia, suggerisce di **assumere come terza grandezza fondamentale l'energia E misurata in elettronvolt (1 eV è l'energia cinetica acquisita da un elettrone accelerato da una differenza di potenziale di un volt: $E_{cin}=eV$ da cui $1 eV = 1.602 \times 10^{-19} J$)**.

Definito il Sistema Naturale della Fisica Nucleare e delle Particelle (SNFNP) possiamo facilmente calcolare il valore delle conversioni tra le sue unità di misura fondamentali e quelle del Sistema internazionale (SI).

Le seguenti equazioni dimensionali forniscono il passaggio dal SI al SNFNP

$$c = L / T \quad \varepsilon = Mc^2 \quad \hbar = \varepsilon T$$

(si noti che con le lettere minuscole indichiamo le grandezze fondamentali del sistema naturale della fisica delle particelle e con le maiuscole quelle del sistema internazionale) dalle quali otteniamo anche quelle per il passaggio dal SNFNP al SI

$$L = \hbar c / \varepsilon \quad T = \hbar / \varepsilon \quad M = \varepsilon / c^2$$

Tenendo ora presenti i seguenti valori delle costanti e della unità di energia nel Sistema Internazionale

$$\hbar = 1.05 \times 10^{-34} J \cdot s \quad c = 2.99 \times 10^8 m / s \quad \hbar c = 3.14 \times 10^{-26} J \cdot m$$

e della conversione tra Joule (J) ed elettronvolt (eV)

$$1eV = 1.60 \times 10^{-19} J$$

otteniamo le seguenti conversioni

$$L = \frac{\hbar c}{\varepsilon} \quad 1\left(\frac{\hbar c}{\text{eV}}\right) = \frac{3.14 \times 10^{-26} \text{ J} \cdot \text{m}}{1.60 \times 10^{-19} \text{ J}} = 1.96 \times 10^{-7} \text{ (m)}$$
$$T = \frac{\hbar}{\varepsilon} \quad 1\left(\frac{\hbar}{\text{eV}}\right) = \frac{1.05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{1.60 \times 10^{-19} \text{ J}} = 6.56 \times 10^{-16} \text{ (s)}$$
$$M = \frac{\varepsilon}{c^2} \quad 1\left(\frac{\text{eV}}{c^2}\right) = \frac{1.60 \times 10^{-19} \text{ J}}{(2.99 \times 10^8 \text{ m/s})^2} = 1.79 \times 10^{-36} \text{ (Kg)}$$

che risulta conveniente esprimere in unità di femtometri (anziché metri) e MeV (anziché elettronvolt) più adeguate nella fisica nucleare e delle particelle elementari. Otteniamo allora le seguenti trasformazioni

SNFNP → SI

$$1\left(\frac{\hbar c}{\text{MeV}}\right) = 196 \text{ (fm)}$$
$$1\left(\frac{\hbar}{\text{MeV}}\right) = 6.56 \times 10^{-22} \text{ (s)}$$
$$1\left(\frac{\text{MeV}}{c^2}\right) = 1.79 \times 10^{-30} \text{ (Kg)}$$

SI → SNFNP

$$1 \text{ (fm)} = \frac{1}{196} \left(\frac{\hbar c}{\text{MeV}}\right)$$
$$1 \text{ (s)} = \frac{1}{6.56 \times 10^{-22}} \left(\frac{\hbar}{\text{MeV}}\right)$$
$$1 \text{ (Kg)} = \frac{1}{1.79 \times 10^{-30}} \left(\frac{\text{MeV}}{c^2}\right)$$

Alcune proprietà dei processi in fisica nucleare e delle particelle

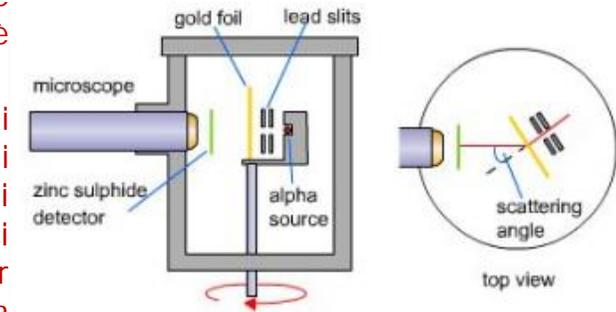
L'esperimento di Geiger-Mursden-Rutherford

In quale modo i fisici possono esplorare la struttura di oggetti così piccoli quali sono gli atomi, i nuclei e le particelle subatomiche? Quali sono le grandezze fisiche sperimentalmente misurabili e quale tipo di informazioni su tali oggetti microscopici è effettivamente possibile ottenere da tali misure?

La risposta può apparire sorprendente ma, tra gli esperimenti di Geiger e Mursden condotti negli anni 1909-13 sotto la guida di Rutherford per determinare la struttura dell'atomo, e quelli condotti oggi da gruppi sperimentali di centinaia o migliaia di fisici con giganteschi apparati presso i grandi acceleratori per determinare le proprietà delle particelle elementari, sussiste una enorme differenza sul piano delle dimensioni, complessità e sofisticazione delle tecnologie impiegate, ma una sostanziale identità sul piano della logica sperimentale.

Allora come oggi gli elementi essenziali sono tre: i) un fascio incidente di particelle proiettile; ii) un bersaglio contenente le particelle da studiare (atomi/nuclei/protoni-neutroni); iii) un rivelatore dietro/attorno al bersaglio capace di misurare le particelle emergenti.

Nell'assetto che l'esperimento di Geiger-Mursden-Rutherford aveva nel 1913, il *fascio di particelle proiettile* era costituito da una debole intensità di particelle alpha di 5.6 MeV di energia provenienti dal decadimento del radon; oggi da fasci di particelle della più varia natura (elettroni, protoni ma anche neutrini, neutroni, gamma, pioni, kaoni, ioni di vario tipo) ed energia (fino ai protoni di 4 TeV di LHC) forniti dai grandi acceleratori. Il *bersaglio*, da un sottile foglio d'oro di spessore 8.6×10^{-6} cm; oggi



da una amplissima gamma di materiali solidi, liquidi gassosi, polarizzati o non polarizzati, di altissima purezza oppure, come accade nei colliders, da particelle elementari.

Il rivelatore, infine, da vetro dipinto con solfuro di zinco (ZnS) capace di scintillare quando colpito da particelle cariche; oggi da capolavori di elettronica quali sono i velocissimi apparati di alta risoluzione capaci di registrare ogni varietà di particelle sia cariche che neutre. In questo modo, dato il fascio incidente ed il bersaglio, il gioco consiste essenzialmente nel riconoscere le particelle emergenti e nel misurare le loro grandezze cinematiche (energia e quantità di moto) con lo scopo di ottenere informazioni sulla natura della interazione tra la particella del fascio e la particella del bersaglio che ha avuto luogo.

**Classificazione dei
processi in fisica
nucleare e
subnucleare**

Il termine **interazione** va inteso con la massima generalità potendo indicare sia la semplice deviazione di un certo angolo di una particella del fascio da parte di una particella del bersaglio (come nel caso dell'esperimento di Geiger-Mursden-Rutherford) che vere e proprie reazioni nel corso delle quali le particelle incidenti si trasformano in particelle di altro tipo.

A questo proposito vale la pena citare la seguente terminologia. Si parla di **processo di diffusione** quando le particelle emergenti dal bersaglio coincidono con quelle del fascio incidente. Nel caso contrario si parla di **processo di produzione**.

A sua volta, un **processo di diffusione** si dice **elastico** quando la energia cinetica della particella emergente coincide con quella incidente, **anelastico** nel caso contrario. Dato che solitamente la particella proiettile è priva di struttura interna mentre quella bersaglio può avere una struttura interna deduciamo che, *in un processo di diffusione elastica il bersaglio non assorbe energia e non modifica la propria struttura interna mentre*

in un processo di diffusione anelastica il bersaglio assorbe energia e modifica la propria struttura interna.

Sulla base di questa terminologia è evidente che un processo di produzione è sempre inelastico.

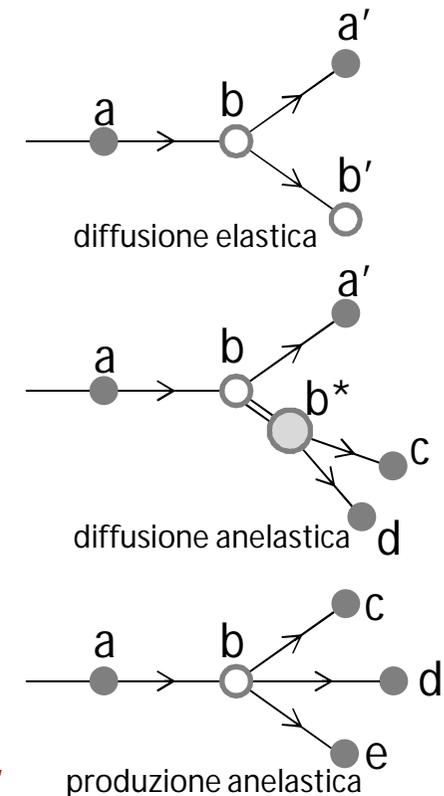
Riassumendo, si possono quindi avere processi di: i) **diffusione elastica** (particelle fascio e bersaglio iniziali e finali coincidenti e conservazione della energia cinetica totale); ii) **diffusione inelastica** (la particella bersaglio modifica la propria struttura interna assorbendo parte della energia cinetica totale. A seguito di questo fatto la particella bersaglio può decadere in nuove particelle); iii) produzione elastica (non può esistere!); iv) **produzione inelastica** (le particelle finali sono diverse da quelle iniziali per cui l'energia cinetica iniziale e finale sicuramente differiscono). Per completezza aggiungiamo che si parla di **diffusione profondamente inelastica** quando l'energia della particella proiettile è tale che la sua lunghezza d'onda di De Broglie è molto più piccola della dimensione della particella bersaglio potendo quindi definirne con precisione la struttura interna (che viene modificata nel corso del processo).

Il concetto di sezione d'urto

Vogliamo ora domandarci quale tipo di grandezza fisica caratteristica della interazione particella fascio – particella bersaglio sia possibile misurare con un arrangiamento sperimentale alla Rutherford.

Come prima cosa occorre specificare che nella pratica sperimentale si cerca di avere a disposizione *un fascio di particelle proiettile di sezione trasversale Σ uniforme e costante con velocità v pure uniforme e costante* (dunque un flusso stazionario di particelle, tipicamente particelle cariche stabili che possono essere estratte da un acceleratore) . Tale fascio viene fatto incidere su di un *bersaglio materiale chimicamente omogeneo*.

In questa situazione ciò che un ipotetico esperimento può misurare è, ad esempio, il flusso complessivo di particelle dopo il bersaglio che, confrontato con quello incidente sul bersaglio, fornisce una indicazione della **probabilità di interazione tra una particella proiettile ed una particella bersaglio**.



Per comprendere meglio come fare immaginiamo che: i) le particelle proiettile fluiscano all'interno di un fascio di sezione trasversale Σ il quale possiede una densità volumetrica di particelle uniforme e costante; ii) le particelle bersaglio siano distribuite omogeneamente all'interno di un sottile strato materiale di spessore Δx e di area maggiore della sezione del fascio (in modo da utilizzare tutto il fascio!); iii) la interazione tra particella proiettile e particella bersaglio sia analoga all'urto meccanico tra una sferetta puntiforme (la particella proiettile) ed una sferetta di raggio finito (la particella bersaglio) e che in seguito all'urto la particella proiettile venga rimossa dal fascio e quindi non contata dal rivelatore.

In queste condizioni la probabilità che una singola particella proiettile interagisca con una singola particella del bersaglio vale

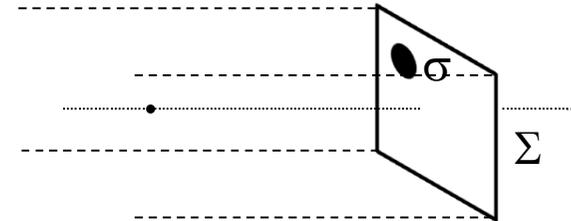
$$\sigma / \Sigma$$

dove σ è la sezione trasversale della particella bersaglio e Σ la sezione trasversale del fascio.

La variazione del numero di particelle del fascio dovuta alle interazioni (che è uguale al numero delle deflessioni cambiato di segno) può allora essere espressa nel modo seguente

$$\Delta N_f = -N_f N_b \frac{\sigma}{\Sigma}$$

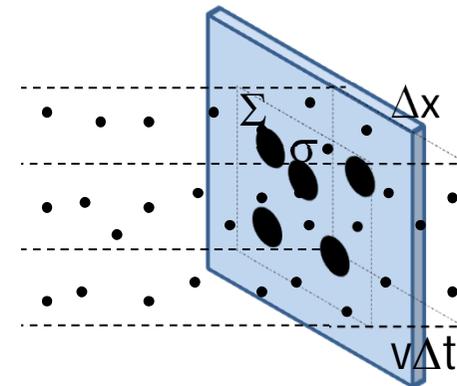
dove N_f (numero di particelle contenute nel parallelepipedo tratteggiato) ed N_b (numero di particelle contenute nell'intersezione del parallelepipedo con lo spessore materiale) sono i numeri delle particelle proiettile e bersaglio che nel tempo Δt possono interagire tra loro, mentre σ/Σ è, come visto, la probabilità che avvenga una singola interazione.



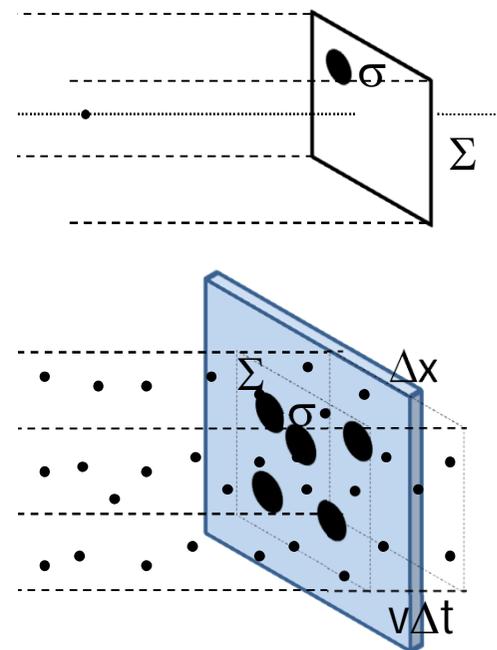
$$N_f^{in} = N_f^{out} (non\ deflesso) + N_f^{out} (deflesso)$$

$$N_f^{out} (deflesso) = -(N_f^{out} (non\ deflesso) - N_f^{in}) = -\Delta N_f$$

la variazione del fascio da il numero delle deflessioni



Per comprendere meglio come fare immaginiamo che: i) le particelle proiettile fluiscano all'interno di un fascio di sezione trasversale Σ il quale possiede una densità volumetrica di particelle uniforme e costante; ii) le particelle bersaglio siano distribuite omogeneamente all'interno di un sottile strato materiale di spessore Δx e di area maggiore della sezione del fascio (in modo da utilizzare tutto il fascio!); iii) la interazione tra particella proiettile e particella bersaglio sia analoga all'urto meccanico tra una sferetta puntiforme (la particella proiettile) ed una sferetta di raggio finito (la particella bersaglio) e che in seguito all'urto la particella proiettile venga rimossa dal fascio (ovvero diffusa poiché cambia direzione di moto) e quindi non contata dal rivelatore.



In queste condizioni la probabilità che una singola particella proiettile interagisca con una singola particella del bersaglio vale

$$\sigma / \Sigma$$

dove σ è la sezione trasversale della particella bersaglio e Σ la sezione trasversale del fascio.

Il numero di particelle rimosse dal fascio (ovvero diffuse) sono ovviamente legate al numero di particelle del fascio entrante ed uscente dalla seguente relazione

$$N_{f\ in} = N_{f\ out\ nondef} + \Delta N_{def} \quad \Delta N_{def} = -(N_{f\ out\ nondef} - N_{f\ in}) = -\Delta N_f$$

Tale numero può essere espresso nel modo seguente (semplificando la notazione)

$$\Delta N_{def} = N_f N_b \frac{\sigma}{\Sigma}$$

dove N_f (numero di particelle contenute nel parallelepipedo tratteggiato) ed N_b (numero di particelle contenute nell'intersezione del parallelepipedo con lo spessore materiale) sono i numeri delle particelle proiettile e bersaglio che nel tempo Δt possono interagire tra loro, mentre σ/Σ è, come visto, la probabilità che avvenga una singola interazione.

Ora si noti che N_f ed N_b possono essere espressi come

$$N_f = n_f v \Delta t \Sigma \quad N_b = n_b \Sigma \Delta x$$

per cui sostituendo si ottiene

da cui

$$\Delta N_{def} = n_f v \Delta t \Sigma n_b \Sigma \Delta x \frac{\sigma}{\Sigma}$$
$$\frac{\Delta N_{def}}{\Delta t} = n_f v n_b \Sigma \Delta x \sigma$$

Introducendo la definizione di *flusso delle particelle proiettile*

$$\Phi_f = n_f v$$

otteniamo, infine, la seguente espressione del numero di interazioni nella unità di tempo o *tasso d'interazione* o *rate d'interazione*

$$\frac{\Delta N_{def}}{\Delta t} = (\Phi_f n_b \Sigma \Delta x) \sigma$$

da cui ricaviamo la seguente espressione della *sezione trasversale della particella bersaglio*

$$\sigma = \frac{1}{\Phi_f n_b \Sigma \Delta x} \frac{\Delta N_{def}}{\Delta t}$$

L'interesse di questa espressione risiede nel fatto che **essa connette una grandezza fisica microscopica come la sezione trasversale σ della particella bersaglio con grandezze macroscopiche misurabili ($\Delta N_{def}/\Delta t$) o note dalla geometria dell'arrangiamento sperimentale ($\Phi_f, n_b, \Sigma, \Delta x$)**. La grandezza fisica σ , avente le dimensioni di un'area (e in questo caso coincidente con la sezione trasversale della particella bersaglio) è la grandezza fisica microscopica caratteristica della interazione tra le particelle del fascio e del bersaglio che possiamo misurare in un tipico arrangiamento alla Rutherford e viene detta **sezione d'urto totale del processo** o **sezione totale d'interazione del processo**.

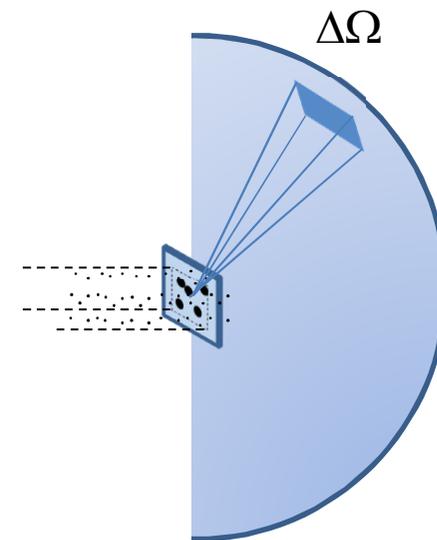
Nel caso delle particelle subatomiche la mutua interazione non è certo schematizzabile come un urto meccanico di sfere rigide tuttavia sarà sempre possibile introdurre la grandezza microscopica σ il cui valore, però, non sarà determinato dalla sezione trasversale della particella ma dalle proprietà della interazione elementare tra particella proiettile e particella bersaglio. Dunque, *in fisica nucleare e delle particelle elementari gli esperimenti, solitamente, misurano le sezioni d'urto della interazione tra particelle del fascio e del bersaglio*. Quando si dispone di una teoria quantitativa di tale interazione la grandezza σ può essere calcolata anche teoricamente ed allora, attraverso il confronto con il valore determinato sperimentalmente, risulta possibile saggiare la bontà della teoria stessa. Nella fisica nucleare e delle particelle elementari il confronto tra teoria ed esperimento avviene quasi sempre attraverso le sezioni d'urto.

La sezione d'urto differenziale

Se l'apparato sperimentale è costruito in modo opportuno risulta possibile andare oltre il semplice conteggio del numero di particelle deflesse.

Ad esempio, con un apparato sperimentale disposto attorno al bersaglio e opportunamente segmentato, in un processo di diffusione risulta possibile registrare la posizione della particella proiettile deflessa dal bersaglio. In questo modo, risulta possibile studiare anche l'effetto della interazione particella proiettile-particella bersaglio misurando l'angolo di deflessione rispetto alla direzione del fascio.

La sezione d'urto misurata in questo sarà la sezione d'urto d'interazione con la condizione ulteriore che la particella proiettile emerga all'interno di un certo angolo solido elementare $\Delta\Omega$. Avremo allora la seguente



d'urto differenziale (poiché infinitesimo risulta l'elemento di angolo solido)

$$\Delta\sigma = \frac{1}{\Phi_f n_b \Sigma \Delta x} \frac{\Delta N_{def\ in\ \Delta\Omega}}{\Delta t}$$

dove $\Delta N_{def\ in\ \Delta\Omega} / \Delta t$ (che ora è un differenziale) rappresenta il tasso di conteggi di particelle proiettile nell'angolo solido $\Delta\Omega$.

Convienne allora riscrivere la relazione nel modo seguente

$$\frac{\Delta\sigma}{\Delta\Omega} = \frac{1}{\Phi_f n_b \Sigma \Delta x} \frac{\Delta N_{def\ in\ \Delta\Omega}}{\Delta\Omega \Delta t}$$

da cui si vede che nell'ipotetico esperimento in esame ciò che viene misurata è la **sezione d'urto differenziale** di diffusione in funzione dell'angolo solido (va da se che integrando questa espressione su tutto l'angolo solido si ottiene la sezione d'urto totale di diffusione).

Se il rivelatore permette di misurare anche l'energia della particella proiettile sarà possibile misurare la sezione d'urto con la condizione addizionale che la particella proiettile emerga all'interno di un certo intervallo elementare ΔE .

Avremo allora la seguente sezione d'urto differenziale (poiché infinitesimo risulta l'intervallo di energia)

$$\Delta \frac{\Delta\sigma}{\Delta\Omega} = \frac{1}{\Phi_f n_b \Sigma \Delta x} \frac{\Delta N_{def\ in\ \Delta\Omega\ e\ \Delta E}}{\Delta\Omega \Delta t}$$

dove $\Delta N_{def\ in\ \Delta\Omega\ e\ \Delta E} / \Delta t$ (che ora è doppiamente differenziale) rappresenta il tasso di conteggi di particelle proiettile nell'angolo solido $\Delta\Omega$ ed energia nell'intervallo ΔE .

Convienne allora riscrivere la relazione nel modo seguente

$$\frac{\Delta}{\Delta E} \frac{\Delta\sigma}{\Delta\Omega} = \frac{1}{\Phi_f n_b \Sigma \Delta x} \frac{\Delta N_{def\ in\ \Delta\Omega\ e\ \Delta E}}{\Delta E \Delta\Omega \Delta t}$$

da cui si vede che nell'ipotetico esperimento in esame ciò che viene misurata è la **sezione d'urto doppiamente differenziale** di diffusione in funzione dell'angolo solido e della energia del particella proiettile (va da se che integrando questa espressione su tutto l'angolo solido e su tutte le energie si ottiene la sezione d'urto totale di diffusione).

Gli esempi citati, pur riferendosi a casi particolari chiariscono il fatto, di validità generale, che il tipo di sezione d'urto misurata dipende essenzialmente dalle caratteristiche tecniche del rivelatore. Nel caso più semplice (si fa per dire!) si misurerà una sezione d'urto totale di interazione mentre, disponendo di rivelatori più sofisticati, risulterà possibile misurare sezioni d'urto differenziali di interazione in funzione di un gran numero di variabili spaziali e cinematiche.

**La natura
onda-corpuscolo
delle
particelle**

Nel 1913, quando Geiger, Mursden e Rutherford compirono il loro esperimento interpretarono i risultati ottenuti in termini di interazioni tra particelle meccaniche classiche. Ovviamente non potevano fare altrimenti tuttavia, nella decade successiva, Bohr, Einstein De Broglie, Schroedinger, Born ed Heisenberg modificheranno radicalmente il quadro interpretativo introducendo l'idea che **le particelle microscopiche oltre a possedere proprietà corpuscolari dovevano possedere anche proprietà ondulatorie** per cui ad esse si doveva associare una precisa lunghezza d'onda, frequenza ed anche una specifica funzione d'onda complessa (meccanica quantistica).

D'altra parte, a partire dai lavori di Planck sul corpo nero (1900) e di Einstein sull'effetto fotoelettrico (1905) venne contemporaneamente affermandosi l'idea che i campi classici, dotati di proprietà chiaramente ondulatorie (poiché davano luogo ai fenomeni della interferenza e diffrazione), erano in realtà costituiti da enti microscopici, detti quanti del campo, dotati anche di proprietà corpuscolari. Si affermò così l'idea che **i campi oltre a possedere proprietà ondulatorie dovevano possedere anche proprietà corpuscolari**.

Data questa situazione viene spontanea la domanda **se le particelle microscopiche ed i quanti del campo, entrambi dotati di proprietà sia corpuscolari che ondulatorie, debbano essere pensati come enti distinti**. La risposta a questa domanda verrà fornita dalle teorie di campo quantizzato, formulate alla fine degli anni '20 da Dirac, Heisenberg, Jordan e Pasqual, secondo le quali le particelle microscopiche devono essere identificate con i quanti di specifici campi superando in tal modo la ripartizione degli enti fisici in particelle materiali e campi affermata dalla fisica classica.

Si giunge così alla idea attuale che le particelle microscopiche siano quanti di certi campi, dotate sia di proprietà corpuscolari (possono essere contate e possiedono quantità di moto ed energia definite) che ondulatorie (possono dare luogo ai fenomeni di interferenza e diffrazione) espresse chiaramente dalle relazione di De Broglie-Einstein

grandezze cinematiche ondulatorie

$$\omega = 2\pi / T \quad \vec{k} = (2\pi / \lambda) \vec{n}$$

grandezze cinematiche corpuscolari

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$



loro combinazione nelle relazioni di Einstein - De Broglie

$$E = \hbar\omega \quad \vec{p} = \hbar\vec{k} \quad \hbar = 1.055 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

$$\hbar\omega = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad \hbar\vec{k} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad \omega^2 = k^2c^2 + \frac{m^2c^4}{\hbar^2}$$

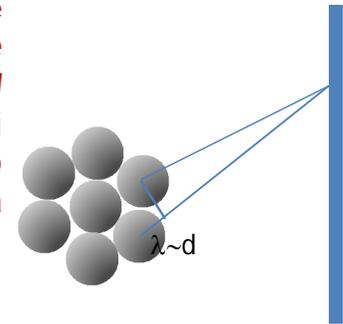
Esperimenti
fascio-bersaglio
come
esperimenti di
ottica delle onde
di De Broglie

I fatti appena richiamati chiariscono che ***l'interazione particella proiettile – particella bersaglio non deve essere pensata come un processo d'urto meccanico ma, piuttosto, come un processo di diffrazione dell'onda associata al proiettile su di un ostacolo rappresentato dal bersaglio.*** Naturalmente la diffrazione non sarà in generale assimilabile a quella di una pietra piazzata sul percorso dell'onda ma piuttosto ad una qualche forma di disturbo dell'onda determinata dalla interazione. Precisati questi concetti comprendiamo che ***un esperimento di fisica nucleare fascio-bersaglio è in realtà un esperimento di ottica delle onde di De Broglie*** dove il fascio di particelle proiettile gioca il ruolo della luce incidente mentre le particelle bersaglio quello delle fenditure, degli ostacoli (fatta salva precisazione di cui sopra) etc. etc. Per questo, tali esperimenti, possono essere compresi qualitativamente e quantitativamente solo impiegando espressamente i concetti propri delle onde.

Ad esempio, se vogliamo *esplorare la struttura di un nucleo atomico* dovremo essere in grado di risolvere i singoli nucleoni. Ma l'interferenza di due onde provenienti da due diversi nucleoni è apprezzabile solo se i cammini differiscono dell'ordine della lunghezza d'onda. D'altra parte la differenza di tali cammini è anche dell'ordine delle dimensioni del singolo nucleone. Ciò significa che *dovremo impiegare particelle proiettile aventi una lunghezza d'onda di De Broglie dell'ordine delle dimensioni del singolo nucleone ovvero dell'ordine di 1 fm.* In questo modo saremo sensibili agli effetti diffrattivi-interferenziali indotti dalla struttura nucleare che potremo osservare raccogliendo le particelle diffuse su di un rivelatore capace di misurarne la posizione angolare. Ricordando che $\hbar c / 200 \text{ MeV} \approx 1 \text{ fm}$ si ha

$$p = \hbar k = \hbar \frac{2\pi}{\lambda} = \hbar \frac{2\pi}{1} \text{ fm}^{-1} = \hbar 2\pi \frac{200 \text{ MeV}}{\hbar c} \approx 1.2 \frac{\text{GeV}}{c}$$

da cui otteniamo che con un fascio di particelle di impulso dell'ordine di 1 GeV si raggiunge lo scopo.



Naturalmente potremo scegliere il tipo di particelle proiettile più convenienti che in questo caso sono sicuramente i neutroni dato che non risentono della interazione elettromagnetica che andrebbe a complicare il fenomeno (si tenga però presente che è più difficile avere a che fare con fasci e rivelatori di neutroni!).

Se invece vogliamo *esplorare la struttura del singolo nucleone* dovremo avere un potere risolutivo almeno 100 volte superiore il che significa un impulso 100 volte maggiore ovvero fasci di particelle di impulso dell'ordine di 100 GeV.

Naturalmente non bisogna dimenticare che l'energia del fascio dipende, invece, dal tipo di particella considerata e può essere calcolata con la formula seguente

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} = \sqrt{p^2 + m^2}$$

Queste osservazioni rendono ora necessario il richiamo di alcuni concetti di ottica.

Alcuni richiami di ottica

Dato che l'interazione fascio-bersaglio consiste essenzialmente nella diffrazione delle onde di De Broglie associate alle particelle del fascio da parte delle particelle del bersaglio si può pensare di utilizzare la **teoria scalare della diffrazione di Kirchhoff** (si tenga presente che in questo modo si trascura lo spin). Rimandando all'appendice la descrizione dettagliata di tale teoria qui ricordiamo solo gli aspetti necessari per comprendere correttamente la formula che esporremo.

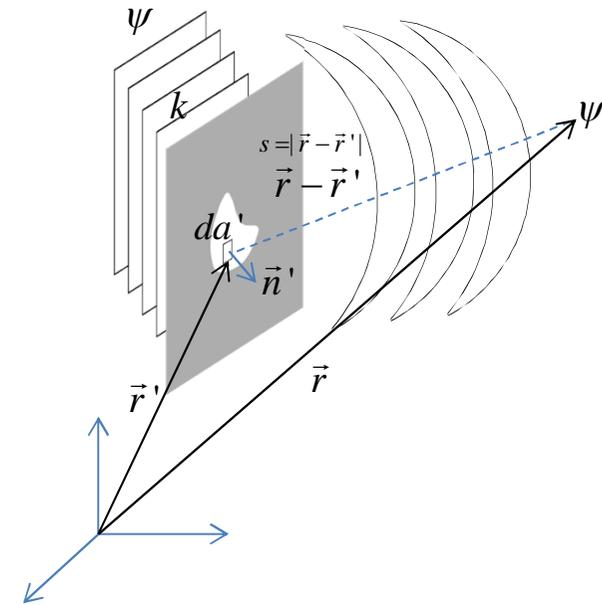
In primo luogo la trattazione di Kirchhoff si riferisce alla situazione fisica in cui un'onda scalare incidente investe uno schermo su cui sono praticate una o più aperture di forma arbitraria diffrangendo dall'altra parte dello schermo stesso.

La formula permette di calcolare, in ogni punto dello spazio, il valore dell'onda diffratta $\psi(\vec{r})$ a partire dal calcolo di un integrale sullo schermo, esteso all'area delle aperture, della funzione incidente $\psi(\vec{r}')$ e della sua funzione di Green.

La teoria scalare della diffrazione di Kirchhoff

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\text{Apertura}} [\psi(\vec{r}') (\vec{n}' \cdot \vec{\nabla}') \frac{e^{iks}}{s} - \frac{e^{iks}}{s} (\vec{n}' \cdot \vec{\nabla}') \psi(\vec{r}')] da' \quad (1)$$

dove gli apici indicano che le funzioni vanno integrate sulla superficie delle aperture nello schermo. Dato che la funzione ψ compare in entrambi i membri, tale espressione richiede la conoscenza della funzione $\psi(\vec{r}')$ che si vuole determinare. Un circolo vizioso che viene evitato assumendo **l'approssimazione di Kirchhoff** secondo la quale la funzione $\psi(\vec{r}')$ sullo schermo è non nulla solo nelle aperture dove coincide con quella che si avrebbe negli stessi punti in assenza dello schermo ovvero con la funzione d'onda incidente.



- $\psi' = \psi(\vec{r}')$ funzione d'onda calcolata nel punto \vec{r}' della apertura
- \vec{n}' normale allo schermo nel punto \vec{r}' della apertura
- $\vec{\nabla}'$ gradiente della funzione d'onda nel punto \vec{r}' della apertura
- k modulo del vettore d'onda della funzione d'onda incidente
- $s = |\vec{r} - \vec{r}'|$ modulo del vettore congiungente il punto \vec{r}' della apertura con il punto di osservazione \vec{r}

Diffrazione di una apertura su di uno schermo piano

Consideriamo il caso di onda piana diretta lungo l'asse delle z positive incidente su di uno schermo piano normale all'asse stesso

$$\psi = \psi_0 e^{ikz} \quad \vec{n}' = \hat{k} \quad \psi' = \psi_0 e^{ikz'}$$

Abbiamo i seguenti semplici passaggi

$$(\vec{n}' \cdot \vec{\nabla}') = \hat{k} \cdot \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x'} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y'} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z'} \right) = \frac{\partial}{\partial z'}$$

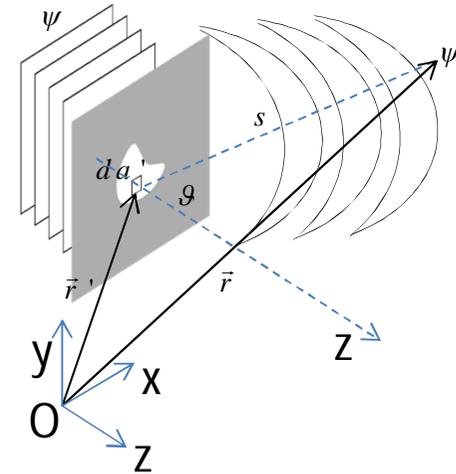
$$(\vec{n}' \cdot \vec{\nabla}') \psi' = \frac{\partial}{\partial z'} \psi_0 e^{ikz'} = ik \psi_0 e^{ikz'}$$

$$\begin{aligned} (\vec{n}' \cdot \vec{\nabla}') \frac{e^{iks}}{s} &= \frac{\partial}{\partial z'} \frac{e^{iks}}{s} = ik \frac{e^{iks}}{s} \frac{\partial s}{\partial z'} - \frac{e^{iks}}{s^2} \frac{\partial s}{\partial z'} \\ &= \left(ik \frac{e^{iks}}{s} - \frac{e^{iks}}{s^2} \right) \frac{\partial s}{\partial z'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial z'} &= \frac{\partial}{\partial z'} |\vec{r} - \vec{r}'| = \frac{\partial}{\partial z} \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \\ &= -\frac{1}{2s} 2(z-z') = -\frac{(z-z')}{s} = -\cos \vartheta \end{aligned}$$

$$(\vec{n}' \cdot \vec{\nabla}') \frac{e^{iks}}{s} = -\left(ik \frac{e^{iks}}{s} - \frac{e^{iks}}{s^2} \right) \cos \vartheta$$

Sostituendo queste espressioni nella (1) otteniamo



NOTA: l'origine O del riferimento si intende molto prossima ai punti della apertura

$$\begin{aligned}
\psi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi} \iint_{\text{Foro}} [-\psi_0 e^{ikz'} (ik \frac{e^{iks}}{s} - \frac{e^{iks}}{s^2}) \cos \vartheta - \frac{e^{iks}}{s} ik \psi_0 e^{ikz'}] da' \\
&\approx \frac{1}{4\pi} \iint_{\text{Foro}} [-\psi_0 e^{ikz'} ik \frac{e^{iks}}{s} \cos \vartheta - \frac{e^{iks}}{s} ik \psi_0 e^{ikz'}] da' \quad \text{s grande: al primo ordine trascurabile il termine in } 1/s^2 \\
&\approx -\psi_0 \frac{ik}{4\pi} \iint_{\text{Foro}} \frac{e^{i(ks+kz')}}{s} (\cos \vartheta + 1) da' \quad \text{angoli piccoli: al primo ordine } \cos \vartheta \sim 1 \\
&\approx -\psi_0 \frac{ik}{2\pi} \iint_{\text{Foro}} \frac{e^{i(ks+kz')}}{s} da' \quad (3)
\end{aligned}$$

Nell'integrale appena ottenuto vogliamo cercare espressioni approssimate della fase dell'esponenziale complesso. Nel caso di s abbiamo

$$\begin{aligned}
s = |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'} = r \sqrt{1 - \frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}} \\
&\approx r \left(1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2}\right) \approx r - \vec{r}' \cdot \frac{\vec{r}}{r} \approx r - \vec{n} \cdot \vec{r}' \quad (4)
\end{aligned}$$

valida se r'^2/r^2 è trascurabile rispetto ad s ovvero se $L^2/D \ll s$ dove L è la distanza del punto di osservazione dallo schermo e D è la dimensione della apertura. Abbiamo allora

$$ks \approx kr - k\vec{n} \cdot \vec{r}' \quad \text{valida se } kL^2/D \ll 1 \text{ ovvero se } L^2/\lambda D \ll 1 \text{ detta } \textit{condizione di Fraunhofer}$$

$$kz' = k\vec{n}' \cdot \vec{r}'$$

$$ks + kz' \approx kr - k\vec{n} \cdot \vec{r}' + k\vec{n}' \cdot \vec{r}' = kr - (k\vec{n} - k\vec{n}') \cdot \vec{r}' = kr - \vec{q} \cdot \vec{r}' \quad (5)$$

dove abbiamo introdotto il **vettore d'onda trasferito**

$$\vec{q} = k\vec{n} - k\vec{n}' \quad (6)$$

Sostituendo la (5) nella (3) otteniamo la seguente espressione della funzione d'onda

$$\psi(\vec{r}) \approx -\psi_0 \frac{ik}{2\pi r} \iint_{\text{Foro}} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}'} da'$$

Tale funzione d'onda può essere espressa per mezzo di un integrale esteso a tutto lo schermo introducendo la **funzione di profilo della apertura**

Funzione di
profilo della
apertura

$$\Gamma(\vec{r}') = \begin{cases} 1 & \text{all'interno del foro} \\ 0 & \text{all'esterno del foro} \end{cases}$$

Otteniamo allora la seguente espressione della **funzione d'onda da in campo lontano (o di Fraunhofer) diffratta da una apertura A di forma arbitraria** su di uno schermo piano quando vi incide un'onda piana

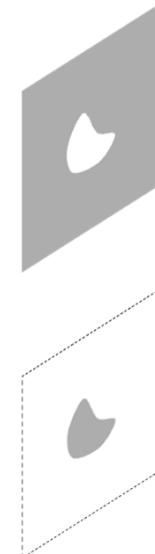
$$\psi_A(\vec{r}) \approx -\psi_0 \frac{ik}{2\pi r} \iint_{\text{Schermo}} \Gamma(\vec{r}') e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}'} da' \quad (7)$$

Si noti ora che la funzione **1-Γ** è la funzione di profilo di una apertura di forma complementare ovvero di un ostacolo avente la stessa forma della apertura. Abbiamo allora la seguente espressione della **funzione d'onda in campo lontano diffratta da un ostacolo totalmente assorbente O**

Diffrazione da
parte di un
ostacolo
totalmente
assorbente

$$\psi_O(\vec{r}) \approx -\psi_0 \frac{ik}{2\pi r} \iint_{\text{Schermo}} (1-\Gamma(\vec{r}')) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}'} da' \quad (8)$$

In ottica questo tipo di argomentazione prende il nome di **principio degli schermi complementari** o **principio di Babinet**.



Sommiamo ora la (7) e la (8), otteniamo

$$\begin{aligned} \psi_A(\vec{r}) + \psi_O(\vec{r}) &\approx -\psi_0 \frac{ik}{2\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \iint_{\text{Schermo}} \Gamma(\vec{r}') e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}'} da' - \psi_0 \frac{ik}{2\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \iint_{\text{Schermo}} (1-\Gamma(\vec{r}')) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}'} da' \quad (9) \\ &\approx -\psi_0 \frac{ik}{2\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \iint_{\text{Schermo}} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}'} da' \end{aligned}$$

evidentemente tale somma deve corrispondere alla diffrazione di una apertura che occupa tutto lo schermo ovvero equivalente alla assenza dello schermo. E' chiaro allora che la (9) deve essere equivalente all'onda piana incidente sullo schermo per cui abbiamo la seguente identità

$$\psi_A(\vec{r}) + \psi_O(\vec{r}) \approx \psi_0 e^{ikz} \approx \psi_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

da cui otteniamo una nuova espressione della **funzione d'onda in campo lontano diffratta da un ostacolo O totalmente assorbente**

$$\psi_O(\vec{r}) \approx \psi_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \psi_A(\vec{r})$$

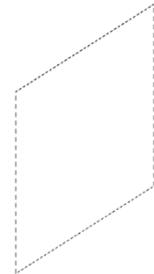
Sostituendo la (7) otteniamo la seguente espressione della **funzione d'onda da in campo lontano (o di Fraunhofer) diffratta da un ostacolo O di forma arbitraria** su di uno schermo piano quando vi incide un'onda piana

$$\psi_O(\vec{r}) \approx \psi_0 \left(e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + f(\vec{q}) \frac{e^{ikr}}{r} \right) \quad (10)$$

dove abbiamo introdotto l'ampiezza dell'onda diffusa o **ampiezza di diffusione**

$$f(\vec{q}) = \frac{ik}{2\pi} \iint_{\text{Schermo}} \Gamma(\vec{r}') e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}'} da' \quad (11)$$

una espressione che chiarisce che la diffrazione da parte di un ostacolo è un fenomeno di interferenza tra l'onda piana incidente e l'onda diffusa.



Diffrazione da parte di un ostacolo totalmente assorbente

Ampiezza di diffusione

Una volta nota l'espressione generale dell'onda diffratta possiamo calcolare la sezione d'urto differenziale di diffusione in un certo elemento d'area ragionando nel modo seguente. L'intensità dell'onda diffusa in certo elemento d'area vale

$$|\psi_{diff}|^2 dS$$

mentre l'intensità dell'onda incidente sul bersaglio vale

$$|\psi_{inc}|^2 \Sigma$$

La frazione di intensità dell'onda incidente che viene diffusa vale allora

$$\alpha = \frac{|\psi_{diff}|^2 dS}{|\psi_{inc}|^2 \Sigma}$$

D'altra parte tale frazione dell'onda incidente che viene diffusa nell'elemento d'area è esprimibile attraverso la sezione d'urto differenziale

$$\alpha = \frac{d\sigma_{diff}}{\Sigma}$$

per cui otteniamo

$$d\sigma_{diff} = \frac{|\psi_{diff}|^2}{|\psi_{inc}|^2} dS = \frac{|\psi_{diff}|^2}{|\psi_{inc}|^2} r^2 d\Omega$$

Dalla (10) possiamo ottenere l'espressione dell'onda diffusa che sostituita fornisce

$$d\sigma_{diff} = \frac{|\psi_0 f(\vec{q}) \frac{e^{ikr}}{r}|^2 r^2}{|\psi_0 e^{i\vec{k}\vec{r}}|^2} d\Omega = \frac{|\psi_0|^2 |f(\vec{q})|^2}{|\psi_0|^2} d\Omega$$

da cui, infine, l'espressione della **sezione d'urto differenziale di diffusione**

Sezione d'urto
differenziale di
diffusione

$$\frac{d\sigma_{diff}}{d\Omega} = |f(\vec{q})|^2 \quad (12)$$

che risulta coincidere con il modulo quadrato dell'ampiezza di diffusione (11).

Integrando la (12) su tutto l'angolo solido si giunge con qualche calcolo (vedi 1.A e/o 1.B in fondo al presente capitolo) alla seguente espressione della **sezione d'urto totale di diffusione**

Sezione d'urto
totale di diffusione

$$\sigma_{diff} = \iint_{\text{Schermo}} |\Gamma(\vec{r}')|^2 da' \quad (13)$$

che risulta essere data dall'integrale sul piano che contiene l'ostacolo del modulo quadrato della funzione di profilo.

Sezione d'urto
totale di
assorbimento

Fino ad ora ci siamo concentrati sul fenomeno della diffusione cui da luogo l'ostacolo trascurando il concomitante fenomeno dell'assorbimento. Per capire di cosa si tratta si deve tenere presente che la situazione considerata fino a questo punto riguarda infatti la diffusione da parte di un ostacolo perfettamente assorbente (si ricordi che siamo partiti considerando la diffrazione da parte di una apertura praticata su di uno schermo perfettamente assorbente. Da qui abbiamo ricavato il fenomeno della diffrazione da parte di un ostacolo con la stessa forma della apertura utilizzando il principio degli schermi complementari il quale richiede che l'ostacolo abbia le stesse proprietà dello schermo ovvero che sia perfettamente assorbente). Ciò significa che quando l'onda incide sul bersaglio in parte viene assorbita ed in parte diffusa per cui si deve avere non solo una sezione d'urto di diffusione ma anche una sezione d'urto di assorbimento le quali, assieme, vanno a comporre **la sezione d'urto totale di interazione**

Sezione d'urto
totale di interazione

$$\sigma_{tot} = \sigma_{diff} + \sigma_{ass} \quad (14)$$

Naturalmente avremmo anche potuto considerare il caso di uno schermo di materiale parzialmente assorbente e quindi parzialmente trasmittente col che avremmo avuto a che fare con un ostacolo parzialmente trasmittente (caso frequente in ottica) e con una sezione d'urto di assorbimento diversa ma sempre definibile per mezzo della (14).

Infine, integrando su tutto l'angolo solido o sull'area di uno schermo distante il modulo quadrato dell'onda diffusa dato dalla (10), otteniamo una importante espressione della sezione d'urto totale d'interazione con l'ostacolo (comprendente la diffusione e l'assorbimento) detta **teorema ottico**

**Teorema ottico:
sezione d'urto
totale di interazione**

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} f(\vec{0}) \quad (15)$$

la quale connette la sezione d'urto totale d'interazione con la parte immaginaria della ampiezza di diffusione a vettore d'onda trasferito nullo (ovvero in avanti).

Diffrazione di un disco circolare assorbente

Possiamo usare le formule (11)-(15) per calcolare le sezioni d'urto del processo di diffrazione di un'onda piana su di un ostacolo circolare di raggio R assorbente ovvero nero.

Adottando un sistema di coordinate polari con l'origine al centro del disco, la funzione di profilo è definita dalle condizioni

Funzione di
profilo del disco
assorbente

$$\Gamma(r) = \begin{cases} 1 & \text{se } r \leq R \\ 0 & \text{se } r > R \end{cases} \quad (16)$$

Richiamiamo la (11)

$$f(\vec{q}) = \frac{ik}{2\pi} \iint_{\text{Schermo}} \Gamma(\vec{r}) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} da$$

Si assuma un riferimento con l'origine al centro del disco e l'asse z normale al piano che lo contiene. Con questa scelta, se ci limitiamo a considerare piccoli angoli di diffusione, il vettore \vec{q} giace sul piano xy

$$\vec{q} = k(\vec{n} - \vec{n}') = k(\sin \vartheta \hat{i}_r + \cos \vartheta \hat{k} - \hat{k}) \approx k\vartheta \hat{i}_r$$

assieme al vettore \vec{r} che identifica i punti del disco circolare. Scegliendo l'asse x lungo la direzione del vettore \vec{q} l'angolo φ delle coordinate cilindriche coincide con l'angolo compreso tra il vettore \vec{q} ed il vettore \vec{r} nella espressione del prodotto scalare. Abbiamo allora

$$\begin{aligned} f(\vec{q}) &= \frac{ik}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \Gamma(r) e^{-iq \cos \varphi r} r d\varphi dr \\ &= \frac{ik}{2\pi} \int_0^R r \left[\int_0^{2\pi} e^{-iq \cos \varphi r} d\varphi \right] dr \end{aligned}$$

$$= ik \int_0^R r \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iqr \cos \varphi} d\varphi \right] dr$$

Ora, l'integrale tra parentesi quadrata è evidentemente una funzione della variabile qr . Si tratta di una funzione nota con nome di *funzione di Bessel di ordine zero* (vedi 1.D)

$$J_0(qr) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iqr \cos \varphi} d\varphi$$

Abbiamo allora la seguente espressione della ampiezza di diffusione

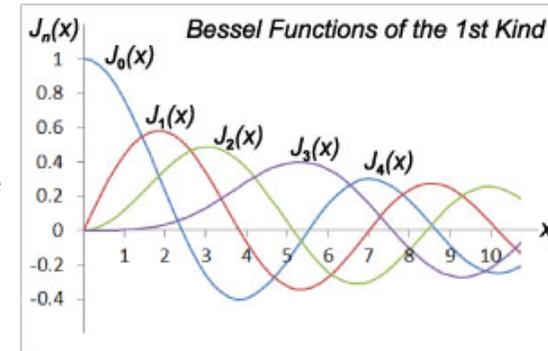
$$f(\vec{q}) = ik \int_0^R r J_0(qr) dr$$

che può essere integrata (vedi 1.E) ottenendo

$$f(\vec{q}) = i \frac{kR}{q} J_1(qR)$$

dove $J_1(qR)$ è la *funzione di Bessel di ordine uno* dell'argomento qR . Dalla (12) otteniamo allora la **sezione d'urto differenziale di diffusione del disco assorbente**

$$\boxed{\frac{d\sigma_{diff}}{d\Omega} = \frac{k^2 R^2}{q^2} J_1^2(qR)} \quad (17)$$



Ampiezza di
diffusione del
disco assorbente

Sezione d'urto
differenziale di
diffusione del
disco assorbente

Tenendo conto della funzione di profilo del nostro problema, è immediato, dalla (13), ottenere l'espressione

$$\begin{aligned}\sigma_{diff} &= \iint_{\text{Schermo}} |\Gamma(\vec{r})|^2 da \\ &= \iint_{\text{Ostacolo}} da\end{aligned}$$

da cui la **sezione d'urto totale di diffusione del disco assorbente**

$$\sigma_{diff} = \pi R^2 \quad (18)$$

Sezione d'urto
totale di
diffusione del
disco assorbente

Richiamando infine il teorema ottico abbiamo

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k} \text{Im} f(\vec{0})$$

E' semplice calcolare l'ampiezza di diffusione in avanti

$$f(\vec{q}) = \frac{ik}{2\pi} \iint_{\text{Schermo}} \Gamma(\vec{r}) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} da$$

$$f(\vec{0}) = \frac{ik}{2\pi} \iint_{\text{Schermo}} \Gamma(\vec{r}) da = \frac{ik}{2\pi} \iint_{\text{Disco}} da = \frac{ik}{2\pi} \pi R^2 = i \frac{kR^2}{2}$$

da cui

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k} \text{Im} f(\vec{0}) = \frac{4\pi}{k} \text{Im}\left(i \frac{kR^2}{2}\right) = \frac{4\pi}{k} \frac{kR^2}{2}$$

Sezione d'urto
totale di
interazione del
disco assorbente

ed infine l'espressione della **sezione d'urto totale d'interazione del disco assorbente**

$$\sigma_{tot} = 2\pi R^2 \quad (19)$$

Dalla (14) si ha

$$\sigma_{ass} = \sigma_{tot} - \sigma_{diff} = 2\pi R^2 - \pi R^2$$

da cui l'espressione della **sezione d'urto totale di assorbimento del disco assorbente**

Sezione d'urto
totale di
assorbimento del
disco assorbente

$$\sigma_{ass} = \pi R^2 \quad (20)$$

Troviamo allora che la sezione d'urto totale d'interazione di un'onda piana con un disco assorbente è il doppio della superficie del disco poiché sia la sezione d'urto totale di diffusione che quella di assorbimento hanno entrambe il valore della superficie del disco stessa.

1.A

$$\frac{d\sigma_{diff}}{d\Omega} = |f(\vec{q})|^2 \quad f(\vec{q}) = \frac{ik}{2\pi} \iint_{Schermo} \Gamma(\vec{r}) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} da$$

$$\begin{aligned} d\sigma_{diff} &= |f(\vec{q})|^2 d\Omega \\ &= \left(\frac{ik}{2\pi} \iint_{Schermo} \Gamma(\vec{r}) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} da \right) \left(-\frac{ik}{2\pi} \iint_{Schermo} \Gamma^*(\vec{r}') e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}'} da' \right) d\Omega \\ &= \frac{k^2}{4\pi^2} \iint_{Schermo} \iint_{Schermo} \Gamma(\vec{r}) \Gamma^*(\vec{r}') e^{i\vec{q}\cdot(\vec{r}'-\vec{r})} da da' d\Omega \end{aligned}$$

tra il vettore \vec{q} e l'elemento di angolo solido $d\Omega$ esiste una relazione infatti dalla (6) si ha

$$q = |\vec{q}| = |k\vec{n} - k\vec{n}'| = k |\vec{n} - \vec{n}'| \simeq k \sin \vartheta \simeq k\vartheta$$

dove ϑ è l'angolo formato dall'onda incidente con quella diffratta. Abbiamo allora il seguente elemento d'area nello spazio dei vettori d'onda

$$dq_x dq_y = q d\varphi dq \simeq k\vartheta d\varphi d(k\vartheta) \simeq k^2 d\varphi \vartheta d\vartheta \simeq k^2 d\Omega$$

da cui otteniamo la seguente espressione dell'angolo solido elementare

$$d\Omega \simeq \frac{dq_x dq_y}{k^2}$$

e quindi

$$d\sigma_{diff} = \frac{k^2}{4\pi^2} \frac{1}{k^2} \iint_{Schermo} \iint_{Schermo} \Gamma(\vec{r}) \Gamma^*(\vec{r}') e^{iq_x \cdot (x'-x)} e^{iq_y \cdot (y'-y)} da da' dq_x dq_y$$

Integriamo ora l'espressione

$$\begin{aligned}\sigma_{diff} &= \iint_{\text{Schermo}} \iint_{\text{Schermo}} \Gamma(\vec{r})\Gamma^*(\vec{r}') \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iq_x \cdot (x'-x)} dq_x \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iq_y \cdot (y'-y)} dq_y da da' \\ &= \iint_{\text{Schermo}} \iint_{\text{Schermo}} \Gamma(\vec{r})\Gamma^*(\vec{r}') \delta(x'-x)\delta(y'-y) da da'\end{aligned}$$

da cui infine

$$\sigma_{diff} = \iint_{\text{Schermo}} |\Gamma(\vec{r}')|^2 da'$$

1.B

Alternativamente al metodo seguito in 1.A dove la sezione d'urto totale di diffusione è calcolata integrando sull'angolo solido, è istruttivo fare il calcolo integrando sull'area di un secondo schermo posto ad una certa distanza (che supporremo grande rispetto alle dimensioni della figura di diffrazione)

$$\begin{aligned}\sigma_{diff} &= \iint_{Sch II} \frac{|f(\vec{q})|^2}{r^2} da = \iint_{Sch II} \left[\frac{1}{r^2} \left(\frac{ik}{2\pi} \iint_{Sch I} \Gamma(\vec{r}') e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}'} da' \right) \left(-\frac{ik}{2\pi} \iint_{Sch I} \Gamma^*(\vec{r}'') e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}''} da'' \right) \right] da \\ &= \frac{k^2}{4\pi^2} \iint_{Sch II} \left(\frac{1}{r^2} \iint_{Sch I} \iint_{Sch I} \Gamma(\vec{r}') \Gamma^*(\vec{r}'') e^{i\vec{q}\cdot(\vec{r}''-\vec{r}')} da'' da' \right) da \\ &= \frac{k^2}{4\pi^2} \iint_{Sch I} \iint_{Sch I} \left(\iint_{Sch II} \frac{1}{r^2} \Gamma(\vec{r}') \Gamma^*(\vec{r}'') e^{i\vec{q}\cdot(\vec{r}''-\vec{r}')} da \right) da'' da'\end{aligned}$$

tra il vettore \vec{q} e l'elemento di area da esiste una relazione che può essere espressa in coordinate cartesiane

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = z \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}} \approx z \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{2z^2} \right) \approx z + \frac{x^2 + y^2}{2z}$$

$$\vec{q} = k(\hat{n} - \hat{n}') = k \left(\frac{\vec{r}}{r} - \hat{k} \right) \approx k \left(\frac{x}{z} \hat{i} + \frac{y}{z} \hat{j} + \hat{k} - \hat{k} \right) \approx k \left(\frac{x}{z} \hat{i} + \frac{y}{z} \hat{j} \right)$$

$$\vec{q} \cdot (\vec{r}'' - \vec{r}') \approx k \left(\frac{x}{z} \hat{i} + \frac{y}{z} \hat{j} \right) \cdot [(x'' - x') \hat{i} + (y'' - y') \hat{j} + (z'' - z') \hat{k}] \approx \frac{kx}{z} (x'' - x') + \frac{ky}{z} (y'' - y')$$

dove, in entrambi i casi, abbiamo sfruttato il fatto che la distanza dello schermo (ovvero z dato che l'origine si trova nei pressi della apertura) è grande rispetto alle dimensioni della figura di diffrazione sul secondo schermo. Sostituendo

$$= \frac{k^2}{4\pi^2} \iint_{Sch I} \iint_{Sch I} \left(\iint_{Sch II} \frac{1}{z^2} \Gamma(\vec{r}') \Gamma^*(\vec{r}'') e^{i \frac{kx}{z} (x'' - x') + i \frac{ky}{z} (y'' - y')} dx dy \right) da'' da'$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{k^2}{4\pi^2} \iint_{Sch I} \iint_{Sch I} \left(\iint_{Sch II} \frac{1}{z^2} \Gamma(\vec{r}') \Gamma^*(\vec{r}'') e^{i\frac{kx}{z}(x''-x') + i\frac{ky}{z}(y''-y')} dx'' dy'' \right) da'' da' \\
&= \frac{k^2}{4\pi^2} \iint_{Sch I} \iint_{Sch I} \frac{1}{z^2} \Gamma(\vec{r}') \Gamma^*(\vec{r}'') \frac{4\pi^2 z^2}{k^2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\frac{x}{z}(x''-x')} dkx / z \right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\frac{y}{z}(y''-y')} dky / z \right) da'' da' \\
&= \iint_{Sch I} \iint_{Sch I} \Gamma(\vec{r}') \Gamma^*(\vec{r}'') \delta(x''-x') \delta(y''-y') dx'' dy'' dx' dy'
\end{aligned}$$

Ora si deve osservare che i due integrali corrono sullo stesso piano poiché sono estesi alla stessa area che è appunto l'area del profilo dell'ostacolo. Data la scelta del riferimento con l'asse z normale a tale piano, ciò significa che $z''=z'$. D'altra parte tra le funzioni integrande vi sono due funzioni delta di Dirac che bloccano gli integrali ai valori $x''=x'$ e $y''=y'$. Abbiamo allora

$$= \iint_{Sch I} \iint_{Sch I} \Gamma(\vec{r}') \Gamma^*(\vec{r}') dx' dy' = \iint_{Sch I} |\Gamma(\vec{r}')|^2 dx' dy'$$

che dimostra il teorema.

1.B

Alternativamente al metodo seguito in 1.A dove la sezione d'urto totale di diffusione è calcolata integrando sull'angolo solido, è istruttivo fare il calcolo integrando sull'area di un secondo schermo posto ad una certa distanza (che supporremo grande rispetto alle dimensioni della figura di diffrazione)

$$\begin{aligned}\sigma_{diff} &= \iint_{Sch II} \frac{|f(\vec{q})|^2}{r^2} da = \iint_{Sch II} \left[\frac{1}{r^2} \left(\frac{ik}{2\pi} \iint_{Sch I} \Gamma(\vec{r}') e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}'} da' \right) \left(-\frac{ik}{2\pi} \iint_{Sch I} \Gamma^*(\vec{r}'') e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}''} da'' \right) \right] da \\ &= \frac{k^2}{4\pi^2} \iint_{Sch II} \left(\frac{1}{r^2} \iint_{Sch I} \iint_{Sch I} \Gamma(\vec{r}') \Gamma^*(\vec{r}'') e^{i\vec{q}\cdot(\vec{r}''-\vec{r}')} da'' da' \right) da\end{aligned}$$

tra il vettore \vec{q} e l'elemento di area da esiste una relazione che può essere espressa in coordinate cartesiane

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = z \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}} \approx z \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{2z^2} \right) \approx z + \frac{x^2 + y^2}{2z} \approx z \\ \vec{q} &= k(\hat{n} - \hat{n}') = k \left(\frac{\vec{r}}{r} - \hat{k} \right) \approx k \left(\frac{x}{z} \hat{i} + \frac{y}{z} \hat{j} + \hat{k} - \hat{k} \right) \approx k \left(\frac{x}{z} \hat{i} + \frac{y}{z} \hat{j} \right)\end{aligned}$$

dove, in entrambi i casi, abbiamo sfruttato il fatto che la distanza dello schermo (ovvero z dato che l'origine si trova nei pressi della apertura) è grande rispetto alle dimensioni della figura di diffrazione sul secondo schermo. Sostituendo

$$\begin{aligned}\sigma_{diff} &= \frac{k^2}{4\pi^2} \iint_{Sch II} \left(\frac{1}{z^2} \iint_{Sch I} \iint_{Sch I} \Gamma(\vec{r}') \Gamma^*(\vec{r}'') e^{ik\frac{x}{z}(x''-x')} e^{ik\frac{y}{z}(y''-y')} da'' da' \right) dx dy \\ &= \frac{k^2}{z^2} \iint_{Sch I} \iint_{Sch I} \Gamma(\vec{r}') \Gamma^*(\vec{r}'') \left(\frac{z}{k} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\frac{x}{z}(x''-x')} dkx / z \right) \left(\frac{z}{k} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\frac{y}{z}(y''-y')} dk y / z \right) da'' da' \\ &= \iint_{Sch I} \iint_{Sch I} \Gamma(\vec{r}') \Gamma^*(\vec{r}'') \delta(x''-x') \delta(y''-y') da'' da' \quad \Longrightarrow \quad \sigma_{diff} = \iint_{Sch I} |\Gamma(\vec{r}')|^2 da'\end{aligned}$$

1.C

Calcoliamo l'integrale su di un secondo schermo posto ad una certa distanza (che supporremo grande rispetto alle dimensioni della figura di diffrazione) del modulo quadrato della funzione d'onda diffratta data dalla (10)

$$\begin{aligned} \iint_{Sch II} |\psi|^2 da &= \iint_{Sch II} |\psi_0 (e^{ikz} + f(\vec{q}) \frac{e^{ikr}}{r})|^2 da \\ &= |\psi_0|^2 \iint_{Sch II} [1 + |f(\vec{q})|^2 \frac{1}{r^2} + 2 \operatorname{Re}(f(\vec{q}) \frac{e^{ik(r-z)}}{r})] da \end{aligned}$$

tra il vettore \vec{q} e l'elemento di area da esiste una relazione che può essere espressa in coordinate cartesiane

$$\begin{aligned} \vec{q} &= k(\hat{n} - \hat{n}') = k\left(\frac{\vec{r}}{r} - \hat{k}\right) \approx k\left(\frac{x}{z}\hat{i} + \frac{y}{z}\hat{j} + \hat{k} - \hat{k}\right) \approx k\left(\frac{x\hat{i} + y\hat{j}}{z}\right) \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = z\sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}} \approx z\left(1 + \frac{x^2 + y^2}{2z^2}\right) \approx z + \frac{x^2 + y^2}{2z} \\ k(r - z) &\approx k\left(z + \frac{x^2 + y^2}{2z} - z\right) \approx k\frac{x^2 + y^2}{2z} \end{aligned}$$

dove, in entrambi i casi, abbiamo sfruttato il fatto che la distanza dello schermo (ovvero z dato che l'origine si trova nei pressi della apertura) è grande rispetto alle dimensioni della figura di diffrazione sul secondo schermo.

$$\iint_{Sch II} |\psi|^2 da \approx |\psi_0|^2 \iint_{Sch II} [1 + 2 \operatorname{Re}(f(\vec{0}) \frac{e^{ik\frac{x^2+y^2}{2z}}}{z})] dx dy$$

$$\begin{aligned}
&\approx |\psi_0|^2 \iint_{Sch II} dx dy + |\psi_0|^2 2 \operatorname{Re}(f(\vec{0})) \frac{1}{z} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik \frac{x^2}{2z}} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik \frac{y^2}{2z}} dy \\
&\approx |\psi_0|^2 \iint_{Sch II} dx dy + |\psi_0|^2 2 \operatorname{Re}(f(\vec{0})) \frac{1}{z} \frac{2iz}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{k}{2iz} x^2} d\sqrt{\frac{k}{2iz}} x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{k}{2iz} y^2} d\sqrt{\frac{k}{2iz}} y \\
&\approx |\psi_0|^2 \iint_{Sch II} dx dy + |\psi_0|^2 2 \operatorname{Re}(f(\vec{0})) \frac{1}{z} \frac{2iz}{k} \sqrt{\pi} \sqrt{\pi} \\
&\approx |\psi_0|^2 \iint_{Sch II} dx dy + |\psi_0|^2 \frac{4\pi}{k} \operatorname{Re}(if(\vec{0})) \\
&\approx |\psi_0|^2 \iint_{Sch II} dx dy - |\psi_0|^2 \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} f(\vec{0})
\end{aligned}$$

Ricaviamo allora l'uguaglianza

$$\frac{\iint_{Sch II} |\psi|^2 da}{|\psi_0|^2} \approx \iint_{Sch II} dx dy - \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} f(\vec{0})$$

che conviene porre nella seguente forma

$$\iint_{Sch II} dx dy - \frac{\iint_{Sch II} |\psi|^2 da}{|\psi_0|^2} \approx \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} f(\vec{0})$$

Ora si noti che il primo integrale a primo membro è ciò che si ottiene dal secondo integrale a primo membro nel caso in cui $\psi = \psi_0$ ovvero quando la funzione d'onda diffusa coincide con quella incidente il che significa che è assente il centro diffusore

$$\sigma_{\text{senza centro diffusore}} = \iint_{\text{Sch II}} dx dy$$

Consegue allora che si deve anche avere

$$\sigma_{\text{con centro diffusore}} = \frac{\iint_{\text{Sch II}} |\psi|^2 da}{|\psi_0|^2}$$

Ora si deve tenere conto che la differenza tra queste due sezioni d'urto è proprio la sezione d'urto totale d'interazione

$$\sigma_{\text{senza centro diffusore}} - \sigma_{\text{con centro diffusore}} = \sigma_{\text{interazione totale con centro diffusore}}$$

per cui, per confronto si ottiene

$$\sigma_{\text{interazione totale con centro diffusore}} = \frac{4\pi}{k} \text{Im } f(\vec{0})$$

1.D

La rappresentazione integrale della funzione di Bessel di ordine zero che si incontra più di frequente è la seguente (vedi 9.1.18 Abramowitz-Stegun)

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \cos \varphi) d\varphi$$

Da qui si trova facilmente

$$\begin{aligned} J_0(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{e^{ix \cos \varphi} + e^{-ix \cos \varphi}}{2} d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{ix \cos \varphi} d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-ix \cos \varphi} d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} e^{ix \cos(\varphi' - \pi)} d(\varphi' - \pi) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-ix \cos \varphi} d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} e^{-ix \cos \varphi'} d\varphi' + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-ix \cos \varphi} d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ix \cos \varphi} d\varphi \end{aligned}$$

1.E

Le derivate delle funzioni di Bessel possono essere espresse attraverso altre funzioni di Bessel (vedi 9.1.30 Abramowitz-Stegun). da questa formula si trova la relazione

$$\frac{1}{z} \frac{d}{dz} z J_1(z) = J_0(z)$$

Da qui si trova facilmente

$$\begin{aligned} f(\vec{q}) &= ik \int_0^R r J_0(qr) dr \\ &= i \frac{k}{q^2} \int_0^{qR} z J_0(z) dz \\ &= i \frac{k}{q^2} \int_0^{qR} z \frac{1}{z} \frac{d}{dz} z J_1(z) dz \\ &= i \frac{k}{q^2} z J_1(z) \Big|_0^{qR} \\ &= i \frac{kR}{q} J_1(qR) \end{aligned}$$

2. Fisica Nucleare

Fisica Atomica, Nucleare e delle Particelle Elementari

La fisica atomica, la fisica nucleare e la fisica delle particelle sono discipline recenti, sviluppatesi nel corso degli ultimi 100 anni. Nonostante oggi siano consolidate come tre aree differenti della fisica, sotto il profilo storico esiste tra loro una continuità poiché originatesi dal tentativo di comprendere sempre più a fondo la struttura della materia.

Un problema assi antico questo, poiché la materia (assieme allo spazio ed al tempo) rappresenta il dato empirico più rilevante dell'ambiente in cui siamo immersi per cui non deve sorprendere che sia stato al centro della speculazione razionale già al tempo degli antichi greci dove tale speculazione prese avvio. Tuttavia è solamente a cavallo tra ottocento e novecento che ha potuto fondarsi su sempre più solide evidenze sperimentali (vedi App. 1 – Profilo storico).

Chimica e termodinamica, le prime evidenze indirette della struttura interna della materia

I primi indizi di una struttura interna della materia emersero nel campo della chimica (ipotesi atomica di Dalton, 1802-03) ma, già a partire dalla seconda metà dell'ottocento, anche nella fisica cominciarono ad accumularsi evidenze. Furono soprattutto i lavori di Clausius e Maxwell sui gas che chiarirono come l'ipotesi atomica potesse essere la via maestra per comprendere i fenomeni termodinamici. La successiva formulazione della meccanica statistica da parte di Boltzmann e Gibbs (1875) chiari che era possibile dedurre le leggi termodinamiche ipotizzando che la materia fosse costituita, a livello microscopico, da atomi che, nel caso dei gas, si muovevano e si urtavano in modo caotico.

Le prime evidenze sperimentali della struttura interna della materia

Sul finire dell'800 la tecnologia cominciò ad essere sufficientemente matura da porre su basi sperimentali il problema dell'atomo (tubi catodici). Thompson, infatti, fu capace di stabilire che l'atomo non era una struttura indivisibile ma composta per lo meno da *elettroni* e *protoni* che fu capace di individuare misurandone la carica e la massa.

La disposizione di tali particelle all'interno dell'atomo fu compresa da Rutherford il quale, per mezzo di una famosa serie di esperimenti condotti attorno al 1910, chiarì che l'atomo ($\sim 10^{-8}\text{cm}$) è una specie di microscopico sistema solare retto dalla forza elettromagnetica con gli elettroni orbitanti attorno ad una densissima struttura detta *nucleo* ($\sim 10^{-13}\text{cm}$) formata da protoni. Fu lo stesso Rutherford ad intuire che nel nucleo dovessero risiedere anche particelle massive quanto i protoni ma prive di carica elettrica chiamate in seguito *neutroni* effettivamente osservati da Chadwick nel 1932 registrando il rinculo dei nuclei carichi urtati dai neutroni.

La struttura dell'atomo, la meccanica quantistica, la fisica atomica

Individuati i componenti dell'atomo e la loro disposizione al suo interno si poteva tentarne una descrizione quantitativa. Fu però chiaro sin dagli inizi che la leggi della fisica classica (meccanica classica e teoria elettromagnetica) non erano in grado di farlo. Si tratta di uno dei più avvincenti capitoli della fisica quello che portò, più o meno nello stesso periodo (il primo lavoro di Bohr è del 1913, quelli di Heisenberg e Schroedinger sono del 1925 e 1926), alla formulazione della *meccanica quantistica*, la 'teoria del moto' delle particelle microscopiche che sostituiva quella newtoniana. L'insieme delle indicazioni di natura sperimentale sui costituenti dell'atomo unitamente alle leggi della meccanica quantistica permise ai fisici di condurre calcoli sempre più precisi supportati da sempre più precisi esperimenti. Teoria ed esperimento si rafforzarono reciprocamente portando al rapido sviluppo della *fisica atomica*.

La struttura del nucleo, l'interazione forte, la fisica nucleare

La peculiare struttura dell'atomo poneva inevitabilmente il problema della struttura del nucleo poiché era già evidente a Rutherford che protoni elettricamente carichi potevano legarsi tra loro in una struttura così compatta solo attraverso una nuova interazione più intensa di quella elettromagnetica. Dato che nei nuclei risiedevano pure i neutroni si doveva concludere che tale interazione, detta interazione forte, doveva essere anche indipendente dalla carica elettrica. Lo studio della struttura del nucleo e della interazione forte prese avvio nei *primi anni '30* dando inizio alla *fisica nucleare*.

Le prime evidenze di particelle diverse dai costituenti della materia, la fisica delle particelle

Nel corso degli anni '30, con l'introduzione del neutrino da parte di Pauli per spiegare la cinematica del decadimento beta nucleare, poi con la scoperta del mesone mu da parte Anderson e Neddermeyer nel 1937, ma, soprattutto, con il lavoro di Fermi sulle interazioni deboli (1933) fondato sulla idea rivoluzionaria che le particelle potessero mutuamente convertirsi le une nelle altre, cominciarono ad accumularsi evidenze che il mondo delle particelle si estendeva ben oltre i componenti della materia ordinaria. La graduale acquisizione di questo fatto indirizzò la ricerca di punta verso lo studio autonomo delle particelle e delle loro interazioni dando inizio alla moderna *fisica delle particelle*. Questa ebbe uno sviluppo travolgente a partire dall'immediato dopoguerra, prima nei laboratori americani, poi, gradualmente, in quelli europei e di altre parti del mondo.

La *fisica atomica*, *fisica nucleare* e *fisica delle particelle elementari* sono tre versioni storicamente successive di quella area della ricerca in fisica, orientata allo studio dei costituenti ultimi e delle loro proprietà, cui diamo il nome un poco generico di *fisica fondamentale*. Da tempo consolidate come aree autonome della ricerca in fisica, sono oggi caratterizzate da specifici metodi sperimentali ed approcci teorici.

Per quanto riguarda la fisica nucleare, il problema è essenzialmente quello di studiare le proprietà dello stato legato di decine ed anche centinaia tra protoni e neutroni, tenuti insieme dalla interazione forte, dove però giocano un ruolo rilevante anche l'interazione elettromagnetica e debole. Il problema è intrinsecamente complesso a causa del gran numero di neutroni e protoni interagenti ma si rivelò ancor più arduo a causa della inaspettata complessità della interazione forte stessa.

La ragione di questo fatto divenne chiara a partire dagli anni '60 con la formulazione prima del *modello a quark* e poi, agli inizi degli anni '70, della teoria di campo quantizzato della interazione forte, la *cromodinamica quantistica*. Si capì allora che protoni e neutroni non erano particelle elementari ma piuttosto stati legati di quark (ancor oggi ritenuti puntiformi) tra cui operava l'interazione forte 'primaria'. Quest'ultima, a sua volta, nonostante alcune analogie formali con la

forza elettromagnetica, risultava assai più intensa di quest'ultima e soprattutto caratterizzata dalla proprietà del tutto nuova di essere mediata da campi autointeragenti ovvero da campi essi stessi portatori di 'carica forte'. Ciò significa che quelle tra i nucleoni non sono le forze forti 'primarie' generate dalle cariche forti puntiformi ma forze forti 'secondarie' o 'residue' di carattere multipolare del tipo delle forze interatomiche e intermolecolari nel caso della interazione elettromagnetica. Si tratta di un progresso fondamentale sul piano teorico anche se, sul piano pratico, dedurre le forze tra nucleoni a partire dalle forze primarie tra quark è ancora oggi sostanzialmente impossibile per cui la fisica nucleare deve fare largo ricorso ad un approccio fenomenologico fondato su modelli.

I costituenti del nucleo

Scopo della fisica nucleare è quello di studiare le proprietà ed i processi riguardanti i *nuclei atomici*. Come già detto, il nucleo è costituito da un certo numero di *protoni* e *neutroni* legati assieme dalla *interazione forte* (i nuclei noti sia naturali che artificiali, sia stabili che instabili, vanno dal semplice *nucleo di idrogeno* formato da un solo protone, al *nucleo di ununoctio* formato da 118 protoni e 196 neutroni) dove però anche *l'interazione elettromagnetica* e *l'interazione debole* giocano un ruolo rilevante mentre l'interazione gravitazionale può essere assolutamente trascurata.

I costituenti nucleari

I costituenti del nucleo, i protoni ed i neutroni, vengo indicati nel loro complesso con il termine di *nucleoni*. Se le energie in gioco sono inferiori alla *decina di GeV* come avviene nella fisica nucleare alle basse e medie energie, allora il potere risolutivo del fascio non è tale da mettere in risalto la struttura interna dei nucleoni (costituiti come vedremo da particelle elementari dette quarks) che possono essere trattati come *particelle puntiformi* il cui comportamento cinematico e dinamico è ben descritto dalle leggi della *meccanica quantistica classica*.

Proprietà statiche dei nucleoni

I nucleoni hanno approssimativamente una massa di 940 MeV e sono pertanto più massivi degli elettroni (0.51 MeV) di circa 1840 volte. Sia pur di poco (~ 1.26 MeV), la massa del neutrone eccede quella del protone un fatto che, come vedremo, ha rilevanti conseguenze in tutta la fisica nucleare.

I nucleoni possiedono un *momento angolare intrinseco* detto *spin* $s=1/2$ (in unità $\hbar=1.055 \times 10^{-34} \text{ J s}$) che, in accordo con le leggi della meccanica quantistica, stabilisce che collettivamente si comportino come *fermioni* (ovvero soddisfino le leggi di conteggio di Fermi-Dirac ed il principio di Pauli).

	n	p
massa (MeV)	939,56	938,27
spin	$1/2 \hbar$	$1/2 \hbar$
momento dipolo magnetico	$2.79 \frac{e\hbar}{2m_p}$	$-1.91 \frac{e\hbar}{2m_p}$
momento dipolo elettrico	~ 0	~ 0

I nucleoni possiedono anche un *momento intrinseco di dipolo magnetico*. In particolare, per il neutrone ha un valore di 2.79 e per il protone di -1.91 (in unità del *magnetone nucleare* $\frac{e\hbar}{2m_p} = 5.05 \times 10^{-27} J/T$).

I *nucleoni non possiedono momento di dipolo elettrico* un fatto che ha importanti implicazioni di ordine generale sulle quali torneremo.

Nonostante nella fisica nucleare delle basse energie neutrone e protone possano essere pensate come particelle 'puntiformi' è bene tenere presente che a più alte energie esse rivelano una struttura interna assai complessa pensabile, in prima approssimazione, come uno stato legato di tre quark (neutrone=udd; protone=uud).

NOTA: E' bene evitare ogni tentativo di modellizzare classicamente lo spin. Infatti i corpi classici possono avere un momento angolare intrinseco solo se sono estesi e si trovano in uno stato di rotazione rispetto ad un qualche asse. In tale caso il momento angolare intrinseco assume valori variabili con continuità dipendenti dalla velocità angolare di rotazione. Nel caso quantistico, invece, il momento angolare intrinseco è posseduto pure dalle particelle 'puntiformi' prive di struttura interna (l'elettrone ad esempio) ed assume un valore fisso con proiezioni quantizzate. In questo modo il momento angolare intrinseco perde il suo carattere di grandezza cinematica per diventare, invece, una proprietà intrinseca della particella.

Lo stesso dicasi per il momento di dipolo magnetico. Classicamente un sistema possiede momento di dipolo magnetico se è esteso, carico e rotante. Il suo valore varia con continuità e dipende dalla velocità di rotazione, dalla carica posseduta e dalla sua dislocazione nello spazio. Nel caso quantistico, invece, il momento di dipolo magnetico può essere posseduto anche da particelle 'puntiformi' prive di struttura interna, ed assume un valore fisso perdendo il carattere di grandezza cinematica per diventare, invece, una proprietà intrinseca della particella.

La notazione

Il nucleo è un sistema legato di nucleoni ovvero protoni e neutroni tenuto insieme dalla interazione forte. Si definisce **numero atomico Z** il numero di protoni del nucleo (coincidente con il numero di elettroni del corrispondente atomo neutro), si introduce inoltre il **numero di neutroni N**. Si definisce infine **numero di massa A** il numero di nucleoni del nucleo per cui si ha $A=N+Z$. I nuclei vengono identificati con la seguente notazione specifica



dove X è il simbolo chimico dell'atomo corrispondente. I nuclei con lo stesso Z sono detti **isotopi**, quelli con lo stesso N **isotoni**, quelli con lo stesso A **isobari**.

Il raggio nucleare

In ottica la forma, la dimensione ed in generale le proprietà di un oggetto molto piccolo possono essere studiate inviando onde luminose su di esso e registrando le onde emergenti su di uno schermo. Scegliendo la lunghezza d'onda della luce incidente in modo da avere il potere risolutivo desiderato sullo schermo apparirà una figura di diffrazione con una distribuzione della intensità luminosa dipendente da forma, dimensione e proprietà dell'oggetto illuminato. Data l'onda incidente quindi, il problema sarà quello di risalire dalla distribuzione osservata alle proprietà dell'oggetto illuminato.

In fisica nucleare e subnucleare le cose vanno esattamente nello stesso modo. L'oggetto da studiare può essere un nucleo oppure, se si dispone di sufficiente potere risolutivo (ovvero energia), un nucleone o addirittura un suo componente. Tale oggetto potrà essere illuminato con luce (o meglio raggi X e gamma) ma anche con altre onde (nel senso di De Broglie) quali elettroni, protoni, neutroni ed altre particelle ancora con le quali è più facile raggiungere elevate risoluzioni. Infine, le 'onde' emergenti potranno essere registrate su superfici sensibili in modo da misurare la distribuzione della loro intensità, un dato che solitamente rappresenta il punto di arrivo degli esperimenti. Poi vi è l'analisi dei dati attraverso la quale si cerca di risalire alle proprietà dell'oggetto illuminato che saranno poi la base per l'inquadramento teorico del fenomeno.

La misura della dimensione del nucleo

Ciò premesso, un esperimento per la misura delle dimensioni del nucleo atomico potrebbe essere pensato sulla base dei seguenti ragionamenti:

- i) *scelta del tipo di particelle proiettile.* In linea di principio si possono usare *elettroni*, particelle soggette alla sola interazione elettromagnetica, come tali capaci di fornire una 'radiografia' della distribuzione nucleare dei soli protoni. Dato che la forza elettrica è ben conosciuta e gli elettroni sono puntiformi con questa tecnica è possibile ottenere dati molto precisi. Se si vogliono ottenere informazioni sulla distribuzione nucleare dei nucleoni nel loro complesso la cosa migliore è quella di utilizzare i neutroni i quali, interagendo solo fortemente, vedono allo stesso modo sia i protoni che i neutroni (preferibili ai protoni 'disturbati' dalla interazione elettromagnetica con i protoni nucleari). Naturalmente in queste valutazioni si dovrebbe tenere conto anche della intensità e qualità dei fasci etc. etc;
- ii) *scelta della energia del proiettile.* Si deve avere un potere risolutivo adeguato per risolvere la struttura del nucleo, dunque una lunghezza d'onda dell'ordine delle dimensioni nucleari ovvero di circa 10 fm ($1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$).

il che comporta una energia dei neutroni dell'ordine dei 10 MeV

$$\lambda \approx 10 \text{ fm} \approx 10 \frac{1}{200} \frac{\hbar c}{\text{MeV}} \approx \frac{1}{20} \frac{\hbar c}{\text{MeV}}$$

$$E_{\text{cin}} = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2 \approx mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{p^2 c^2}{m^2 c^4}\right) - mc^2 \approx \frac{p^2}{2m} \approx \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \approx 2\pi^2 \frac{\hbar^2 c^2}{mc^2 \lambda^2} \approx 20 \frac{\hbar^2 c^2}{1000 \text{ MeV} \frac{1}{400} \frac{\hbar^2 c^2}{\text{MeV}^2}} \approx 8 \text{ MeV}$$

iii) avere una idea del tipo di processi che si hanno con la energia del proiettile scelta. Ipotizzando che i neutroni di questa energia non riescano a trapassare il nucleo atomico potremmo assimilarlo ad un *disco assorbente*.

Seguendo questa impostazione, si può misurare il raggio nucleare sia misurando la sezione d'urto totale di interazione che quella differenziale di diffusione.

Il raggio nucleare dalla sezione d'urto totale di interazione

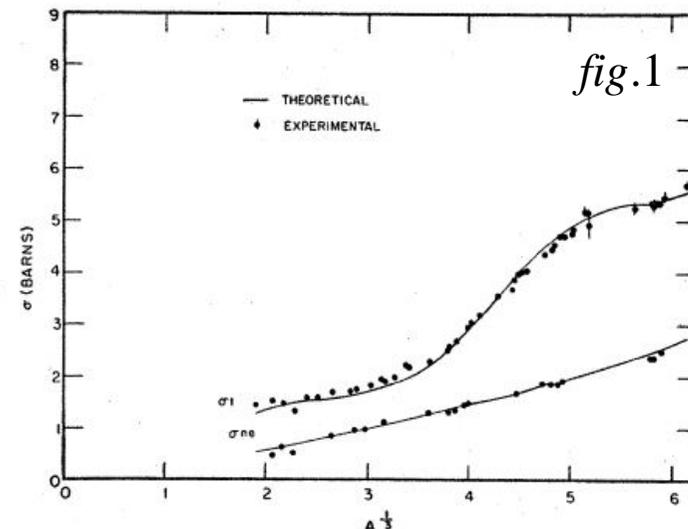
Ricordando che la sezione d'urto totale di interazione è data dalla somma della sezione d'urto totale di diffusione (πR^2) e di assorbimento (πR^2)

$$\sigma = 2\pi R^2 \quad (15)$$

si potrebbe determinare il raggio nucleare misurando la sezione d'urto totale di interazione con neutroni intorno ai 10 MeV su bersagli materiali contenenti diversi tipi di nucleo.

Molte misure di questo tipo furono compiute nel dopoguerra con la disponibilità di acceleratori di energia via via crescente. Nella figura è mostrato un grafico della **sezione d'urto totale e di assorbimento di neutroni in funzione della radice cubica del numero di nucleoni A del nucleo**. Quali informazioni possiamo trarre da un simile grafico?

NOTA: dato che sia le interazioni elastiche che inelastiche rimuovono i neutroni dal fascio la sezione d'urto totale di interazione può essere misurata contando i neutroni persi dal fascio.



Fernbach, Rev. Mod. Phys. 30, 414 (1958)

L'interpretazione dei dati richiede innanzitutto un modello. Per cominciare potremmo pensare il nucleo come un aggregato sferico compatto di nucleoni approssimati a loro volta da piccole sfere

$$V_{nuc} = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad V_{nuc} \approx A \frac{4}{3}\pi r_0^3$$

da cui si ottiene la seguente relazione tra raggio nucleare e numero atomico

$$R_{nuc} = r_0 A^{1/3} \quad (16)$$

Ciò porterebbe alla seguente relazione tra sezione d'urto totale e numero atomico

$$\sigma = 2\pi R^2 = 2\pi r_0^2 (A^{1/3})^2 \quad (17)$$

ovvero una relazione di tipo parabolico nella la variabile $A^{1/3}$. Ora si noti che i dati hanno effettivamente un andamento ad arco di parabola ma, contrariamente alla previsione della formula, intersecano l'asse verticale ($A=0$) ad un valore di sezione d'urto non nullo. Ciò significa che dobbiamo aggiungere alla sezione d'urto calcolata con la (17) un termine costante che può essere ottenuto aggiungendo un termine costante alla espressione (16) del raggio nucleare

L'espressione del raggio nucleare in funzione del numero di nucleoni

$$R_{nuc} = r_0 A^{1/3} + b \quad (18)$$

Bethe suggerì che tale termine costante dovesse interpretarsi come un una specie di 'alone nucleare' (*nuclear skin*) di spessore costante indipendente dal tipo di nucleo dovuto al raggio finito della forza forte. Dalla fig.1 possiamo stimare un valore approssimativo della sezione d'urto totale ad $A=0$ di circa 0.5 barn da cui si ottiene

$$\sigma = 2\pi R^2 = 2\pi(r_0 A^{1/3} + b)^2 \quad \sigma(A^{1/3} = 0) = 2\pi b^2 \quad b = \sqrt{\frac{\sigma(A^{1/3} = 0)}{2\pi}} \approx \sqrt{\frac{0.5 \times 10^{-24}}{2\pi}} \approx 2.8 \times 10^{-13} \text{ cm} \approx 2.8 \text{ fm}$$

Il valore meglio compatibile con i dati sperimentali oggi disponibili è circa **$b=2.4 \text{ fm}$** . Leggendo il valore della sezione d'urto totale d'interazione di fig.1 corrispondente ad un secondo nucleo (ad esempio $A^{1/3}=4$ dove $\sigma=2.8 \text{ barn}$) possiamo ottenere una stima di r_0

$$\sigma = 2\pi R^2 = 2\pi(r_0 A^{1/3} + b)^2 \quad r_0 = \frac{1}{A^{1/3}} \left(\sqrt{\frac{\sigma}{2\pi}} - b \right) \approx \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{2.8 \times 10^{-24}}{2\pi}} - 2.4 \times 10^{-13} \right) \approx 1.1 \times 10^{-13} \text{ cm} \approx 1.1 \text{ fm}$$

Il valore meglio compatibile con i dati sperimentali oggi disponibili è circa **$r_0=1.24 \text{ fm}$** .

Sezione d'urto differenziale di neutroni su nuclei

Un disco circolare assorbente (vedi introduzione formula 17) ha una sezione d'urto differenziale di diffusione data dalla espressione

$$\frac{d\sigma_{diff}}{d\Omega} = \frac{k^2 R^2}{q^2} J_1^2(qR)$$

Introducendo l'angolo ϑ di osservazione rispetto all'asse del sistema abbiamo la seguente espressione del vettore d'onda trasferito (vedi figura)

$$q = k \sin \vartheta = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \vartheta \quad (19)$$

per cui sostituendo otteniamo

$$\frac{d\sigma_{diff}}{d\Omega} = \frac{R^2}{\sin^2 \vartheta} J_1^2\left(\frac{2\pi R}{\lambda} \sin \vartheta\right) \quad (20)$$

Tale espressione va confrontata con i dati sperimentali che mostriamo qui a fianco i quali, in effetti, mostrano un andamento con l'angolo ϑ in prima approssimazione compatibile con quello di una funzione di Bessel del primo ordine.

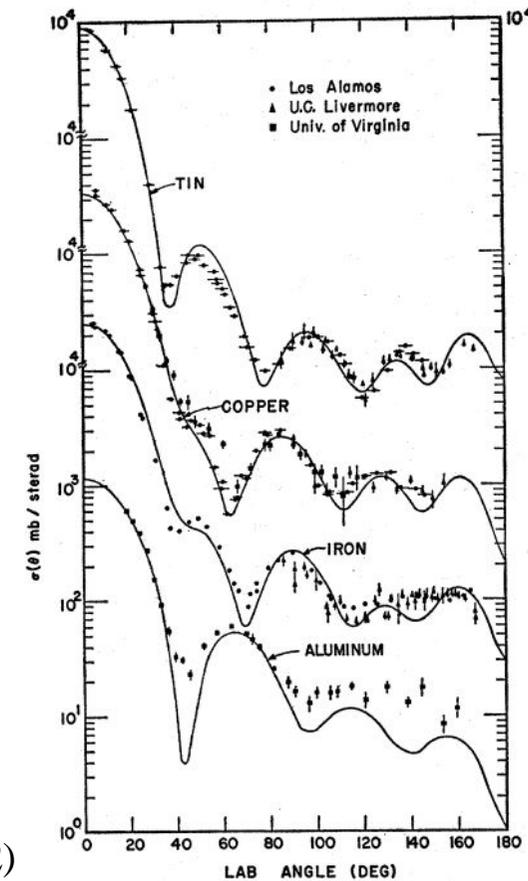
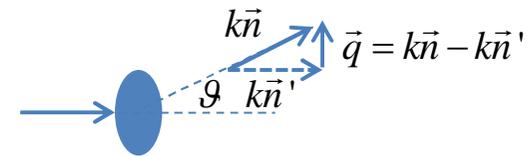
La sezione d'urto di diffusione in avanti

E' interessante considerare la sezione d'urto differenziale in avanti ovvero per ϑ prossimo a zero. Sviluppando asintoticamente la funzione di Bessel per piccoli valori dell'argomento (**9.4.4 Abramowitz-Stegun**)

$$J_1(z) \approx \frac{1}{2}z - \frac{1}{16}z^3 \quad (21)$$

e sostituendo nella (20), otteniamo la sezione d'urto differenziale a $\vartheta=0$ dalla quale potremmo ottenere una nuova **stima del raggio nucleare** (si noti che tale valore cresce con la quarta potenza del raggio nucleare!)

$$\frac{d\sigma_{diff}}{d\Omega} = \frac{R^2}{\sin^2 \vartheta} J_1^2\left(\frac{2\pi R}{\lambda} \sin \vartheta\right) \approx \frac{R^2}{\sin^2 \vartheta} \frac{1}{4} \frac{4\pi^2 R^2}{\lambda^2} \sin^2 \vartheta \approx \frac{\pi^2 R^4}{\lambda^2} \quad (22)$$



Fernbach, Rev. Mod. Phys. 30, 414 (1958)

I minimi della sezione d'urto di diffusione

Secondo la formula (20) l'andamento della sezione d'urto di diffusione per angoli non nulli dovrebbe essere governato dal quadrato della funzione di Bessel del primo ordine. Ora è noto che le funzioni di Bessel si annullano ripetutamente un fatto che non trova corrispondenza nell'andamento delle sezione d'urto di diffusione che ha dei minimi pronunciati ma non si annulla mai. Ciò indica che modellizzare il nucleo come un disco assorbente non è del tutto appropriato. Assumendo in prima approssimazione che i minimi della sezione d'urto corrispondano agli zeri della funzione di Bessel abbiamo nel caso del primo zero (vedi Abramowitz-Stegun 9.5.14)

$$J_1(z) = 0 \quad \text{se} \quad z = 3.832$$

da cui, tenendo conto della (20)

$$\frac{2\pi R}{\lambda} \sin \vartheta = 3.832$$

e quindi la seguente espressione dalla quale potremmo ottenere un'altra **stima del raggio nucleare** a partire dalla posizione angolare del primo minimo della sezione d'urto differenziale di diffusione

$$R = \frac{3.832}{2\pi} \frac{\lambda}{\sin \vartheta} \quad (23)$$

Un accenno al modello ottico del nucleo

Concludendo, l'ipotesi che il nucleo assorba totalmente i neutroni incidenti è troppo drastica poiché non riesce a riprodurre correttamente l'andamento delle sezioni d'urto di diffusione. La descrizione dei dati sperimentali richiede l'ipotesi che il nucleo sia parzialmente trasmittente un po' come accade alla luce incidente su di una sfera di vetro solo parzialmente opaca. Dato che nel caso della luce si descriverebbe un simile comportamento per mezzo di un indice di rifrazione dotato sia di una parte reale che immaginaria, si è pensato di modellizzare il nucleo per mezzo di un potenziale complesso (dotato sia di una parte reale che immaginaria) dando origine al cosiddetto **modello ottico del nucleo**, capace di descrivere perfettamente i dati sperimentali disponibili (la parte reale del potenziale è solitamente assunta nella forma di Saxon-Woods mentre quella immaginaria nella forma di una gaussiana).

L'energia di legame nucleare

Alcune importanti indicazioni sulle proprietà della forza nucleare che unisce i nucleoni nel nucleo provengono dalle misure sperimentali della energia di legame rese possibili dalla grande intensità delle interazioni forti e compiute in modo sistematico a partire dagli anni '20 da Aston ed altri fisici. Introduciamo ora il concetto di energia di legame del nucleo per mezzo di un semplice esempio.

Esempio sulla energia di legame

Si immagini un sistema formato da due sferette omogenee di massa m e raggio R , soggette alla mutua attrazione gravitazionale, disposte in quiete l'una accanto all'altra. Sappiamo che, per separare le sferette, dobbiamo applicare su una di esse una forza esterna uguale e contraria a quella attrattiva in modo da portarla all'infinito (avendo avuto cura di fissare l'altra!). Nel linguaggio del lavoro *dobbiamo compiere lavoro contro la forza attrattiva gravitazionale* che tiene unite le sferette. Nel linguaggio della energia *dobbiamo fornire energia al sistema legato in modo da separarlo nei suoi componenti*. Tale energia viene detta energia di legame del sistema e può essere facilmente calcolata

$$\Delta E = \int_{2R}^{\infty} G \frac{m^2}{r^2} dr = G \frac{m^2}{2R}$$

Ora immaginiamo di volerla misurare. Un primo metodo è quello diretto, consistente nel misurare ripetutamente la forza applicata sulla sferetta in modo da ottenere il lavoro compiuto. Nel caso ciò non sia possibile (come nel caso dei nucleoni del nucleo) non rimane che il seguente metodo indiretto basato sulla teoria della relatività ristretta (TRR). Infatti, sulla base della TRR sappiamo che alla frazione di energia ceduta la sistema delle sferette compete una inerzia calcolabile con la ben nota relazione

$$\Delta m = \Delta E / c^2$$

D'altra parte, dalla conservazione della energia possiamo scrivere la relazione di bilancio

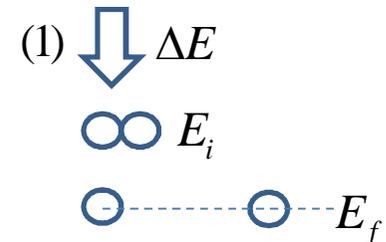
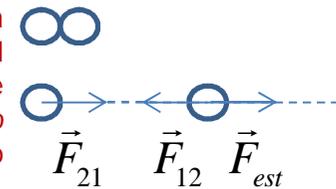
$$\Delta E + E_i = E_f$$

da cui

$$E_f = M_f c^2 \quad E_i = M_i c^2$$

e quindi

$$M_f - M_i = \frac{\Delta E}{c^2}$$



Ciò significa che, secondo la TRR, la somma delle masse componenti il sistema è superiore alla massa del corrispondente sistema legato (*difetto di massa*) in accordo con il fatto che l'energia potenziale attrattiva del sistema legato contribuisce al bilancio delle masse con una inerzia negativa. Sulla base di questo fatto, si potrebbe pensare di **misurare sperimentalmente l'energia di legame misurando la differenza della tra la massa totale dei componenti liberi e quella degli stessi componenti legati**

$$\Delta E = (M_f - M_i)c^2$$

E' chiaro che nel caso in esame, a causa della estrema debolezza della interazione gravitazionale, tale difetto di massa è, sia in assoluto che percentualmente, troppo piccolo per essere misurato

$$M_f - M_i = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{Gm^2}{2Rc^2} \quad \frac{M_f - M_i}{2m} = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{Gm}{4Rc^2}$$

Nel caso della interazione forte invece, la più intensa delle interazioni naturali, tale difetto di massa è assai più rilevante e diventa sperimentalmente misurabile.

Definizione operativa della energia di legame nucleare

Definiamo allora **energia di legame del nucleo** l'energia necessaria per separare il nucleo nei nucleoni componenti

$$B({}_Z^A X) = [Nm_n + Zm_p - m_N({}_Z^A X)]c^2 \quad (2)$$

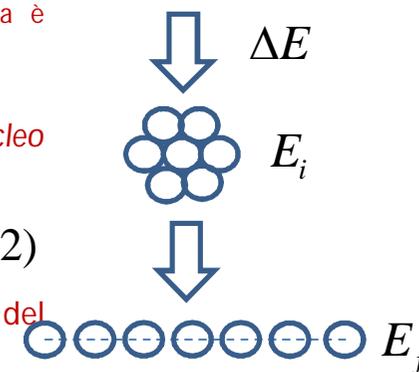
dove m_n , m_p e m_N sono rispettivamente le masse del neutrone, del protone e del nucleo.

NOTA: Vale la pena precisare che **le masse nucleari sono misurabili con minore precisione di quelle atomiche** per cui è utile ricavare le prime dalle seconde attraverso la relazione

$$m_A({}_Z^A X) = m_N({}_Z^A X) + Zm_e - \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^Z B_i^{el}$$

dove m_A è la massa dell'atomo corrispondente al nucleo in esame. E' chiaro che in molti casi le energie di legame elettroniche che sono dell'ordine dei 10-100 KeV possono essere trascurate e la relazione tra masse atomiche e nucleari diventa

$$m_N({}_Z^A X) \sim m_A({}_Z^A X) - Zm_e \quad (2.1)$$



Attraverso la formula (2) risulta possibile determinare la energia di legame dei nuclei. In generale essa dipenderà dal numero di neutroni e protoni N e Z o, alternativamente, da A e Z . Se vogliamo graficare tale energia di legame in funzione di A dobbiamo fissare Z e la scelta ovvia è quella considerare il nucleo isobaro più stabile. L'andamento del quoziente B/A ovvero del **valore medio per nucleone della energia di legame** è mostrato nel grafico sottostante. Alcuni immediati commenti:

i) ci sono configurazioni nucleari particolarmente stabili ${}^4\text{He}$, ${}^{12}\text{C}$, ${}^{16}\text{O}$ etc. etc;

ii) a parte queste eccezioni, l'energia di legame media per nucleone ha un andamento regolare. Aumenta rapidamente con il numero di nucleoni fino ad un valore di circa 8 MeV per nucleone dopodichè diminuisce assai lentamente (proprietà di saturazione);

iii) il nucleo più stabile è il ${}^{56}\text{Fe}$. I nuclei a destra (nuclei pesanti) aumentano l'energia di legame diminuendo A ovvero frazionandosi in nuclei più piccoli, i nuclei a sinistra (nuclei leggeri) aumentano la energia di legame aumentando A ovvero aggregandosi in nuclei più grandi. Ciò significa che le reazioni di fusione dei nuclei leggeri e quelle di fissione dei nuclei pesanti sono esotermiche mentre le reazioni di fissione dei nuclei leggeri e quelle di fusione dei nuclei pesanti sono endotermiche;

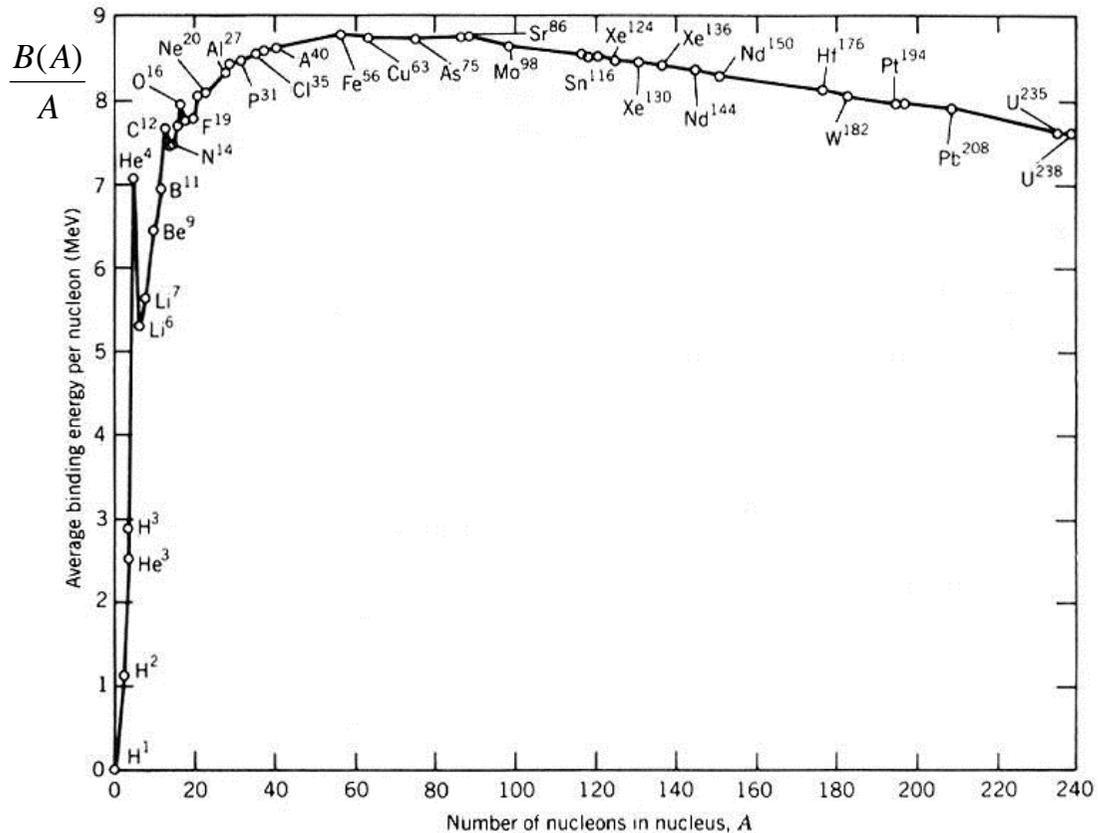


Fig.1

NOTA: Questi semplici fatti hanno importantissime conseguenze, ad esempio: i) chiariscono che i processi nucleari potenzialmente utili per la produzione di energia sono quelli di fusione dei nuclei leggeri e fissione dei nuclei pesanti; ii) suggeriscono che i nuclei e quindi gli atomi più complessi si potrebbero formare attraverso una catena di processi spontanei di fusione nucleare (poiché esoenergetici) a partire dall'idrogeno. In effetti, una spettacolare conferma di questa possibilità è offerta dalle stelle. Oggi sappiamo che una stella come il sole ricava la quasi totalità della energia (circa il 98%) dalla fusione di nuclei d'idrogeno in nuclei di elio. L'energia prodotta delle reazioni di fusione fluisce verso l'esterno mantenendo nel contempo la temperatura interna a valori dell'ordine dei 15 milioni di gradi. Tale elevata energia cinetica dei prodotti delle reazioni di fusione fornisce una spinta verso l'esterno che bilancia la contrazione gravitazionale mantenendo il sole in una situazione di equilibrio meccanico. Il grafico suggerisce cosa potrà succedere una volta esaurito l'idrogeno: la contrazione gravitazionale prenderà il sopravvento comprimendo la materia fino al punto da innescare le reazioni di fusione dell'elio in carbonio stabilendo un nuovo periodo di equilibrio. Il processo continuerà con questo andamento ciclico fino alla fusione del silicio in ferro oltre al quale non è possibile procedere spontaneamente poiché le reazioni di fusione diventano endotermiche. A quel punto la gravitazione prenderà il sopravvento e, non più contrastata dall'innescamento di reazioni di fusione, farà collassare la stella che espellerà in modo esplosivo gli strati più esterni lasciando un residuo compatto di materia in uno stato degenere.

La unità di massa atomica

I fisici delle particelle elementari trovano naturale misurare le masse atomiche e nucleari in unità di eV/c^2 (preferibilmente in MeV/c^2) ma, i fisici nucleari e soprattutto i chimici, i biochimici, i biologi molecolari preferiscono usare una scala di massa la cui unità è prossima a quella del protone e del neutrone. Si tratta della **unità di massa atomica** (simbolo **u**) definita come la **dodicesima parte della massa dell'atomo di carbonio-12** (prima del 1960 si usava la 16 parte della massa atomica dell'ossigeno-16, simbolo *amu*).

E' evidente che tale unità di massa, a causa della inerzia negativa associata alla energia di legame del nucleo, deve essere inferiore sia alla massa del protone che del neutrone

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} M_A(^{12}_6C) &= \frac{1}{12} [M_N(^{12}_6C) + 6m_e - \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^6 B_i^{elett}] = \frac{1}{12} [6m_n + 6m_p - \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^{12} B_i^{nucl} + 6m_e - \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^6 B_i^{elett}] \\ &\approx \frac{m_n + m_p + m_e}{2} - \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} B_i^{nucl} / c^2 \approx \frac{939.57 + 938.27 + 0.51}{2} - 7.68 \approx 931.5 \text{ MeV} \end{aligned}$$

infatti la conversione precisa tra u e MeV/c^2 è la seguente **1u = 931.5016 MeV/c²** ovvero un valore di circa l'1% inferiore alla massa del neutrone e del protone. Per finire avvertiamo che i biochimici ed i biologi molecolari chiamano la unità di massa atomica **Dalton** (simbolo **Da**).

Il modello a goccia del nucleo

Il grafico della energia di legame media per nucleone $B(A)/A$ mostrato in figura 1 contiene un certo numero di importanti indicazioni sulla forza nucleare che sono alla base di un primo modello del nucleo (già suggerito da Bohr nel 1935) focalizzato essenzialmente sul **raggio finito della interazione nucleare** e per questo detto modello a goccia.

Energia di legame nucleare: termine di volume

Come accennato la energia di legame tende ad assumere rapidamente il valore medio di circa 8MeV per nucleone (saturazione) il che indica una energia di legame del nucleo proporzionale al numero di nucleoni

$$B \approx 8 \text{ MeV} \times A$$

Ora, se la forza nucleare si comportasse come una forza a lungo raggio (tipo la forza gravitazionale o elettromagnetica) ogni nucleone interagirebbe con tutti i rimanenti altri per cui dovremmo attenderci una energia di legame del nucleo tendenzialmente proporzionale al numero di coppie di nucleoni

$$B \approx b_0 A(A-1) / 2$$

Il fatto che ciò non accada suggerisce che ogni nucleone del nucleo interagisce in realtà con un numero di fisso di nucleoni, presumibilmente solo con quelli più vicini, una proprietà che può essere compresa ipotizzando che **la forza nucleare sia a raggio d'azione finito**. Se ciò è vero dobbiamo attenderci **una distribuzione di nucleoni nel nucleo più o meno uniforme** e quindi un *volume nucleare proporzionale al numero di nucleoni*

$$V \approx v_0 A \approx \frac{4}{3} \pi r_0^3 A$$

dove abbiamo ipotizzato che il singolo nucleone abbia forma sferica. Se anche il nucleo ha forma sferica abbiamo anche

$$V \approx \frac{4}{3} \pi R^3$$

per cui otteniamo la relazione già vista (a meno del termine costante aggiuntivo che tralasciamo) tra **raggio nucleare e numero di nucleoni**

$$R \approx r_0 A^{1/3} \quad (4)$$

Dunque le indicazioni provenienti dalla diffusione di neutroni su nuclei sono in accordo con quelle provenienti dai dati sulle energie di legame nucleare.

Energia di legame nucleare: termine di superficie

In questo modo abbiamo una prima parametrizzazione della energia di legame nucleare comprendente il cosiddetto **termine di volume**

$$B = a_v A \quad (5)$$

che descrive però in modo troppo rozzo l'andamento di Fig.1.

La deviazione più rilevante si manifesta per valori piccoli di A dove l'energia media di legame è molto inferiore a quanto previsto dalla (5). Si può allora osservare che se la forza nucleare è a corto raggio, un nucleone prossimo alla superficie del nucleo interagisce con un numero di nucleoni inferiore a quello con cui interagisce un nucleone posto al suo interno contribuendo quindi in misura minore alla energia di legame nucleare. Assumendo il nucleo di forma sferica, il numero di nucleoni prossimi alla superficie è proporzionale ad R^2 ovvero, sulla base della (4), ad $A^{2/3}$ per cui dovremo sottrarre alla energia di legame nucleare un termine proporzionale ad $A^{2/3}$. L'energia di legame nucleare acquisisce allora il seguente **termine di superficie**

$$B = a_v A - a_s A^{2/3} \quad (6)$$

che descrive un poco meglio l'andamento di Fig.1.

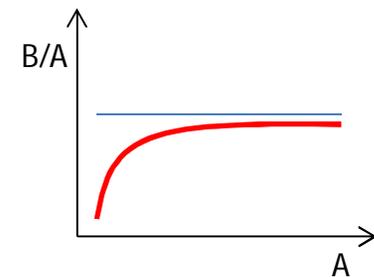
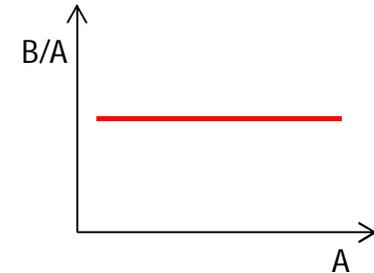
Energia di legame nucleare: termine coulombiano

Un ulteriore miglioramento può essere ottenuto tenendo presente che i protoni del nucleo si respingono elettrostaticamente dando origine ad un **potenziale repulsivo che interviene con un segno positivo nella energia di legame nucleare**. Ipotizzando una distribuzione uniforme dei protoni all'interno del nucleo, tale termine può essere valutato calcolando l'energia potenziale di una distribuzione sferica uniforme di carica

$$\delta L = \int_{\infty}^R \frac{q \delta q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q \delta q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad q = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 \quad \delta q = \rho 4\pi R^2 dR \quad \delta L = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\rho \frac{4}{3} \pi R^3\right) (\rho 4\pi R^2 dR) = \frac{4\pi \rho^2}{3\epsilon_0} R^4 dR$$

$$L = \frac{4\pi \rho^2}{15 \epsilon_0} R_0^5 \quad Q = \rho \frac{4}{3} \pi R_0^3 \quad \rho R_0^3 = \frac{3Q}{4\pi} \quad L = \frac{4\pi}{15 \epsilon_0 R_0} \rho^2 R_0^6 = \frac{4\pi}{15 \epsilon_0 R_0} \left(\frac{3Q}{4\pi}\right)^2 = \frac{3}{20\pi \epsilon_0} \frac{Q^2}{R_0} \quad Q = Ze \quad R_0 = r_0 A^{1/3}$$

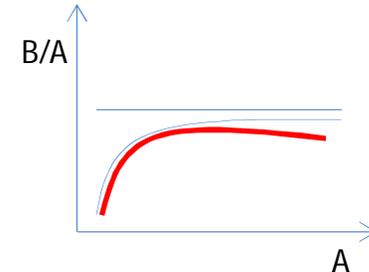
$$L = \frac{3e^2}{20\pi \epsilon_0 r_0} \frac{Z^2}{A^{1/3}} \quad \rightarrow \quad L \propto \frac{Z^2}{A^{1/3}}$$



L'espressione ottenuta suggerisce di aggiungere alla espressione della energia di legame nucleare il seguente **termine coulombiano**

$$B = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} \quad (7)$$

che descrive ancora un poco meglio l'andamento di Fig.1 (si tenga presente che nei nuclei stabili tende ad essere $Z=A/2$ per cui il termine coulombiano sottrae un contributo crescente con $A^{2/3}$).



Energia di legame nucleare: termine di asimmetria neutroni/protoni

Se la espressione (7) della energia di legame nucleare fosse completa avremmo che i nuclei più stabili risulterebbero essere quelli con $Z=0$ ovvero i nuclei di soli neutroni un fatto che contraddice i dati sperimentali i quali mostrano invece che i nuclei stabili leggeri tendono ad avere un numero di protoni uguale a quello dei neutroni mentre i nuclei stabili pesanti tendono ad avere più neutroni che protoni. Per descrivere questa proprietà dei nuclei si può introdurre un termine nella espressione della energia di legame nucleare che sottrae energia quando la grandezza $(A-2Z)$ assume valori non nulli in modo da dare maggiore stabilità ai nuclei tali per cui $Z=A/2$. Tale termine deve però diminuire con l'aumentare di A in modo da rendere possibili nuclei pesanti con un eccesso di neutroni come richiesto dai dati sperimentali. Il termine che meglio descrive i dati è direttamente proporzionale a $(A-2Z)^2$ ed inversamente proporzionale ad A e viene detto **termine di asimmetria**

$$B = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_a \frac{(A-2Z)^2}{A} \quad (8)$$

il cui effetto, per alti valori di A , è quello di 'piegare' ulteriormente verso il basso l'andamento della energia di legame nucleare.

Energia di legame nucleare: termine di accoppiamento

Infine dobbiamo tenere conto di un'altra singolare proprietà dei nuclei. I dati sperimentali mostrano che dei **254 nuclei stabili** noti 148 sono del tipo pari-pari (un numero pari sia di protoni che di neutroni), 101 sono del tipo pari-dispari (un numero pari di protoni ma dispari di neutroni o viceversa, vedi tabella) e solo 5 sono del tipo dispari-dispari (un numero dispari sia di protoni che di neutroni) mentre dei **35 nuclei a lunga vita media** invece se ne hanno 22 pari-pari, 9 pari-dispari e 4 dispari-dispari.

${}^2_1\text{H}$
${}^6_3\text{Li}$
${}^{10}_5\text{B}$
${}^{14}_7\text{N}$
${}^{180m}_{73}\text{Tl}$

Anche questa proprietà della forza nucleare va descritta introducendo nella espressione della energia di legame nucleare un termine apposito che renda più stabili i nuclei-pari-pari e meno stabili quelli dispari-dispari. I dati sperimentali sono in accordo con un **termine accoppiamento** del tipo

$$a_p \frac{\delta}{A^{3/4}} \quad \delta = \begin{cases} +1 & \text{pari-pari} \\ 0 & \text{pari-dispari} \\ -1 & \text{dispari-dispari} \end{cases} \quad (9)$$

Abbiamo allora la seguente espressione della **energia di legame nucleare** detta anche **formula semiempirica della energia di legame nucleare** o **formula di Weizsacker della energia di legame nucleare**

Energia di legame nucleare: formula di Weizsacker

$$B = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_a \frac{(A-2Z)^2}{A} + a_p \frac{\delta}{A^{3/4}} \quad (10)$$

dipendente da 5 parametri il cui valore viene determinato eseguendo un 'fit' della curva sperimentale di Fig.1. Un possibile insieme di valori è riportato nella tabella a fianco.

	MeV
a_v	15.5
a_s	16.8
a_c	0.72
a_a	23.0
a_p	34.0

Una volta nota l'espressione della energia di legame nucleare è semplice calcolare le masse nucleari e atomiche semplicemente richiamando le formule (2) e (2.1)

$$m_N({}_Z^A X) = Nm_n + Zm_p - B({}_Z^A X) / c^2$$

$$m_A({}_Z^A X) = Nm_n + Zm_p + Zm_e - B({}_Z^A X) / c^2$$

ESEMPIO: Calcolare il quoziente Z/A per un nucleo stabile pesante ($A=125$). Dato che un nucleo stabile rende massima l'energia di legame nucleare si deve calcolare il valore di Z che rende massima la funzione (10) nel punto $A=125$

$$\frac{\partial B}{\partial Z} = -2a_c \frac{Z}{A^{1/3}} + 4a_a \frac{(A-2Z)}{A} = 0 \quad \frac{Z}{A} = \frac{1}{2 + \frac{a_c}{2a_a} A^{2/3}} = \frac{1}{2 + \frac{0.72}{2 \times 23} 25} = 0.42$$

Si ottiene allora che il 42% di nucleo è costituito da protoni mentre il 58% da neutroni, un valore in accordo con i dati sperimentali.

Osservazioni conclusive

La formula della energia di legame nucleare, oltre a rappresentare un utile strumento di calcolo, suggerisce una prima interpretazione del nucleo e delle forze che lo tengono insieme. Da essa deduciamo che le forze tra nucleoni devono essere **molto intense** ma a **corto raggio** (proprietà di saturazione), producono una *distribuzione spaziale tendenzialmente uniforme di nucleoni* e conducono ad una espressione della energia di legame con termini di volume superficie in analogia con quanto accade per i liquidi, ragione per cui il modello di nucleo suggerito dalla formula della energia di legame viene detto spesso **modello nucleare a goccia**. Tale analogia non va però spinta oltre perché termini come quello di asimmetria o di accoppiamento non trovano alcuna possibile spiegazione nell'ambito della fisica classica e possono essere compresi solo nel contesto della meccanica quantistica. Se si vuole insistere sulla immagine del liquido bisogna perlomeno dire che il nucleo è un *liquido quantistico*.

Benché capace di riprodurre correttamente i dati sperimentali, la formula della energia di legame nucleare è di *natura fenomenologica* e, come tale, non riconduce i fatti osservati ai principi generali della fisica. Si comprende allora che uno degli obiettivi della fisica nucleare deve essere quello di spiegare le proprietà descritte dalla formula sulla base della meccanica quantistica.

Il nucleo come gas di Fermi

Il nucleo come gas degenerare di nucleoni

Il modello a goccia, essenzialmente fondato sulla natura a corto raggio delle interazioni forti, riesce a rendere conto in maniera ragionevole della esistenza dei termini di volume, superficie e coulombiano della formula empirica di massa ma non riesce in nessun modo a giustificare i termini di asimmetria e di accoppiamento che devono essere introdotti in modo puramente fenomenologico. Con tutta evidenza, oltre alla natura a corto raggio, nel nucleo sono in gioco anche altre proprietà che il modello a goccia trascura. Un progresso sostanziale in tal senso è compiuto prendendo in esame le proprietà collettive dei nucleoni (che sono di natura fermionica).

I fatti richiamati fino ad ora indicano che il nucleo è una struttura molto compatta dove alcune unità, ma anche decine o centinaia, di nucleoni si muovono in un volume sferico di alcuni fermi di raggio sotto l'effetto della mutua interazione nucleare. Quando il nucleo non viene perturbato, come ogni sistema fisico, tenderà ad assumere lo stato di minima energia detto stato fondamentale. Dato che i nucleoni hanno spin $s=1/2\hbar$, collettivamente si comportano come fermioni soggetti al principio di esclusione di Pauli che detta severe condizioni proprio negli stati di energia minima. Possiamo quindi aspettarci che **il comportamento del nucleo in prossimità dello stato fondamentale sia soprattutto governato dal principio di Pauli piuttosto che dalle proprietà della interazione nucleare**. Sulla base di queste considerazioni si potrebbe addirittura trascurare l'interazione nucleare considerando i **nucleoni liberi**, soggetti all'unico vincolo di rimanere all'interno di una cavità sferica pari al raggio nucleare R (dunque l'interazione nucleare compare solo in questa forma). Ragionando in termini di potenziale una simile situazione la si può ottenere immaginando un **potenziale piatto all'interno di una regione sferica di raggio R** (nucleoni liberi) con pareti ripide solo in prossimità della superficie sferica (in modo da respingere i nucleoni verso l'interno), una cosiddetta buca di potenziale. Assumendo questo punto di vista **il nucleo prossimo allo stato fondamentale** altro non sarebbe che un **gas di protoni ed un gas di neutroni non interagenti racchiusi all'interno dello stesso volume** e prossimi alla minima energia dunque in condizioni di **forte degenerazione**, in sintesi un gas quantomeccanico degenerare di nucleoni o **gas di Fermi di nucleoni** (naturalmente un gas formato da un numero molto ridotto di sistemi elementari).

Come noto, un gas di fermioni ha una singolare proprietà dettata dal principio di esclusione di Pauli. Nel caso di un gas classico nulla vieta che si possa togliere energia al gas portando gradatamente tutte le particelle nella situazione di minima energia cinetica ovvero nella situazione di quiete. Da questo deduciamo che lo stato di minima energia di un gas classico (posto che esista!) è uno stato in cui tutte gli atomi/molecole del gas sono ferme.

Se le particelle del gas non sono classiche ma quantistiche (come accade nella realtà!) ed hanno spin $s=1/2\hbar$ (come accade con i gas di elettroni o di nucleoni appunto) pur prelevando energia dal gas non sarà possibile portarle tutte nello stato di minima energia (che nel caso quantomeccanico non è la quiete a causa del principio di indeterminazione) perché in questo modo si avrebbero due o più fermioni nello stesso stato cinematico fatto vietato dal principio di esclusione di Pauli (il quale afferma che non più di due fermioni possono coesistere nello stesso stato cinematico). In questo modo ***i fermioni di un gas nello stato fondamentale non hanno tutti la stessa energia ma sono invece distribuiti su di un intervallo di energie il cui valore superiore aumenta con l'aumentare del numero di particelle.*** È assolutamente notevole che questa semplice proprietà dei gas quantistici di fermioni sia capace di spiegare alcune rilevanti proprietà dei nuclei. Vediamo come si arriva alle formule.

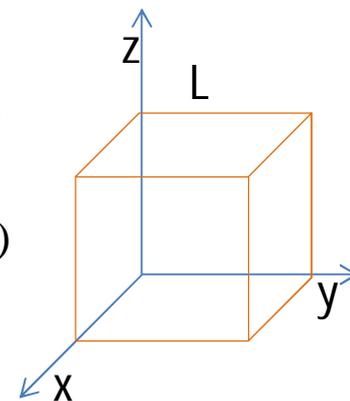
Il numero di stati quantomeccanici in un certo volume dello spazio della fasi

Cominciamo con il calcolare il numero di stati cinematici di una particella quantomeccanica racchiusa in un volume V . Come noto, classicamente uno stato cinematico può essere rappresentato da un punto in uno spazio \vec{r}, \vec{p} a sei dimensioni, lo spazio della fasi. Ciò significa che in un generico elemento di volume $d^3p d^3r$ di tale spazio saranno contenuti infiniti stati cinematici un problema che viene solitamente superato assumendo un volume elementare che vien poi fatto sparire nelle espressioni finali. Come noto, è più semplice contare il numero di stati cinematici nel caso quantistico perché in questo caso il volume elementare trova un suo fondamento fisico nel principio di indeterminazione oppure nelle condizioni al contorno imposte alla funzione d'onda.

Seguiamo questa seconda strada immaginando una particella quantomeccanica racchiusa in una cavità cubica di lato L (posizionata nel modo indicato in figura). Scegliamo la funzione d'onda che descrive le proprietà fisiche di tale particella nella forma di ***un'onda piana*** di vettore d'onda e pulsazione definite ovvero di quantità di moto ed energia definite

$$\psi(\vec{r}, t) = A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = A e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)} = \left(A e^{\frac{i}{\hbar} p_x x} e^{\frac{i}{\hbar} p_y y} e^{\frac{i}{\hbar} p_z z} \right) e^{-\frac{i}{\hbar} Et} \quad (1)$$

Dato che la particella è contenuta all'interno della cavità il modulo quadro della funzione d'onda e dunque alla funzione d'onda stessa deve annullarsi sulla superficie cubica.



Consideriamo allora la parete parallela al piano YZ in $x=0$. La funzione d'onda potrà annullarsi solo se la parte spaziale, piuttosto che essere un esponenziale complesso, dipende solo dalla parte sinusoidale

$$e^{\frac{i}{\hbar}p_x x} \rightarrow \sin\left(\frac{1}{\hbar}p_x x\right) \quad (2)$$

Tale parte sinusoidale deve poi annullarsi sulla parete parallela al piano XY in $x=L$ per cui si deve avere

$$\frac{1}{\hbar}p_x L = n_x \pi \quad n_x = 1, 2, \dots, N$$

da cui otteniamo le seguenti **condizioni di quantizzazione della componente cartesiana della quantità di moto**

$$p_x = n_x \frac{\pi \hbar}{L} \quad (3)$$

Sostituendo le (3) e (2) nella (1) e tenendo conto delle analoghe relazioni lungo le direzioni Y e Z otteniamo la funzione d'onda seguente

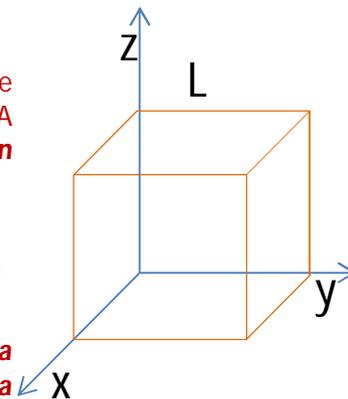
$$\psi(\vec{r}, t) = A \sin\left(n_x \frac{\pi \hbar}{L}\right) \sin\left(n_y \frac{\pi \hbar}{L}\right) \sin\left(n_z \frac{\pi \hbar}{L}\right) e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$$

Richiedendo infine che l'integrale del modulo quadrato della funzione d'onda sul volume cubico abbia valore unitario (condizione di normalizzazione) si ottiene facilmente il valore di A e quindi l'espressione finale della **funzione d'onda di una particella quantomeccanica chiusa in un volume cubico di lato L**

La funzione d'onda di una particella quantistica chiusa nel volume cubico di lato L

$$\psi(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{8}{L^3}} \sin\left(n_x \frac{\pi \hbar}{L}\right) \sin\left(n_y \frac{\pi \hbar}{L}\right) \sin\left(n_z \frac{\pi \hbar}{L}\right) e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \quad (4)$$

dove n_x , n_y ed n_z sono numeri **naturali non nulli**. Si noterà che **in corrispondenza di ciascuna terna ordinata di numeri naturali non nulli (ovvero, per le 3, in corrispondenza di ciascuna terna ordinata di componenti cartesiane della quantità di moto non nulle) si ha una possibile funzione d'onda e dunque un possibile stato quantomeccanico della particella.**



Dunque, nel caso di una particella chiusa in un volume il conteggio degli stati quantomeccanici può essere fatto attraverso il conteggio delle terne ordinate di numeri naturali non nulli. Inoltre, in virtù della (3) e delle analoghe relazioni lungo y e z, il conteggio di tali terne di numeri naturali coincide con il conteggio dei possibili valori non nulli positivi della quantità di moto.

Siamo ora nelle condizioni di calcolare il numero di stati quantistici che hanno un valore del modulo della quantità di moto compreso tra zero ed un certo valore p . Se introduciamo una terna cartesiana di assi p_x , p_y e p_z , il numero di questi stati eguaglia il numero di cubi di lato $\pi\hbar/L$ (pari all'incremento nel valore dell'impulso) contenuti nell'ottante positivo di volume sferico di raggio p

$$n_s = \frac{1}{8} \frac{\frac{4}{3} \pi p^3}{\left(\frac{\pi\hbar}{L}\right)^3} = \frac{L^3}{6\pi^2 \hbar^3} p^3 = \frac{V}{6\pi^2 \hbar^3} p^3 \quad (5)$$

Con un po' di attenzione si capisce che tale conteggio sovrastima il numero di stati quantistici. Ragionando sempre nello spazio p_x , p_y e p_z , gli stati giacenti sui piani coordinati XZ, ZY e YX annullano una delle componenti p_x , p_y e p_z della quantità di moto e quindi, per la (3), anche uno dei numeri n_x , n_y e n_z e quindi, per la (4), la funzione d'onda. Insomma tali stati sono tutti coincidenti poiché hanno un valore nullo della rispettiva funzione d'onda e vanno sottratti dalla (5). Quanti sono questi stati? Sono quelli che si trovano nei quarti di cerchio giacenti appunto sui piani coordinati XZ, ZY e YZ e si trovano calcolando il numero di quadrati di lato $\pi\hbar/L$ contenuti in tali quarti di cerchio

$$n_0 = 3 \frac{\frac{1}{4} \pi P^2}{\left(\frac{\pi\hbar}{L}\right)^2} = \frac{3}{4} \frac{L^2}{\pi \hbar^2} P^2 = \frac{S}{8\pi \hbar^2} P^2 \quad (6)$$

dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo introdotto la superficie della scatola cubica $S=6L^2$.

Dunque, alla fine troviamo che il numero di stati quantistici tali che $0 < |p| < P$ vale

$$n_s = \frac{V}{6\pi^2 \hbar^3} P^3 - \frac{S}{8\pi \hbar^2} P^2 \quad (7)$$

Dato che, secondo il principio di esclusione di Pauli, ciascun stato quantistico può alloggiare al massimo due fermioni concludiamo che **il numero di fermioni che possono essere contenuti in un volume V avente una superficie laterale S con valore massimo dell'impulso P_F** è dato dalla espressione

numero di nucleoni nel volume nucleare V al di sotto dell'impulso di Fermi

$$n_F = \frac{V P_F^3}{3\pi^2 \hbar^3} - \frac{S P_F^2}{4\pi \hbar^2} n_F = \frac{V P_F^3}{3\pi^2 \hbar^3} \left(1 - \frac{3\pi \hbar S}{4 V P_F}\right) \quad (8)$$

dove P_F è detto **impulso di Fermi** e l'espressione è stata scritta fattorizzando il termine di volume che è facile mostrare essere assai più grande di quello di superficie (si noti la presenza di un termine di superficie che porterà ad un termine analogo nella espressione della energia di legame nucleare). Naturalmente nel nucleo avremo due relazioni del tipo (8), una per neutroni ed una per i protoni.

stima dell'impulso di Fermi nei nuclei

Trascurando il termine di superficie la (8) fornisce l'espressione **dell'impulso di fermi in funzione del numero di fermioni**

$$P_F = \hbar \left(\frac{3\pi^2 n_F}{V} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (8.1)$$

Dato che il numero di protoni, neutroni ed il volume nucleare sono noti e che nei **nuclei stabili non troppo pesanti** si ha

$$V \approx \frac{4}{3} \pi r_0^3 A \quad n_p \approx n_n \approx \frac{A}{2} \quad (9)$$

sostituendo inella (8.1) possiamo ottenere il valore dell'impulso di Fermi dei protoni/neutroni (trascurando il termine di superficie)

$$P_F = \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{\hbar}{r_0} \approx 1.52 \frac{\hbar}{1.2 \times \frac{1}{200} \frac{\hbar c}{MeV}} \approx 254 \frac{MeV}{c} \quad (10)$$

dunque, anche in prossimità dello stato fondamentale, esiste una frazione di nucleoni del nucleo con un impulso piuttosto rilevante.

stima della energia cinetica di Fermi nei nuclei

Analogamente, otteniamo che i protoni ed i neutroni nucleari hanno una rilevante **energia cinetica di Fermi**

$$E_F = \frac{P_F^2}{2M_{n,p}} \approx 34 \text{ MeV} \quad (12)$$

stima della profondità della buca di potenziale nei nuclei

Dato che l'energia che dobbiamo fornire mediamente ad ogni nucleone per separarlo dal nucleo vale circa 8 MeV (vedi la energia media di legame per nucleone) deduciamo che la **buca del potenziale nucleare** deve avere una profondità di circa

$$V_0 \approx E_F + B/A \approx (34+8)\text{MeV} \approx 41\text{MeV} \quad (13)$$

e risulta indipendente dal numero di nucleoni A ovvero *tende ad assumere lo stesso valore per tutti i nuclei*. Inoltre l'energia cinetica dei nucleoni non è molto inferiore alla profondità della buca (è inferiore di 8 MeV appunto) per cui il nucleo è un *insieme di nucleoni debolmente legati*.

la buca di potenziale nucleare nei nuclei pesanti

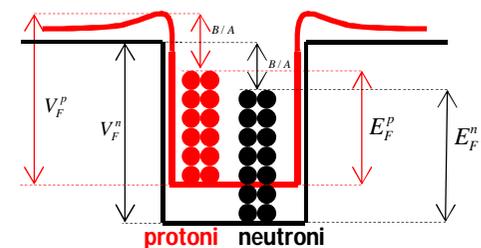
Nel caso dei nuclei stabili pesanti dobbiamo tenere conto che il numero di neutroni eccede quello dei protoni per cui dalla (4) e (6) otteniamo che *l'impulso e la energia di Fermi dei neutroni supera quello dei protoni*

$$P_F^n > P_F^p \quad E_F^n > E_F^p$$

così pure la profondità della buca di potenziale dei neutroni supera quella dei protoni (vedi (7))

$$V_0^n > V_0^p$$

Se ora teniamo conto che i protoni a causa della carica elettrica che possiedono sono soggetti ad un potenziale repulsivo coulombiano sostanzialmente apprezzabile solo quando quello nucleare si azzerava abbiamo che i potenziali complessivi di neutroni e protoni hanno l'andamento approssimato mostrato nella figura.



**energia cinetica
media dei nucleoni**

Valutiamo infine l'energia cinetica media dei protoni/neutroni nel nucleo. Ciò può essere fatto calcolando la seguente media pesata

$$\langle T \rangle = \int_0^{P_F} \frac{p^2}{2m} dn / \int_0^{P_F} dn$$

dove dn è il numero di neutroni/protoni con impulso compreso tra p e $p+dp$. Il differenziale della (8) fornisce tale numero di neutroni/protoni

$$dn = \frac{V}{\pi^2 \hbar^3} p^2 dp - \frac{S}{2\pi \hbar^2} p dp \quad (14)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \langle T \rangle &= \frac{\int_0^{P_F} \frac{p^2}{2m} \left(\frac{V}{\pi^2 \hbar^3} p^2 dp - \frac{S}{2\pi \hbar^2} p dp \right)}{\left(\frac{V}{3\pi^2 \hbar^3} P_F^3 - \frac{S}{4\pi \hbar^2} P_F^2 \right)} = \frac{\left(\frac{V P_F^5}{10m \pi^2 \hbar^3} - \frac{S P_F^4}{16m \pi \hbar^2} \right)}{\left(\frac{V}{3\pi^2 \hbar^3} P_F^3 - \frac{S}{4\pi \hbar^2} P_F^2 \right)} \\ &= \frac{\frac{V P_F^5}{10m \pi^2 \hbar^3} \left(1 - \frac{10m \pi^2 \hbar^3}{V P_F^5} \frac{S P_F^4}{16m \pi \hbar^2} \right)}{\frac{V P_F^3}{3\pi^2 \hbar^3} \left(1 - \frac{3\pi^2 \hbar^3}{V P_F^3} \frac{S}{4\pi \hbar^2} P_F^2 \right)} = \frac{3}{10m} P_F^2 \frac{\left(1 - \frac{5\pi \hbar}{8} \frac{S}{V P_F} \right)}{\left(1 - \frac{3\pi \hbar}{4} \frac{S}{V P_F} \right)} \\ &\approx \frac{3 P_F^2}{10m} \left(1 - \frac{5\pi \hbar}{8} \frac{S}{V P_F} + \frac{3\pi \hbar}{4} \frac{S}{V P_F} \right) \end{aligned}$$

per cui abbiamo **la seguente espressione approssimata della energia cinetica media dei neutroni/protoni nucleari**

$$\langle T \rangle \approx \frac{3}{10m} P_F^2 \left(1 + \frac{\pi \hbar S}{8 V P_F} \right) \quad (15)$$

Dalla (15), tenendo conto solo del termine dominante, si ha il seguente **valore della energia cinetica media dei neutroni e protoni nucleari** (si tenga conto anche della (12))

$$\langle T \rangle \approx \frac{3}{10m} P_F^2 \approx \frac{3}{5} E_F \approx \frac{3 \times 34}{5} \approx 21 \text{ MeV} \quad (10)$$

Ritornando alla (15) anticipiamo che è utile disporre di una espressione della energia cinetica media dove compaiano solo i parametri nucleari (N, Z, V, S) e non il valore dell'impulso di Fermi. In sostanza dobbiamo eliminare la variabile P_F nella (15) utilizzando la (8). Richiamiamo allora sia la (15)

$$\langle T \rangle \approx \frac{3}{10m} P_F^2 \left(1 + \frac{\pi \hbar S}{8 V P_F}\right) = \frac{3}{10m} P_F^2 + \frac{3}{80m} \frac{\pi \hbar S}{V} P_F \quad (11)$$

che la (8)

$$n_F = \frac{V P_F^3}{3\pi^2 \hbar^3} \left(1 - \frac{3\pi \hbar S}{4 V P_F}\right) \approx \frac{V P_F^3}{3\pi^2 \hbar^3}$$

Dalla quale ricaviamo $P_F \approx \left(\frac{3\pi^2 \hbar^3 n_F}{V}\right)^{1/3}$

che sostituita nella (11) fornisce

$$\langle T \rangle \approx \frac{3}{10m} \left(\frac{3\pi^2 \hbar^3 n_F}{V}\right)^{2/3} + \frac{3}{80m} \frac{\pi \hbar S}{V} \left(\frac{3\pi^2 \hbar^3 n_F}{V}\right)^{1/3}$$

da cui infine otteniamo l'espressione cercata della energia cinetica media dei fermioni in funzione dei parametri nucleari

$$\langle T \rangle \approx \frac{9\hbar^2}{10m} \left(\frac{\pi^4 n_F^2}{3V^2}\right)^{1/3} + \frac{9\hbar^2}{80m} \left(\frac{\pi^5 n_F}{9V^4}\right)^{1/3} S \quad (15)$$

la costruzione della formula della energia di legame nucleare

Dalla discussione precedente possiamo trarre gli strumenti per scrivere l'espressione della energia di legame nucleare nell'ambito del modello a gas di Fermi.

Un **neutrone porta un contributo medio alla energia di legame nucleare** pari alla differenza tra la profondità della buca di potenziale e la sua energia cinetica media

$$b_n = V_0 - \langle T_n \rangle \quad (16)$$

Per un protone si deve ragionare allo stesso modo aggiungendovi però la repulsione coulombiana che rende la buca del potenziale totale meno profonda. La repulsione coulombiana ha la seguente espressione

$$\langle V_{coul} \rangle = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k, j > k}}^Z \sum_{k=1}^Z \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{jk}}$$

e dipende dalla disposizione spaziale dei protoni. Ipotizzando una distribuzione spazialmente uniforme (problema della sfera uniformemente carica) otteniamo

$$\langle V_{coul} \rangle = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z^2}{R} = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \hbar c \frac{Z^2}{R} = \frac{3}{5} \alpha \hbar c \frac{Z^2}{R}$$

dove $\alpha \sim 1/137$ è la costante adimensionale di struttura fina ed R è il raggio della distribuzione sferica di carica ovvero il raggio nucleare. Possiamo ora scrivere il **contributo medio del protone alla energia di legame nucleare**

$$b_p = V_0 - \langle T_p \rangle - \frac{3\alpha \hbar c}{5} \frac{Z^2}{R} \quad (17)$$

Tenendo conto delle (16) e (17) possiamo comporre l'espressione della energia di legame nucleare

$$\begin{aligned}
 B &= N b_n + Z b_p \\
 &= N[V_0 - \langle T_n \rangle] + Z[V_0 - \langle T_p \rangle - \frac{3}{5} \alpha \hbar c \frac{Z^2}{R}] \\
 &= (N + Z)V_0 - N \langle T_n \rangle - Z \langle T_p \rangle - \frac{3}{5} \alpha \hbar c \frac{Z^2}{R}
 \end{aligned}$$

sostituendovi anche la (15) otteniamo

$$\begin{aligned}
 B &= (N + Z)V_0 - N \langle T_n \rangle - Z \langle T_p \rangle - \frac{3}{5} \alpha \hbar c \frac{Z^2}{R} \\
 &\approx (N + Z)V_0 - N \left[\frac{9\hbar^2}{10m} \left(\frac{\pi^4 N^2}{3V^2} \right)^{1/3} + \frac{9\hbar^2}{80m} \left(\frac{\pi^5 N}{9V^4} \right)^{1/3} S \right] - Z \left[\frac{9\hbar^2}{10m} \left(\frac{\pi^4 Z^2}{3V^2} \right)^{1/3} + \frac{9\hbar^2}{80m} \left(\frac{\pi^5 Z}{9V^4} \right)^{1/3} S \right] - \frac{3}{5} \alpha \hbar c \frac{Z^2}{R} \\
 &\approx (N + Z)V_0 - \frac{9\hbar^2}{80m} \left(\frac{\pi^5}{9} \right)^{1/3} \frac{S(N^{4/3} + Z^{4/3})}{V^{4/3}} - \frac{9\hbar^2}{10m} \left(\frac{\pi^4}{3} \right)^{1/3} \frac{(N^{5/3} + Z^{5/3})}{V^{2/3}} - \frac{3}{5} \alpha \hbar c \frac{Z^2}{R}
 \end{aligned}$$

dove abbiamo introdotto una unica massa per protone e neutrone. Ora dobbiamo ricordare che nel nucleo V , R , N e Z sono variabili correlate

$$(N + Z) = A \quad V = \frac{4}{3} \pi r_0^3 A \quad S = 4\pi r_0^2 A^{2/3} \quad R = r_0 A^{1/3}$$

per cui sostituendo

$$B \approx AV_0 - \frac{9\hbar^2}{80m} \left(\frac{\pi^5}{9} \right)^{1/3} \frac{4\pi r_0^2 A^{2/3} (N^{4/3} + Z^{4/3})}{\left(\frac{4}{3} \pi r_0^3 A \right)^{4/3}} - \frac{9\hbar^2}{10m} \left(\frac{\pi^4}{3} \right)^{1/3} \frac{(N^{5/3} + Z^{5/3})}{\left(\frac{4}{3} \pi r_0^3 A \right)^{2/3}} - \frac{3}{5} \alpha \hbar c \frac{Z(Z-1)}{r_0 A^{1/3}}$$

$$\begin{aligned} &\approx AV_0 - \frac{9\hbar^2}{16m} \left(\frac{\pi^5}{9}\right)^{1/3} \frac{3^{4/3}}{4^{1/3} \pi^{1/3} r_0^2} \frac{(N^{4/3} + Z^{4/3})}{A^{2/3}} - \frac{9\hbar^2}{10m} \left(\frac{\pi^4}{3}\right)^{1/3} \frac{3^{2/3}}{4^{2/3} \pi^{2/3} r_0^2} \frac{(N^{5/3} + Z^{5/3})}{A^{2/3}} - \frac{3\alpha \hbar c}{5r_0} \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} \\ &\approx AV_0 - \frac{9\hbar^2}{80mr_0^2} \left(\frac{9\pi^4}{4}\right)^{1/3} \frac{(N^{4/3} + Z^{4/3})}{A^{2/3}} - \frac{9\hbar^2}{10mr_0^2} \left(\frac{3\pi^2}{16}\right)^{1/3} \frac{(N^{5/3} + Z^{5/3})}{A^{2/3}} - \frac{3\alpha \hbar c}{5r_0} \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} \end{aligned}$$

da cui infine

$$B \approx AV_0 - \frac{9\hbar^2}{80mr_0^2} \left(\frac{3\pi^2}{2}\right)^{2/3} \frac{(N^{4/3} + Z^{4/3})}{A^{2/3}} - \frac{3\hbar^2}{10mr_0^2} \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{2/3} \frac{(N^{5/3} + Z^{5/3})}{A^{2/3}} - \frac{3\alpha \hbar c}{5r_0} \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} \quad (18)$$

Per avere la (12) in una forma confrontabile con l'espressione empirica della energia di legame nucleare nell'ultimo termine **conviene passare alle variabili $A=(N+Z)$ e $\delta=(N-Z)$**

$$\delta = N - Z \quad A = N + Z \quad N = \frac{A + \delta}{2} \quad Z = \frac{A - \delta}{2} \quad (18.1)$$

tenendo poi presente che la variabile δ , nel caso dei nuclei stabili, tende ad essere piccola. Usando lo sviluppo in serie seguente, trattenendo anche i termini del secondo ordine, abbiamo

$$\begin{aligned} &\text{da cui} \quad (1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x + \frac{1}{2} \alpha(\alpha-1)x^2 \\ &\frac{(N^{5/3} + Z^{5/3})}{A^{2/3}} = \left[\frac{(A+\delta)^{5/3} + (A-\delta)^{5/3}}{2^{5/3} A^{2/3}} \right] = \frac{A}{2^{5/3}} [(1+\delta/A)^{5/3} + (1-\delta/A)^{5/3}] \\ &\approx \frac{A}{2^{5/3}} \left[1 + \frac{5}{3}(\delta/A) + \frac{5}{9}(\delta/A)^2 + 1 - \frac{5}{3}(\delta/A) + \frac{5}{9}(\delta/A)^2 \right] \approx \frac{A}{2^{2/3}} \left[1 + \frac{5}{9}(\delta/A)^2 \right] \approx \frac{A}{2^{2/3}} \left[1 + \frac{5}{9} \left(\frac{N-Z}{A}\right)^2 \right] \\ &\frac{(N^{4/3} + Z^{4/3})}{A^{2/3}} = \left[\frac{(A+\delta)^{4/3} + (A-\delta)^{4/3}}{2^{4/3} A^{2/3}} \right] = \frac{A^{2/3}}{2^{4/3}} [(1+\delta/A)^{4/3} + (1-\delta/A)^{4/3}] \\ &\approx \frac{A^{2/3}}{2^{4/3}} \left[1 + \frac{4}{3}(\delta/A) + \frac{2}{9}(\delta/A)^2 + 1 - \frac{4}{3}(\delta/A) + \frac{2}{9}(\delta/A)^2 \right] \approx \frac{A^{2/3}}{2^{1/3}} \left[1 + \frac{2}{9} \left(\frac{N-Z}{A}\right)^2 \right] \end{aligned}$$

Nelle ultime due relazioni si può eliminare N ponendo N=A-Z, otteniamo allora

$$\frac{(N^{5/3} + Z^{5/3})}{A^{2/3}} \approx \frac{A}{2^{2/3}} \left[1 + \frac{5}{9} \left(\frac{A-2Z}{A} \right)^2 \right] \quad \frac{(N^{4/3} + Z^{4/3})}{A^{2/3}} \approx \frac{A^{2/3}}{2^{1/3}} \left[1 + \frac{2}{9} \left(\frac{A-2Z}{A} \right)^2 \right] \quad (19)$$

che sostituite nella (18) forniscono

$$\begin{aligned} B &\approx AV_0 - \frac{9\hbar^2}{80mr_0^2} \left(\frac{3\pi^2}{2} \right)^{2/3} \frac{A^{2/3}}{2^{1/3}} \left[1 + \frac{2}{9} \left(\frac{A-2Z}{A} \right)^2 \right] - \frac{3\hbar^2}{10mr_0^2} \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \frac{A}{2^{2/3}} \left[1 + \frac{5}{9} \left(\frac{A-2Z}{A} \right)^2 \right] - \frac{3\alpha \hbar c}{5r_0} \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} \\ &\approx AV_0 - \frac{9\hbar^2}{80mr_0^2} \left(\frac{3\pi^2}{2\sqrt{2}} \right)^{2/3} A^{2/3} - \frac{\hbar^2}{8mr_0^2} \left(\frac{3\pi^2}{2\sqrt{2}} \right)^{2/3} \frac{(A-2Z)^2}{A^{4/3}} - \frac{3\hbar^2}{10mr_0^2} \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{2/3} A - \frac{\hbar^2}{6mr_0^2} \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{2/3} \frac{(A-2Z)^2}{A} - \frac{3\alpha \hbar c}{5r_0} \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} \end{aligned}$$

la energia di legame nucleare da cui otteniamo finalmente l'espressione della **energia di legame nucleare secondo il modello a gas di Fermi**

$$B \approx \left[V_0 - \frac{3\hbar^2}{10mr_0^2} \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{2/3} \right] A - \left[\frac{9\hbar^2}{80mr_0^2} \left(\frac{3\pi^2}{2\sqrt{2}} \right)^{2/3} \right] A^{2/3} - \left[\frac{3\alpha \hbar c}{5r_0} \right] \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - \left[\frac{\hbar^2}{6mr_0^2} \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{2/3} \right] \frac{(A-2Z)^2}{A} - \left[\frac{\hbar^2}{8mr_0^2} \left(\frac{3\pi^2}{2\sqrt{2}} \right)^{2/3} \right] \frac{(A-2Z)^2}{A^{4/3}} \quad (20)$$

Osserviamo immediatamente che vengono previsti i termini di volume, superficie, coulombiano e di asimmetria con le corrette dipendenze da A e Z mentre il termine di accoppiamento non è consistente (si confronti con la espressione empirica che richiamiamo per comodità)

$$B = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_a \frac{(A-2Z)^2}{A} + \delta \frac{a_p}{A^{3/4}}$$

un meccanismo fisico per i termini della energia di legame nucleare

merita particolare rilievo il fatto che venga fornito **un meccanismo fisico** capace di spiegare tali termini. Ripensando al procedimento seguito possiamo verificare che i termini di volume e superficie sono essenzialmente dovuti al conteggio degli stati quantomeccanici di una particella racchiusa nel volume nucleare da cui si deriva poi l'espressione del numero di fermioni nucleari in funzione dell'impulso di Fermi (vedi la (8)).

Riflettendo invece sul termine di asimmetria verificiamo che esso è dovuto a due effetti contrari. Da un lato la repulsione coulombiana fa sì che siano via via più stabili i nuclei con un numero crescente di neutroni e decrescente di protoni. Dall'altro, il principio di Pauli rende più stabili i nuclei con eguale numero di protoni e neutroni (è la situazione che permette di avere gli impulsi di Fermi più bassi!). I nuclei stabili osservati sono il risultato del compromesso (ben definito massimo della energia di legame nella variabile Z) tra questi due effetti che porterà ad una ben definita preponderanza dei neutroni sui protoni per ogni fissato A .

**il confronto con i
valori sperimentali**

Si può mettere alla prova in modo ancora più severo il modello calcolando esplicitamente i valori dei diversi termini e confrontandoli con quelli empirici

$$a_v = V_0 - \frac{3\hbar^2}{10mr_0^2} \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{2/3} = V_0(eV) - \frac{3}{10mc^2(eV)} \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{2/3} \frac{\hbar^2 c^2}{r_0^2 \left(\frac{1}{2 \times 10^{-7}} \frac{\hbar c}{eV}\right)^2}$$

$$\approx (41 \times 10^6 - \frac{3}{10 \times 940 \times 10^6} \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{2/3} \frac{1}{(1.25 \times 10^{-15})^2 \left(\frac{1}{2 \times 10^{-7}}\right)^2}) eV \approx 22 \text{ MeV}$$

$$a_s = \frac{9\hbar^2}{80mr_0^2} \left(\frac{3\pi^2}{2\sqrt{2}}\right)^{2/3} = \frac{9\hbar^2 c^2}{16mc^2} \left(\frac{3\pi^2}{2\sqrt{2}}\right)^{2/3} \frac{1}{r_0^2 \left(\frac{1}{2 \times 10^{-7}} \frac{\hbar c}{eV}\right)^2}$$

$$\approx \frac{9}{80 \times 940 \times 10^6} \left(\frac{3\pi^2}{2\sqrt{2}}\right)^{2/3} \left(\frac{2 \times 10^{-7}}{1.25 \times 10^{-15}}\right)^2 eV \approx 14.6 \text{ MeV}$$

$$a_c = \frac{3\alpha \hbar c}{5r_0} = \frac{3\alpha \hbar c}{5r_0 \left(\frac{1}{2 \times 10^{-7}} \frac{\hbar c}{eV}\right)}$$

$$\approx \frac{3/137}{5 \times 1.25 \times 10^{-15} \left(\frac{1}{2 \times 10^{-7}}\right)} eV \approx 0.70 \text{ MeV}$$

$$a_a \approx \frac{\hbar^2}{6m r_0^2} \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{2/3} = \frac{1}{6mc^2(eV)} \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{2/3} \frac{\hbar^2 c^2}{r_0^2 \left(\frac{1}{2 \times 10^{-7}} \frac{\hbar c}{eV}\right)^2}$$

$$\approx \frac{1}{6 \times 940 \times 10^6} \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{2/3} \frac{(2 \times 10^{-7})^2}{(1.25 \times 10^{-15})^2} eV \approx 10.5 \text{ MeV}$$

Il confronto con i valori empirici è mostrato nella tabella ed indica che il modello a gas di Fermi coglie alcune proprietà fisiche rilevanti del nucleo. L'accordo relativamente buono suggerisce che alcune proprietà dei nuclei in prossimità dello stato fondamentale sono legate alle proprietà collettive dei nucleoni in condizioni di forte degenerazione piuttosto che alle specifiche proprietà della forza nucleare la quale, in questo modello, interviene unicamente come vincolo capace di contenere i nucleoni all'interno del volume nucleare. Implicitamente ciò suggerisce anche che un migliore accordo, così come la spiegazione del termine di accoppiamento, possano essere raggiunti solo precisando la forma del potenziale nucleare (si ricordi infatti che, nel modello a gas di Fermi, i nucleoni sono pensati come liberi e dunque, dal punto di vista dinamico, soggetti ad un potenziale piatto).

	valori empirici (MeV)	gas di Fermi
a_v	15.5	22
a_s	16.8	14.6
a_c	0.72	0.70
a_a	23.0	10.5
a_p	34.0	

Meccanica quantistica

Come più volte sottolineato, la descrizione dei fenomeni che coinvolgono le particelle microscopiche in regime non relativistico richiede l'uso della ordinaria meccanica quantistica (nel senso che non è necessario servirsi della più generale teoria quantistica dei campi).

- Come noto, nella meccanica quantistica si assume che lo stato della particella microscopica sia *compiutamente descritto* dalla **funzione d'onda** $\Psi(\vec{r}, t)$ (nel senso che la funzione d'onda specifica tutto ciò che può essere detto sulla particella stessa) la cui *evoluzione temporale* è governata dalla **equazione di Schroedinger**

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \hat{H} \psi(\vec{r}, t)$$

dove \hat{H} è detto **operatore hamiltoniano del sistema** che, in molti problemi, può essere scelto nella semplice forma

$$\hat{H} = \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r})$$

- Dato che la Equazione di Schroedinger è lineare la funzione d'onda soddisfa il **principio di sovrapposizione** per cui se $\Psi_1(\vec{r}, t)$ e $\Psi_2(\vec{r}, t)$ descrivono due possibili stati del corpuscolo ogni loro combinazione lineare descrive un nuovo possibile stato del corpuscolo (una delle proprietà più straordinarie della meccanica quantistica verificata ad esempio dal fenomeno della interferenza corpuscolare).
- Il significato fisico della funzione d'onda è precisato dalla assunzione che a seguito di una misura, la **probabilità di localizzare il corpuscolo ad un certo tempo t all'interno di un volume elementare centrato in \vec{r}** , sia data dalla seguente espressione

$$|\psi(\vec{r}, t)|^2 dV$$

A sua volta, tale assunzione implica la **condizione di normalizzazione** ovvero che l'integrale, esteso a tutto il volume accessibile al corpuscolo, del modulo quadrato della funzione d'onda abbia valore unitario

$$\iiint_V |\psi(\vec{r}, t)|^2 dV = 1$$

-
- Le relazioni di De Broglie da un lato (ovvero le relazioni tra le grandezze ondulatorie \vec{k} ed ω e quelle corpuscolari \vec{p} ed E) e l'interpretazione probabilistica della funzione d'onda dall'altro conducono alla più caratteristica delle assunzioni della meccanica quantica: **ad ogni grandezza fisica misurabile o (detta osservabile) risulta associato un operatore lineare complesso ma hermitiano \hat{O}** il cui **valore medio su di un certo stato quantomeccanico $\Psi(\vec{r}, t)$** del corpuscolo (detto valore di aspettazione) è dato dal seguente integrale

$$\langle o \rangle = \int_V \psi^*(\vec{r}, t) \hat{O} \psi(\vec{r}, t) dV$$

Quello che abbiamo delineato è lo schema basilare della meccanica quantistica, sostanzialmente privo dei costrutti matematici che ne semplificano e razionalizzano l'utilizzo ma sufficiente per risolvere i problemi ed eseguire i calcoli.

NOTA: Vale la pena richiamare alcune ben note difficoltà che tale schema interpretativo pone. Dato che, noto lo stato quantomeccanico $\Psi(\vec{r}, t)$ del corpuscolo, la teoria è in grado di predire solo il valore medio che le grandezze fisiche ad esso associate assumeranno a seguito della operazione di misura, ciò significa che le grandezze fisiche di un corpuscolo in un certo stato quantomeccanico $\Psi(\vec{r}, t)$ non hanno, in generale, un valore definito (lo sviluppo della meccanica quantistica chiarisce che, a differenza della fisica classica, le grandezze fisiche quantomeccaniche oltre ad essere spesso indefinite, sono soggette anche ad altre limitazioni. Ad esempio possono risultare quantizzate, oppure definite lungo una direzione dello spazio ed indefinite lungo le direzioni ad essa perpendicolari, oppure entrambe le cose). Dunque, la ripetizione della una misura di una grandezza fisica di un corpuscolo posto nel medesimo stato può dare luogo ad esiti diversi (la misurazione introduce un passo intrinsecamente probabilistico, ovvero non deterministico, nella evoluzione temporale del corpuscolo). Però, una volta eseguita la misura di una grandezza fisica, il sistema si trova ad avere acquisito un valore definito di tale grandezza per cui si deve concludere che l'operazione di misura determina anche un inevitabile modifica (di natura statistica) dello stato del sistema (tale modifica dello stato del sistema causata dalla operazione di misura viene riferita spesso come collasso della funzione d'onda).

□ Energia e Quantità di Moto

Un modo diretto per costruire le **espressioni operatoriali della energia e della quantità di moto** è la seguente. Come noto dalla fisica classica, un'onda piana possiede un definito valore del vettore d'onda e della pulsazione

$$\psi(\vec{r}, t) = A e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \quad \vec{k} = (2\pi / \lambda) \vec{n} \quad \omega = 2\pi / T$$

dove λ e T sono la **lunghezza d'onda** ed il **periodo** dell'onda. Sulla base delle relazioni di De Broglie dobbiamo allora concludere che tale onda possiede anche un **definito valore della quantità di moto e della energia**

$$\psi(\vec{r}, t) = A e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)} \quad E = \hbar\omega \quad \vec{p} = \hbar\vec{k}$$

Applichiamo a tali funzioni i seguenti operatori

$$\hat{H} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad \hat{P} = -i\hbar \vec{\nabla}$$

si ha

$$\begin{aligned} \hat{H}\psi(\vec{r}, t) &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} A e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} = i\hbar (-i\omega) A e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} = \hbar\omega \psi(\vec{r}, t) = E\psi(\vec{r}, t) \\ \hat{P}\psi(\vec{r}, t) &= -i\hbar \vec{\nabla} A e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} = -i\hbar (i\vec{k}) A e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} = \hbar\vec{k} \psi(\vec{r}, t) = \vec{p} \psi(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

dalle quali si deduce che i suddetti operatori estraggono dalla funzione d'onda i valori della energia e della quantità di moto dello stato quantomeccanico (nel caso specifico un solo valore poiché lo stato possedeva valori definiti della energia e della quantità di moto). Tali operatori sono detti **operatori hamiltoniano e della quantità di moto** dato che il loro valore di aspettazione fornisce in effetti il valore della energia e della quantità di moto dello stato

$$\begin{aligned} \langle e \rangle &= \int_V \psi^*(\vec{r}, t) \hat{H}\psi(\vec{r}, t) dV = \int_V \psi^*(\vec{r}, t) E\psi(\vec{r}, t) dV = E \int_V \psi^*(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t) dV = E \\ \langle \vec{p} \rangle &= \int_V \psi^*(\vec{r}, t) \hat{P}\psi(\vec{r}, t) dV = \int_V \psi^*(\vec{r}, t) \vec{p}\psi(\vec{r}, t) dV = \vec{p} \int_V \psi^*(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t) dV = \vec{p} \end{aligned}$$

□ Momento angolare orbitale

A partire dalle espressioni operatoriali della energia e della quantità di moto è possibile costruire le espressioni operatoriali di altre grandezze fisiche quantomeccaniche. Ad esempio, l'operatore momento angolare può essere costruito sulla falsariga della sua espressione meccanica

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \rightarrow \hat{L} = \vec{r} \times \hat{P} = -i\hbar \vec{r} \times \vec{\nabla}$$

la quale, nel sistema di coordinate cartesiano, fornisce la seguente terna ordinata di operatori

$$\hat{L} = (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z) = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}, z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}, x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

- E' semplice, anche con un calcolo diretto, verificare che le componenti cartesiane di questo operatore soddisfano le seguenti **relazioni di commutazione**

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z \quad [L_z, L_x] = i\hbar L_y \quad [L_y, L_z] = i\hbar L_x$$

le quali comportano che solo uno degli operatori cartesiani possa avere autovalori definiti per cui concludiamo che **in uno stato quantomeccanico solo una delle componenti cartesiane del momento angolare può assumere un valore definito** (di solito si assume che tale operatore cartesiano sia L_z);

- Consideriamo ora l'operatore modulo quadrato del momento angolare

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$$

si ottengono facilmente le seguenti regole di commutazione per L^2

$$[L^2, L_x] = [L^2, L_y] = [L^2, L_z] = 0$$

le quali affermano che L^2 ha autovalori definiti assieme ad uno qualunque degli operatori cartesiani del momento angolare che possiamo assumere essere L_z . Dunque **in uno stato quantomeccanico solo L^2 ed L_z possono assumere valori definiti** ovvero **solo il modulo quadrato (o il modulo qualora si estraiga la radice quadrata) del momento angolare ed una sua componente cartesiana possono assumere valori definiti** (si noti la differenza con il concetto classico di momento angolare).

- Utilizzando le regole di commutazione è possibile mostrare che **il modulo quadrato del momento angolare e la sua componente lungo una certa direzione dello spazio risultano quantizzate**. Infatti si trova che (vedi appendice): **l'operatore modulo quadrato del momento angolare L^2 può assumere solo i seguenti valori discreti**

$$l(l+1)\hbar^2 \quad l=0, 1, 2, \dots$$

mentre **l'operatore della terza componente cartesiana del momento angolare L_z può assumere solo i seguenti valori discreti**

$$m\hbar \quad m = -l, -l+1, \dots, l+1, l \quad -l \leq m \leq l$$

A partire dalle espressioni operatoriali del momento angolare risulta poi possibile calcolare la forma esplicita degli stati quantomeccanici con modulo quadrato e terza componente del momento angolare definiti (si tratta di trovare gli autostati di un operatore dato). Tali **stati di momento angolare definito** (con le limitazioni ricordate) o, più formalmente, tali **autostati degli operatori L^2 ed L_z** , costituiscono una **famiglia di funzioni $\psi_{l,m}$ dipendente dai numeri interi m ed l** (detti numeri quantici del momento angolare) note con il nome di **armoniche sferiche** (espressioni polinomiali di funzioni trigonometriche che possono essere trovate in un qualunque testo di meccanica quantistica) che soddisfano le seguenti equazioni agli autovalori

$$\begin{aligned} L^2 \psi_{l,m}(\vec{r}) &= l(l+1)\hbar^2 \psi_{l,m}(\vec{r}) & l=0, 1, 2, \dots \\ L_z \psi_{l,m}(\vec{r}) &= m\hbar \psi_{l,m}(\vec{r}) & m = -l, -l+1, \dots, l+1, l \quad -l \leq m \leq l \end{aligned}$$

□ Momento Angolare Intrinseco (Spin)

Nella meccanica classica il valore del momento angolare orbitale di una particella dipende dal polo di riduzione scelto. Se questo coincide con il centro di massa della particella, il momento angolare orbitale si annulla e l'unico momento angolare possibile è quello intrinseco (detto spin) che può però sussistere nel solo caso in cui la particella sia spazialmente estesa (ovvero puntiforme). I fatti sperimentali (come noto il concetto quantomeccanico di spin fu introdotto inizialmente nel caso dell'elettrone per descrivere lo strano sdoppiamento delle linee spettrali dei metalli alcalini) hanno mostrato che un momento angolare intrinseco o spin può esistere anche nel caso dei corpuscoli quantomeccanici fatte salve un certo numero di fondamentali differenze:

- **meccanica classica:** un momento angolare intrinseco può esistere **solo per i corpi estesi** (non puntiformi) e questo si interpreta come la somma dei momenti angolari orbitali di tutte le parti che lo compongono;
- **meccanica quantistica:** un momento angolare intrinseco può esistere **anche per le particelle puntiformi** e come tale non è riducibile in nessun modo a somme di momenti angolari orbitali delle parti del sistema;
- **meccanica classica:** il momento angolare intrinseco può **assumere con continuità qualunque valore in modulo direzione e verso**. Esso ha un **carattere estrinseco** e descrive essenzialmente lo stato cinematico di rotazione del sistema rispetto ad un prefissato sistema di riferimento;
- **meccanica quantistica:** il momento angolare intrinseco può **assumere un valore in modulo fisso ed immutabile con valori quantizzati, mentre la direzione è soggetta alle limitazioni del momento angolare orbitale** (solo una delle sue componenti cartesiane può assumere un valore definito che però è quantizzato). Esso perde il suo carattere estrinseco di natura cinematica ed assume, al pari della massa del corpuscolo, lo status di grandezza fisica intrinseca.

Per questi ed altri motivi possiamo affermare che **lo spin è un concetto quantistico senza alcuna corrispondenza nella fisica classica**.

Mentre gli operatori della quantità di moto, energia, momento angolare orbitale agiscono sulla posizione \vec{r} e sul tempo t della funzione d'onda (sono infatti derivate rispetto alle coordinate spaziali e temporali) **gli operatori dello spin agiscono su di un nuovo grado di libertà discreto della funzione d'onda** che indichiamo con la variabile discreta α

$$\psi(\vec{r}, t, \alpha) \quad \alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$$

Da un punto di vista formale potremmo anche disporre le diverse funzioni corrispondenti ai diversi valori di α in un vettore di N componenti detto **spinore**

$$[\psi(\vec{r}, t, \alpha_1), \psi(\vec{r}, t, \alpha_2), \dots, \psi(\vec{r}, t, \alpha_N)] \equiv [\psi_1(\vec{r}, t), \psi_2(\vec{r}, t), \dots, \psi_N(\vec{r}, t)] \equiv \xi(\vec{r}, t)$$

pensabile come un vettore posizione in uno **spazio complesso** di N dimensioni.

Quando la parte spaziale e temporale è la stessa per tutte le componenti, lo spinore può essere scritto nella seguente forma

$$\xi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}, t) \chi$$

dove χ è sempre un vettore posizione in uno **spazio complesso** di N dimensioni.

Sul vettore di spin (spinore) agiscono gli **operatori dello spin** che soddisfano le stesse leggi di commutazione degli operatori del momento angolare orbitale

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z \quad [S_z, S_x] = i\hbar S_y \quad [S_y, S_z] = i\hbar S_x$$

Utilizzando le regole di commutazione è possibile mostrare che il modulo quadrato dello spin e la sua componente lungo una certa direzione dello spazio risultano quantizzate. Infatti si trova che (vedi appendice): **l'operatore modulo quadrato dello spin S^2 può assumere solo i seguenti valori discreti**

$$s(s+1)\hbar^2 \quad s = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$$

mentre **l'operatore della terza componente cartesiana dello spin S_z può assumere solo i seguenti valori discreti**

$$s_z \hbar \quad s_z = -s, -s+1, \dots, s-1, s \quad -s \leq s_z \leq s$$

Come ricordato in precedenza **il valore s dello spin è una proprietà intrinseca della particella** fissa ed immutabile. A partire dalle espressioni operatoriali del momento angolare risulta poi possibile calcolare la forma esplicita degli stati quantomeccanici con modulo quadrato e terza componente dello spin definiti (si tratta di trovare gli autostati di un operatore dato). Tali **stati di spin definito** (con le limitazioni ricordate) o, più formalmente, tali **autostati degli operatori S^2 ed S_z** , costituiscono una **famiglia di spinori χ_{s,s_z} dipendente dai numeri interi s ed s_z** (detti numeri quantici dello spin) che soddisfano le seguenti equazioni agli autovalori

$$\begin{aligned} S^2 \chi_{s,s_z} &= s(s+1)\hbar^2 \chi_{s,s_z} & s &= 0, 1/2, 1, 3/2, \dots \\ S_z \chi_{s,s_z} &= s_z \hbar \chi_{s,s_z} & s_z &= -s, -s+1, \dots, s-1, s \quad -s \leq s_z \leq s \end{aligned}$$

Se la parte orbitale rappresenta uno stato di **momento angolare orbitale definito L** e la parte spinoriale uno stato di **spin definito S** allora la funzione d'onda complessiva rappresenta uno stato di **momento angolare totale J** cui corrisponde **l'operatore momento angolare totale J** somma degli operatori momento angolare orbitale e di spin

$$\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$$

Prima di discutere le regole con cui si sommano i momenti angolari vogliamo ricordare che **la separazione di momento angolare totale in momento angolare orbitale e di spin non è un concetto relativisticamente invariante**. In particolare **gli operatori modulo quadrato dello spin S^2 e del modulo quadrato del momento angolare L^2 non commutano con i generatori delle trasformazioni di Lorentz** il che significa che il loro valore cambia con il sistema di riferimento. La precedente formula, con le regole di somma che illustreremo tra poco, valgono pertanto solo in ambito non relativistico.

□ La somma di momenti angolari

Accade spesso di dovere sommare momenti angolari, sia orbitali che di spin sia della medesima particella che di particelle diverse. Come si sommano allora i momenti angolari?

Fisica classica: i momenti angolari sono vettori e si sommano con la regola del parallelogramma per cui la somma dei momenti angolari \vec{j}_1 e \vec{j}_2 ha come risultato il momento angolare $\vec{J} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$ il cui modulo dipende dalla loro orientazione relativa e può assumere con continuità tutti i valori compresi nell'intervallo $|\vec{j}_1 - \vec{j}_2| < J < |\vec{j}_1 + \vec{j}_2|$ e, a parte i vincoli di natura geometrica, non ci sono restrizioni sulle componenti cartesiane

$$\vec{j}_1 \quad \vec{j}_2 \quad \vec{J} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2 \quad |\vec{j}_1 - \vec{j}_2| < |\vec{J}| < |\vec{j}_1 + \vec{j}_2|$$

Meccanica quantistica: ai momenti angolari si associano gli operatori \mathbf{j}_1 e \mathbf{j}_2 dei quali (date le proprietà del momento angolare) conviene porre in risalto anche gli operatori della loro terza componente cartesiana \mathbf{j}_{1z} e \mathbf{j}_{2z} . Alla somma dei momenti angolari risultano associati l'operatore somma del momento angolare $\mathbf{J} = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2$ e l'operatore somma della terza componente del momento angolare $\mathbf{J}_z = \mathbf{j}_{1z} + \mathbf{j}_{2z}$

$$\hat{\mathbf{j}}_1 \quad \hat{\mathbf{j}}_{1z} \quad \hat{\mathbf{j}}_2 \quad \hat{\mathbf{j}}_{2z} \quad \hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{j}}_1 + \hat{\mathbf{j}}_2 \quad \hat{\mathbf{J}}_z = \hat{\mathbf{j}}_{1z} + \hat{\mathbf{j}}_{2z}$$

Cosa possiamo dire degli *autovalori* e degli *autovettori* degli operatori modulo quadrato \mathbf{J}^2 e terza componente \mathbf{J}_z del momento angolare totale?

Per quanto riguarda gli **autovalori** si può mostrare il seguente semplice risultato:

se gli operatori \mathbf{j}_1^2 e \mathbf{j}_2^2 hanno autovalori $j_1(j_1 + 1)\hbar^2$ e $j_2(j_2 + 1)\hbar^2$ con $j_1, j_2 = 0, 1/2, 1, \dots$

allora \mathbf{J}^2 ha autovalori $J(J + 1)\hbar^2$ dove J è tale che $|\vec{j}_1 - \vec{j}_2| < J < |\vec{j}_1 + \vec{j}_2|$ (notare analogia con la somma vettoriale)

se gli operatori \mathbf{j}_{1z} e \mathbf{j}_{2z} hanno autovalori $m_1\hbar$ e $m_2\hbar$ con $-j_1 < m_1 < j_1$ $-j_2 < m_2 < j_2$

allora \mathbf{J}_z ha autovalori $M\hbar$ dove M è tale che $-J < M < J$ $M = m_1 + m_2$

Per quanto riguarda gli **autostati** si deve premettere la seguente osservazione. Nel caso quantomeccanico può essere definito solo il modulo del momento angolare e la sua terza componente rimanendo indefinite le prime due componenti. A causa di questo fatto la 'somma' di due dati momenti angolari può fornire *più valori* e non uno solo come accade nel caso meccanico classico. Questo fatto si riflette in una molteplicità di autostati, sommati in modo coerente (ovvero in interferenza), accessibili alla ... Si pone il seguente problema: **dati due stati di momento angolare j_1 e j_2 determinare i possibili stati di momento angolare totale J somma dei primi due. i coefficienti della combinazione lineare dei possibili stati di momento angolare totale J .** Tali coefficienti sono detti **Coefficienti di Clebsch-Gordan** e sono definiti dalla relazione seguente

$$\phi_{j_1 m_1} \phi_{j_2 m_2} = \sum_{\substack{J=|j_1-j_2| \\ M=m_1+m_2}}^{|j_1+j_2|} C_{JM}^{j_1 m_1 j_2 m_2} \phi_{JM}$$

Naturalmente si può porre anche il problema inverso: **dato lo stato di momento angolare totale J , individuare i coefficienti della combinazione lineare dei possibili stati di momento angolare j_1 e j_2 .** Anche questi sono detti **Coefficienti di Clebsch-Gordan**

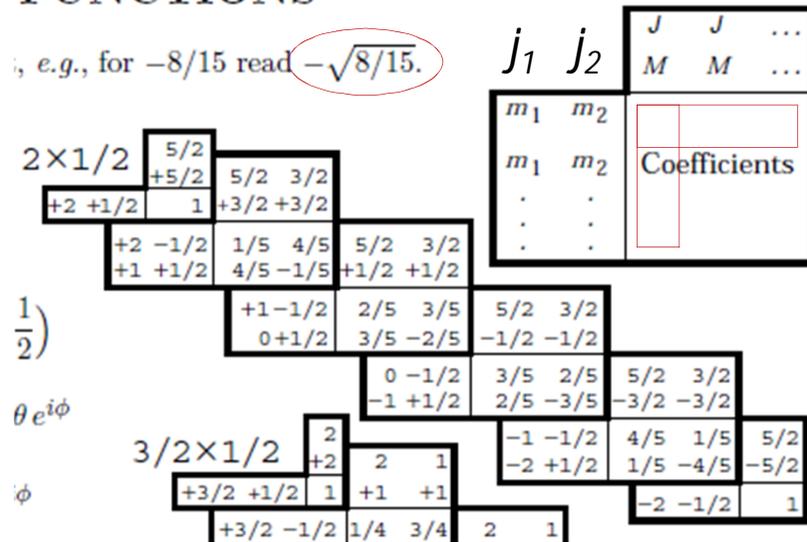
$$\phi_{JM} = \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_1+m_2=M}} C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{JM} \phi_{j_1 m_1} \phi_{j_2 m_2}$$

NOTA: i due stati di momento angolare definito **j_1 e j_2** , quando vengono sommati (scrivendoli in forma di prodotto si costruisce di fatto uno stato somma poiché su tale prodotto agisce l'operatore somma **$J = j_1 + j_2$**), forniscono una serie di possibili stati di momento angolare totale **J** (e non un solo stato come nel caso classico).

34. Clebsch-Gordan coefficients

COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, FUNCTIONS

e.g., for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.



Esempi

$$\psi_{2,2}\psi_{1/2,1/2} = \sqrt{1}\psi_{5/2,5/2}$$

$$\psi_{2,2}\psi_{1/2,-1/2} = \sqrt{1/5}\psi_{5/2,3/2} + \sqrt{4/5}\psi_{3/2,3/2}$$

$$\psi_{5/2,1/2} = \sqrt{2/5}\psi_{1,1}\psi_{1/2,-1/2} + \sqrt{3/5}\psi_{1,0}\psi_{1/2,1/2}$$

NOTA: Come vedremo esiste una estesa analogia tra momento angolare ed isospin che comporta che i coefficienti di Clebsch-Gordan con le regole illustrate possano essere impiegate anche con l'isospin.

□ Proprietà di simmetria dei Coefficienti di Clebsh-Gordan

I coefficienti di Clebsh-Gordan permettono di costruire gli stati di momento angolare totale J, M a partire dagli stati di momento angolare (j_1, m_1) e (j_2, m_2) . Ci si può chiedere cosa succeda nel caso in cui gli stati vengano sommati nell'ordine inverso cioè calcolando $(j_2, m_2) + (j_1, m_1)$ invece di $(j_1, m_1) + (j_2, m_2)$. Lungi dall'essere una semplice curiosità, le proprietà della somma rispetto allo scambio degli 'addendi' intervengono in molte situazioni che riguardano la fisica delle particelle.

Conviene allora scrivere le rispettive serie di Clebsh-Gordan

$$\phi_{j_1 m_1} \phi_{j_2 m_2} = \sum_{\substack{J=|j_1-j_2| \\ M=m_1+m_2}}^{|j_1+j_2|} C_{JM}^{j_1 m_1 j_2 m_2} \phi_{JM} \qquad \phi_{j_2 m_2} \phi_{j_1 m_1} = \sum_{\substack{J=|j_1-j_2| \\ M=m_1+m_2}}^{|j_1+j_2|} C_{JM}^{j_2 m_2 j_1 m_1} \phi_{JM}$$

ed osservare che per trovare la risposta dobbiamo individuare la relazione esistente tra $C_{JM}^{j_1 m_1 j_2 m_2}$ e $C_{JM}^{j_2 m_2 j_1 m_1}$. Dalla analisi diretta delle tavole di Clebsh-Gordan oppure anche da considerazioni di ordine più generale si ottiene la seguente formula

$$C_{JM}^{j_1 m_1 j_2 m_2} = (-1)^{J-j_1-j_2} C_{JM}^{j_2 m_2 j_1 m_1}$$

Il modello a 'shell' del nucleo

Dobbiamo ora domandarci quale possa essere il motivo del successo solo parziale del modello a gas di Fermi nella descrizione delle caratteristiche generali della energia di legame dei nuclei stabili. Il suo successo è certamente dovuto al fatto che riconosce il ruolo determinante giocato dalle proprietà collettive dei neutroni e dei protoni in condizioni di forte degenerazione dove sono cruciali le limitazioni del principio di Pauli. Il suo insuccesso, invece, è probabilmente dovuto alla eccessiva semplificazione delle forze nucleari in gioco poiché si ipotizza che le complesse interazioni che ogni nucleone ha con i suoi vicini (poiché l'interazione forte è a corto raggio) possano riassumersi in una **interazione efficace** nulla all'interno del volume nucleare e tipo parete di contenimento sulla superficie.

L'esistenza di un potenziale efficace nucleare

In realtà la prima parte di questa ipotesi (ovvero che le interazioni di ogni nucleone con i suoi vicini possano riassumersi in una interazione efficace) è assai ragionevole per la seguente serie di considerazioni.

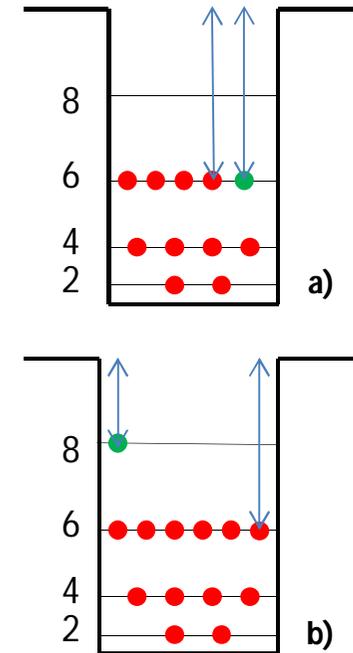
Dato che l'interazione efficace vincola i nucleoni all'interno del volume nucleare ne consegue, sulla base della meccanica quantistica, che la loro energia possa assumere solo valori discreti con una ben precisa spaziatura (calcolabili con l'equazione di Schroedinger). D'altra parte ad ogni possibile valore della energia può corrispondere un numero ben definito di stati quantomeccanici, e ad ogni stato quantomeccanico (a causa del principio di Pauli) solo due nucleoni per cui, alla fine, *su ogni livello energetico potrà risiedere solo un ben definito numero di neutroni e protoni*. Poiché un nucleo nello stato fondamentale tende ad avere la minima energia possibile, deduciamo che *i neutroni ed i protoni andranno a riempire dal basso i diversi livelli energetici fino a raggiungere un certo livello massimo detto livello di Fermi*.

Ora, immaginiamo che un neutrone (protone) del nucleo collida con un secondo neutrone (protone). A seguito della collisione il neutrone dovrebbe modificare la propria energia ma, poiché i livelli inferiori e superiori potranno essere occupati, tale variazione avverrà solo se l'energia scambiata risulta sufficiente a farlo saltare al livello di Fermi.

La energia di separazione di neutroni e protoni

In caso contrario lo scambio energetico non avverrà ed il neutrone (protone) si comporterà come se gli altri neutroni (protoni) non esistessero. Ciò comporta che i nucleoni del gas nucleare (come d'altra parte ogni gas di fermioni degeneri) si muovono in modo ordinato secondo 'orbite' regolari senza le reciproche collisioni proprie del gas classico che spezzano continuamente il moto atomico/molecolare. Su questa base ci si può attendere che l'interazione complessiva di un nucleone con quelli adiacenti non si riassume in una forza di carattere stocastico ma in una forza posizionale (che da luogo ad orbite 'regolari') descritta da un opportuno potenziale efficace. Naturalmente, ed è proprio questo il punto debole del modello a gas di Fermi, **non è detto che tale potenziale efficace abbia la semplice forma di buca rettangolare postulata fino a questo momento.** Questa è solo la più semplice tra le ipotesi possibili e necessita di una verifica sperimentale.

Partiamo allora dal fatto che i neutroni ed i protoni di un nucleo nello stato fondamentale vanno a distribuirsi su livelli energetici via via più elevati fino a giungere un certo livello massimo detto livello di Fermi. Questo stato di cose ha alcune inevitabili conseguenze. Consideriamo, ad esempio, un nucleo con N neutroni e Z protoni e domandiamoci quanta energia dobbiamo fornire al neutrone per estrarlo dal nucleo. Sappiamo che tale energia eguaglia la differenza tra la profondità della buca di potenziale ed il valore della energia del livello su cui si trova il neutrone ovvero $V_0 - E_i$ (vedi figura a). Consideriamo ora un nucleo con N+1 neutroni e Z protoni (ovvero un isotopo del nucleo iniziale) e domandiamoci ancora una volta quanta energia dobbiamo fornire al neutrone per estrarlo dal nucleo. Ci sono due possibili risposte. Se il livello energetico E_i era incompleto il neutrone in più andrà a collocarsi sullo stesso livello energetico (figura a) e l'energia necessaria sarà ancora $V_0 - E_i$. Se invece il livello energetico era completo il neutrone in più andrà a collocarsi sul livello energetico successivo, più elevato, e l'energia necessaria sarà inferiore ovvero $V_0 - E_{i+1} < V_0 - E_i$ (figura b). Dunque, dobbiamo attenderci che l'energia di separazione di un neutrone dal nucleo in una serie isotopica subisca bruschi salti, quando occorre il completamento di un livello energetico. Esattamente la stessa cosa dovrà accadere nelle serie isotoniche qualora si tenga fisso il numero N di neutroni e si incrementi di una unità il numero Z di protoni.



I dati sperimentali sulla energia di separazione di neutroni e protoni

I dati sperimentali confermano queste previsioni qualitative. Nella figura a lato è infatti possibile osservare la diminuzione improvvisa della energia di separazione di un neutrone nel caso delle serie isotopiche dell'Ossigeno, del Calcio e del Piombo in corrispondenza di **8, 20, 28 e 126** neutroni rispettivamente. Dati analoghi mostrano salti nella energia di separazione neutronica anche in corrispondenza dei valori 28, 50, 82. Lo stesso dicasi per le serie isotoniche le quali mostrano salti in corrispondenza degli stessi valori di Z.

i numeri magici

In sintesi possiamo affermare che i dati sperimentali sulla energia di separazione di un neutrone o di un protone nelle serie isotopiche ed isotoniche dei diversi nuclei mostrano salti bruschi in corrispondenza dei valori **8, 20, 28, 50, 82 e 126**. Da ciò deduciamo che **i livelli energetici del potenziale nucleare (sempre inteso come potenziale efficace) sono distribuiti in modo tale da presentare un certo numero di bruschi salti in corrispondenza di livelli che si completano con 8, 20, 28, 50, 82 e 126 neutroni e/o protoni detti numeri magici.**

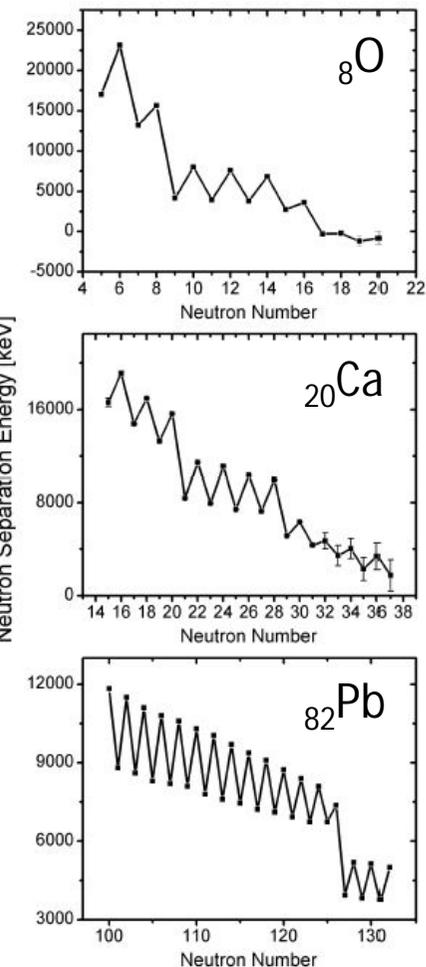
La buca di potenziale sferica infinita

Il problema che ora si pone è quello di stabilire se un potenziale efficace a forma di buca di potenziale rettangolare abbia livelli energetici distribuiti nel modo indicato dai dati sperimentali. Per cominciare si potrebbero calcolare i livelli energetici di una buca di potenziale sferica infinita

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R \\ +\infty & \text{se } r > R \end{cases} \quad (1)$$

(non potrà essere questo il potenziale corretto poiché prevede una energia di separazione infinita per i neutroni e per i protoni, tuttavia può darci preziose indicazioni). Adottato un sistema di coordinate sferiche, e risolta l'equazione di Schroedinger con le appropriate condizioni al contorno (funzione d'onda nulla quando $r=R$ e a quadrato sommabile all'interno della buca di potenziale), si trova che la funzione d'onda di uno stato ad energia definita è esprimibile come il **prodotto di una funzione della posizione e di una funzione esponenziale complessa del tempo**

$$\psi(\vec{r}, t) = \varphi(r, \vartheta, \varphi) e^{\frac{i}{\hbar} Et} \quad (2)$$



La funzione della posizione, a sua volta, può essere espressa come il prodotto di una **funzione della variabile radiale r** con una **funzione delle variabili angolari ϑ e φ**

$$\varphi(r, \vartheta, \varphi) = j_l(kr)Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) \quad (3)$$

In particolare le $j_l(kr)$, con $l=0, 1, 2, 3, \dots$, sono una famiglia di funzioni oscillanti decrescenti che si annullano più volte dette **funzioni di Bessel** mentre le $Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)$, con $l=0, 1, 2, 3, \dots$ ed $m=-l, -l+1, -l+2, \dots, l-2, l-1, l$ per ogni possibile valore di l , sono una famiglia di polinomi di grado l di funzioni trigonometriche dette **armoniche sferiche** che descrivono **stati quantomeccanici con quadrato del momento angolare L^2 e terza componente L_z definiti**

$$\begin{aligned} L^2 Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) &= l(l+1)\hbar^2 Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) & l &= 0, 1, 2, \dots \\ L_z Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) &= m\hbar Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) & m &= -l, -l+1, \dots, l-1, l \end{aligned}$$

(questo fatto non deve sorprendere. Infatti ci attendiamo che in una buca di potenziale oltre alla energia si conservi pure il momento angolare per cui l'insieme di stati fondamentali della buca, gli autostati, possono essere scelti come stati con energia e momento angolare definiti).

Affinché la funzione d'onda possa annullarsi in $r=R$ (si ricordi che è una delle condizioni al contorno della equazione di Schroedinger per questo problema) si deve avere

$$j_l(kR) = 0$$

da cui otteniamo la condizione

$$kR = z_{l,n}$$

dove $z_{l,n}$ con $n=1,2,3, \dots$ è la serie infinita di valori crescenti dell'argomento che annullano la funzione di Bessel $j_l(z)$ di ordine l (valori tabulati in un qualunque handbook di matematica).

I livelli energetici della buca di potenziale sferica infinita

Ciò comporta che il modulo del vettore d'onda k sia quantizzato e con esso pure la energia. Infatti, dato che il potenziale è nullo all'interno della buca si ha

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2mR^2} z_{l,n}^2 \quad (4)$$

una relazione che ci permette di costruire i possibili valori della energia. Concludiamo allora che

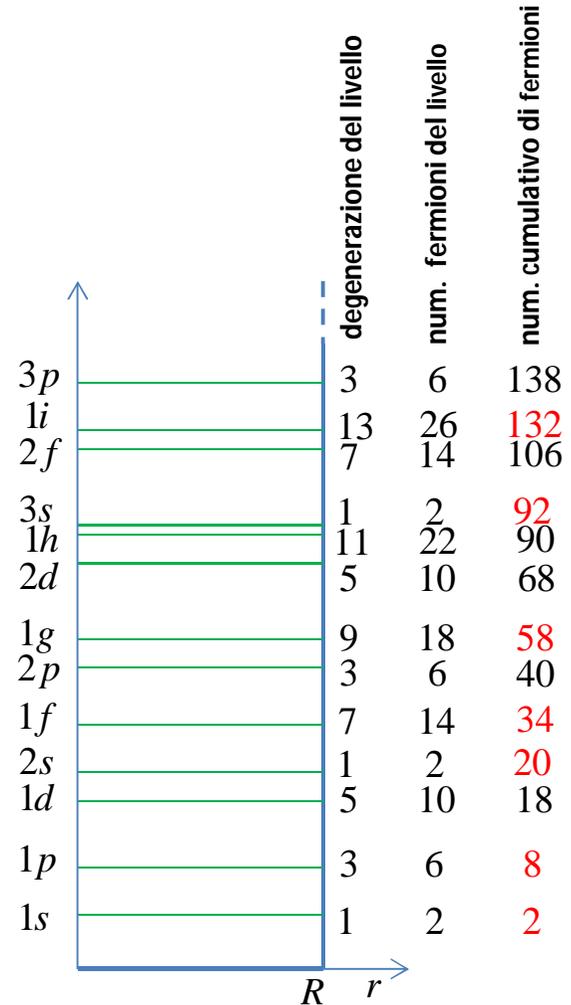
- i) l'energia dipende dai numeri quantici l ed n e per ogni fissato l aumenta con n ;
- ii) ad ogni valore della energia, ovvero ad ogni coppia di valori di l ed n , corrispondono $(2l+1)$ diverse funzioni d'onda con L^2 ed L_z definiti: $Y_{l,0}, Y_{l,+1}, Y_{l,-1}, \dots, Y_{l,l}, Y_{l,l-1}, \dots, Y_{l,-l}$ (fatto che si riassume dicendo che il livello energetico ha una degenerazione di ordine $(2l+1)$).

In molti testi, la coppia di numeri quantici l ed n che definiscono lo specifico livello energetico, viene indicata per mezzo della **notazione atomica** dove n figura esplicitamente al primo posto mentre l è indicato implicitamente al secondo posto attraverso una lettera seguendo la corrispondenza

$$l=0 \rightarrow s \quad l=1 \rightarrow p \quad l=2 \rightarrow d \quad l=3 \rightarrow f \quad l=4 \rightarrow g \quad \dots$$

(Es: il livello $n=3, l=2$ si indica con la notazione $3d$).

Utilizzando allora la formula (4), i livelli energetici della buca di potenziale sferica infinita risultano ordinati nel modo indicato in figura. A fianco della figura, nella prima colonna è indicata la degenerazione, ovvero il numero di stati quantomeccanici che giacciono sul livello energetico. Nella seconda colonna il numero di neutroni o protoni che, sulla base del principio di esclusione di Pauli, risulta possibile disporre sul livello energetico (si noti che tale numero è sempre il doppio della degenerazione). Infine, nella terza colonna il numero cumulativo di neutroni e protoni ovvero il numero di neutroni e protoni distribuiti nel livello energetico ed in tutti quelli sottostanti. Se andiamo ora a selezionare le coppie di livelli maggiormente separate, i corrispondenti numeri cumulativi di protoni e neutroni forniscono **i numeri magici della buca di potenziale sferica infinita** (marcati in rosso).



E' evidente che la serie empirica di numeri magici 8, 20, 28, 50, 82 e 126 non è riprodotta in modo soddisfacente per cui dobbiamo concludere che il potenziale preso in esame deve essere modificato.

Una prima ovvia modifica non può essere che quella di richiedere che il potenziale abbia una **profondità finita** e non infinita con una **risalita ripida** ma non verticale in $r=R$ così da essere privo di punti assai poco fisici di non derivabilità.

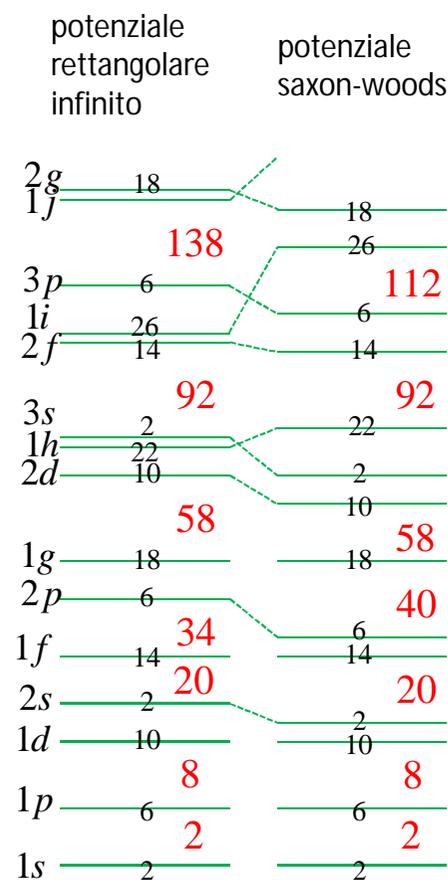
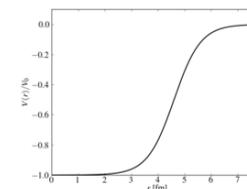
Una espressione semplice che soddisfi questi requisiti è data dal **potenziale di Saxon-Wood**

Il potenziale di Saxon-Woods

$$V_{sw}(r) = \frac{-V_0}{1 + \exp(\frac{r-R}{d})} \quad (5)$$

dove $R=r_0A^{1/3}$ ($r_0=1.24 \text{ fm}$) è il raggio nucleare, $d=0.52 \text{ fm}$ lo spessore dell'alone e V_0 la profondità della buca **dell'ordine di 50 MeV**. I livelli energetici del potenziale sferico di Saxon-Woods, confrontati con quelli della buca di potenziale sferica infinita, sono mostrati qui a fianco. Come si vede risultano confermati i numeri magici 2, 8 e 20, quest'ultimo con maggior nettezza del caso precedente, tuttavia i numeri magici più alti non emergono correttamente. In particolare il numero magico **28** sembra davvero problematico poiché nessuno dei livelli successivi al **2s** porta con se **8** nucleoni (il livello 1f ne porta di colpo 14!).

Il problema fu risolto nel 1949 da Mayer, Haxel, Suess e Jensen su suggerimento di E. Fermi che consigliò di prendere in esame la possibilità che anche nei nuclei (come negli atomi) i livelli energetici possano suddividersi in una struttura fina a causa della presenza, anche nella interazione forte, di una **interazione spin-orbita**. E' chiaro che il suggerimento va nella giusta direzione poiché laddove si ha un solo livello energetico con N nucleoni ne avremo due, ciascuno con una frazione degli N nucleoni. In questo modo ciascun livello porterà meno nucleoni aprendo la possibilità, in linea di principio, a numeri magici intermedi rispetto a quelli del potenziale di Saxon-Woods puro e semplice.



Interazione spin-orbita elettromagnetica dell'elettrone

In meccanica quantistica **l'interazione spin-orbita** è una interazione di natura elettrodinamica che si ha quando una particella dotata di spin (ad esempio l'elettrone) si muove nel campo elettrostatico di una carica ferma (ad esempio il nucleo). Il meccanismo dinamico che porta a questo tipo di interazione può essere compreso già nel contesto dell'elettromagnetismo classico.

L'energia potenziale di un dipolo magnetico nel campo magnetico

Per illustrarlo possiamo considerare una spira rettangolare di lati **a** e **b** percorsa da una certa corrente costante **i**, immersa in un certo campo magnetico **B** e libera di ruotare attorno all'asse indicato nella figura. Sulla base delle leggi generali dell'elettromagnetismo sulla spira agisce la coppia di forze indicata in figura che compiono il seguente lavoro elementare

$$dL = 2d\vec{f} \cdot d\vec{s} = 2df ds \cos(\pi/2 - \vartheta) = 2(i dl B)(-\frac{b}{2} d\vartheta)(\sin \vartheta) = -i dl b B \sin \vartheta d\vartheta$$

che può essere integrato lungo il lato a

$$dL = -i b B \sin \vartheta d\vartheta \int_0^a dl = -i a b B \sin \vartheta d\vartheta = d(i a b B \cos \vartheta) = d(\vec{\mu} \cdot \vec{B})$$

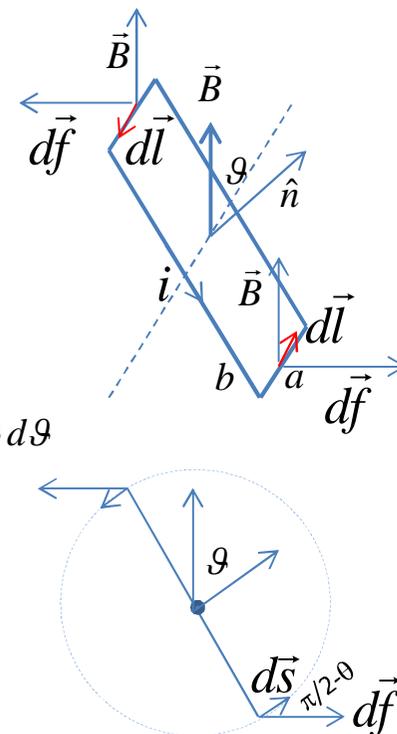
e da cui deduciamo l'espressione differenziale del potenziale

$$dU = -dL = -d(\vec{\mu} \cdot \vec{B})$$

e quindi, infine, la seguente espressione **della energia potenziale del momento di dipolo magnetico $\vec{\mu}$ immerso nel campo magnetico \vec{B}**

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad (6)$$

Ora potremmo anche dimenticarci del problema della spira che ci ha guidati nella costruzione di questa formula poiché ci attendiamo che abbia validità generale ovvero che fornisca correttamente l'energia che ogni dipolo magnetico possiede una volta immerso in un campo magnetico.



Il momento di dipolo magnetico dell'elettrone

Come abbiamo visto in precedenza, le particelle microscopiche possono possedere un momento angolare intrinseco detto **spin** fisso ed invariante con valori definiti di S^2 ed S_z

$$S^2 = s(s+1)\hbar^2 \quad s = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$$
$$S_z = s_z \hbar \quad s_z = -s, -s+1, \dots, s-1, s \quad \text{ovvero} \quad -s < s_z < s$$

Secondo la fisica classica un corpo materiale esteso carico in rotazione attorno ad un asse ovvero dotato di spin da luogo non solo ad un campo elettrico ma anche ad un campo magnetico e gli si può associare un ben preciso e calcolabile momento di dipolo magnetico. Ciò rimane vero anche nella meccanica quantistica ma tra il concetto classico di momento di dipolo magnetico e quello quantomeccanico sussistono esattamente le stesse differenze discusse nel caso dello spin. In particolare, mentre nella fisica classica il momento di dipolo magnetico ha un carattere estrinseco poiché legato allo stato di rotazione del corpo materiale carico, nella meccanica quantistica, al pari dello spin, rappresenta una proprietà fissa ed invariabile della particella.

L'operatore associato alla grandezza fisica momento di dipolo magnetico, nel caso delle particelle microscopiche puntiformi (o elementari) di spin $1/2$, è fornito dalla equazione d'onda relativistica di Dirac

$$\vec{\mu} = -g(e\hbar/2m)\vec{S} \quad g = 2 \quad \text{a meno delle correzioni elettrodinamiche} \quad (7)$$

dove g viene detto **rapporto giromagnetico**, $(e\hbar/2m)$ **magnetone di Bohr**, ed \vec{S} indica la terna cartesiana ordinata di operatori dello spin (non c'è alcun modello classico capace di fornire questo tipo di relazione tra spin e momento di dipolo magnetico). Dato che, come più volte detto, lo spin può avere valori definiti solo per quanto riguarda S^2 ed S_z risulta che il momento di dipolo magnetico può avere valori definiti solo nel quadrato del modulo (o estraendo la radice quadrata nel modulo) e nella componente lungo una certa direzione dello spazio che assumiamo sempre coincidere con l'asse z . Per una particella di spin $s=1/2$ avremo allora il seguente valore del momento di dipolo magnetico

$$\mu = -g(e\hbar/2m)\hbar\sqrt{s(s+1)} = -g(e\hbar/2m)\hbar\sqrt{3/4}$$

con le seguenti componenti lungo l'asse z

$$\mu_z = -g(e\hbar/2m)m\hbar \quad m = +1/2, -1/2$$

Il campo magnetico agente sull'elettrone

Il nucleo, in quanto dotato di carica elettrica positiva, crea attorno a se un campo elettrico radiale esterno che trattiene l'elettrone (carico negativamente) su di una orbita chiusa per mezzo della forza coulombiana. E' essenziale notare però che un osservatore solidale con l'elettrone vedrebbe, in ogni istante, un nucleo carico in moto con velocità $-\vec{v}$ opposta a quella dell'elettrone \vec{v} per cui sull'elettrone deve agire pure un campo magnetico che è immediato esprimere nel caso classico

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_{nuc} \vec{v}_{nuc} \wedge \hat{r}}{r^2} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_{nuc} \vec{v} \wedge \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_{nuc} (\vec{r} \wedge m\vec{v})}{m r^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_{nuc}}{m r^3} \vec{l} = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_{nuc}}{m r^3} \vec{l} = \frac{1}{m c^2} \frac{|E|}{r} \vec{l} = \frac{1}{m c^2} \frac{1}{r} \left| \frac{\partial U}{\partial r} \right| \vec{l}\end{aligned}$$

Possiamo arguire che l'espressione corrispondente ad una trattazione quantomeccanica dell'elettrone possa essere ottenuta sostituendo al momento angolare meccanico l'operatore momento angolare

$$\vec{B} = \frac{1}{m c^2} \frac{1}{r} \left| \frac{\partial U}{\partial r} \right| \vec{L} \quad (8)$$

Ora abbiamo tutti gli elementi per comprendere in cosa consista la interazione spin orbita dell'elettrone nel caso elettromagnetico. Infatti il campo magnetico agente sull'elettrone dato dalla (8) si accoppia al suo momento di dipolo intrinseco dato dalla (7) determinando un potenziale di interazione data dalla (6). Sostituendo la (8) e la (7) nella (6) otteniamo il seguente **potenziale elettromagnetico spin-orbita**

Potenziale elettromagnetico spin-orbita

$$U = \frac{g(e\hbar/2m)}{m c^2} \frac{1}{r} \left| \frac{\partial U}{\partial r} \right| \vec{L} \cdot \vec{S} \quad (9)$$

che va ad aggiungersi a quello coulombiano nel caso dell'elettrone atomico e così chiamato perché dipendente, in ultima analisi, dal prodotto scalare tra il momento angolare orbitale dell'elettrone ed il suo spin.

Sulla falsariga del potenziale spin-orbita elettromagnetico, Mayer, Haxel, Suess e Jensen (il primo e l'ultimo ricevettero per questo contributo il premio Nobel nel 1963) ipotizzarono (su suggerimento di E. Fermi) che anche le interazioni forti fossero caratterizzate da una interazione spin orbita (si noti che ciò comporta una notevole analogia strutturale tra interazione elettromagnetica ed interazione forte. Infatti, il meccanismo dinamico che determina l'interazione spin orbita è basato sulla esistenza di forze dipendenti dalla velocità del tipo di Lorentz). In questo modo ammisero che il **potenziale della interazione forte**, accanto al termine centrale di Saxon-Woods, dovesse contenere pure un secondo termine centrale del tipo spin-orbita

Il potenziale forte con il termine spin orbita

$$V_{Forte} = V_{SW}(r) + V_{ls}(r) \vec{L} \cdot \vec{S} \quad (10)$$

Calcolo del valore di aspettazione del potenziale forte

Qual'è il valore di aspettazione di un tale potenziale? Come noto, secondo le regole della meccanica quantistica, il valore di una variabile dinamica o in uno stato quantomeccanico descritto dalla funzione d'onda ψ è dato da un certo integrale convolutivo della funzione d'onda ψ e dell'operatore \hat{O} associato alla variabile dinamica stessa (tale integrale viene detto **valore di aspettazione dell'operatore**)

$$\langle o \rangle = \int_V \psi^*(\vec{r}, t) \hat{O} \psi(\vec{r}, t) dV$$

I valori della energia in un certo stato quantomeccanico sono allora dati dalla espressione

$$\langle V_{Forte} \rangle = \langle V_{SW}(r) \rangle + \langle V_{ls}(r) L \cdot S \rangle \quad (11)$$

Si può mostrare che il valore di aspettazione delle parti radiali del potenziale forniscono un semplice termine costante che indicheremo con β' e β per cui si ha

$$\langle V_{Forte} \rangle = \beta' + \beta \langle L \cdot S \rangle \quad (12)$$

Per quanto riguarda il valore di aspettazione dell'operatore $L \cdot S$ possiamo ragionare come segue. Introduciamo l'operatore **momento angolare totale del nucleone** dato dalla somma del suo momento angolare orbitale L e del suo momento angolare di spin S

$$J = L + S \quad (13)$$

Calcoliamo poi il quadrato dell'operatore momento angolare totale

$$J^2 = L^2 + S^2 + 2L \cdot S$$

da cui possiamo ricavare la seguente relazione operatoriale

$$L \cdot S = \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2) \quad (14)$$

e quindi anche la seguente relazione tra i valori di aspettazione

$$\langle L \cdot S \rangle = \langle \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2) \rangle = \frac{1}{2}(\langle J^2 \rangle - \langle L^2 \rangle - \langle S^2 \rangle) \quad (15)$$

Il vantaggio di questo modo di procedere sta nel fatto che i valori di aspettazione degli operatori J^2 , L^2 ed S^2 , sono ben noti. Infatti si ha

$$\langle s^2 \rangle = \int_V \psi^*(\vec{r}, t) \hat{S}^2 \psi(\vec{r}, t) dV = \int_V \psi^*(\vec{r}, t) s(s+1) \hbar^2 \psi(\vec{r}, t) dV = s(s+1) \hbar^2 \int_V \psi^*(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t) dV$$

da cui $\langle s^2 \rangle = s(s+1) \hbar^2 \quad s = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$

ed analogamente $\langle L^2 \rangle = l(l+1) \hbar^2 \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (15a)$

$$\langle J^2 \rangle = j(j+1) \hbar^2 \quad j = |l-s|, \dots, |l+s| \quad j = l-1/2, l+1/2$$

dove nell'ultima relazione si sono applicate le regole di somma sulla espressione operatoriale (13).

Tenendo conto che i nucleoni hanno spin $s=1/2$, tali relazioni forniscono le espressioni

$$\begin{aligned} \langle S^2 \rangle &= \frac{3}{4} \hbar^2 \\ \langle L^2 \rangle &= l(l+1)\hbar^2 \quad l=0,1,2\dots \\ \langle J^2 \rangle &= j(j+1)\hbar^2 \quad j=l-1/2, l+1/2 \end{aligned} \quad (15b)$$

che sostituite nella (15) forniscono la seguente espressione del valore di aspettazione dell'operatore $L \cdot S$

$$\langle L \cdot S \rangle = \frac{\hbar^2}{2} [j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}] \quad j=l-1/2, l+1/2$$

ovvero, per ogni fissato valore del momento angolare orbitale l dello stato quantomeccanico, la coppia di valori

$$\langle L \cdot S \rangle = \begin{cases} \frac{l}{2} \hbar^2 \\ -\frac{(l+1)}{2} \hbar^2 \end{cases} \quad (16)$$

Sostituendo le (16) nella espressione (12) otteniamo infine il **valore di aspettazione del potenziale forte** nel caso di una interazione spin orbita

**Il valore di
aspettazione del
potenziale forte**

$$\langle V_{Forte} \rangle = \begin{cases} \beta' + \beta \frac{l}{2} \hbar^2 \\ \beta' - \beta \frac{(l+1)}{2} \hbar^2 \end{cases} \quad (17)$$

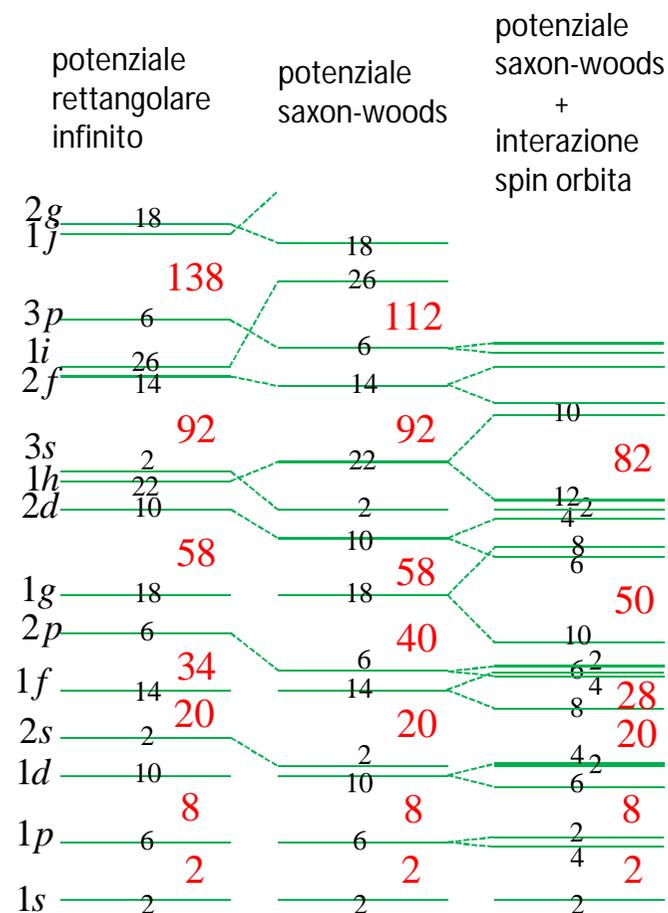
L'espressione ottenuta indica che gli stati quantici che prima avevano un solo possibile valore della energia ora, a causa del potenziale spin-orbita, ne hanno due.

I singoli livelli energetici si sono divisi in coppie di livelli con la seguente separazione energetica

$$\Delta \langle V_{Forte} \rangle = \beta \left(l + \frac{1}{2} \right) \hbar^2$$

ovvero con una separazione energetica crescente con il momento angolare orbitale dello stato quantomeccanico. Ripensando al procedimento seguito dovrebbe essere chiaro che **tale separazione in coppie di livelli non interessa gli stati quantomeccanici con l=0**. Infatti, nel caso in cui l=0 la regola di somma (15a) fornisce un unico valore j=1/2 (j deve sempre essere positivo) il che vincola anche il valore di aspettazione (15b) ad assumere un solo valore e con esso anche il potenziale che manterrà un solo livello.

Lo schema dei livelli energetici previsti dal potenziale di Saxon-Woods viene allora modificato nel modo indicato in figura. Si noterà allora che i livelli energetici con l=0, ovvero i livelli s, non vengono separati mentre gli altri livelli vengono divisi con una separazione crescente con il momento angolare dello stato. Ciò determina un riarrangiamento complessivo dei livelli in diverse bande separate da un rilevante intervallo energetico (per quanto riguarda il problematico numero magico 28 cui abbiamo accennato in precedenza, si può notare che il livello 1f portatore di 14 nucleoni si separa in due in due livelli: uno superiore con 6 nucleoni ed una inferiore con 8 nucleoni che, sommati ai 20, fornisce proprio il valore 28). Il conteggio del numero di nucleoni in ciascuna banda fornisce le configurazioni particolarmente stabili che risultano in accordo con i valori sperimentalmente osservati.



3. Fisica delle Particelle

Cos'è il modello standard

La gran parte dei fatti sperimentali scoperti fino ad oggi sui costituenti ultimi della realtà fisica, le **particelle elementari** e le loro **interazioni**, sono descritti da un corpo di teorie che vanno a costituire una 'summa' indicata con il nome un poco anonimo di **Modello Standard** (Standard Model, SM).

Si ritiene che lo SM definisca un quadro di riferimento **stabile** ma **superabile** nel senso che potrà richiedere integrazioni ed ampliamenti ma non essere sovvertito. Nel linguaggio della **teoria dei campi quantizzati** (Quantum Field Theory, QFT, la teoria adeguata alla descrizione dei fenomeni relativistici e quantistici) esso precisa sia le particelle che le interazioni che stanno a fondamento di tutti gli enti fisici fino ad oggi noti. In questo senso è una nuova **teoria del tutto** (come altre ve ne sono state nella fisica. A fine '800 la teoria del tutto si scriveva in una pagina: equazioni meccaniche di Newton, gravitazione newtoniana, equazioni dell'elettromagnetismo di Maxwell, una certa confusione sui componenti basilari della materia).

Mentre il quadro delle particelle elementari è abbastanza in linea con le attuali conoscenze sperimentali (a questo riguardo vanno però ricordati gli interrogativi posti dalla massa ed energia oscura), quello delle interazioni è palesemente incompleto. Infatti delle quattro interazioni sperimentalmente note - **gravitazionale, debole, elettromagnetica e forte** – solo tre sono state descritte per mezzo di una teoria di campo quantizzato: le interazioni debole ed elettromagnetica nella **Teoria Elettrodebole** e l'interazione forte nella **Cromodinamica Quantistica**. La gravità ancora resiste e, con tutta probabilità, richiederà un nuovo tipo di descrizione (è questa incompletezza che rende lo SM del tutto inadeguato alla descrizione dei fenomeni alla scala di Planck $E \sim 10^{19}$ GeV che sebbene distantissimi dalla fisica degli acceleratori interessa invece la cosmologia).

La relazione tra lo SM e la ricerca nel campo della fisica delle particelle è oggi in una posizione singolare. Da un lato si stanno risolvendo gli ultimi problemi ancora aperti dello SM mentre dall'altro ci si dispone ad indagare ciò che lo SM non descrive. Questa particolare situazione storica giustifica la tendenza, oggi assai diffusa, di ripartire l'attività di ricerca sia sperimentale che teorica nelle due aree della **fisica del Modello Standard** e della **fisica oltre il Modello Standard**.

Per apprendere a fondo i contenuti del modello standard sarebbe necessario studiare, almeno nelle sue linee essenziali, il percorso sperimentale, teorico ed anche tecnologico che ha condotto alla sintesi finale in modo da porre le idee più importanti nel giusto risalto. Questa impostazione richiederebbe però molto più tempo e può essere seguita in misura molto limitata in un corso istituzionale di livello introduttivo tuttavia non rinunceremo a qualche accenno storico.

Il linguaggio del Modello Standard

	<p>Ogni teoria fisica si esprime nel contesto di un preciso apparato concettuale e formale: il moto dei corpi materiali macroscopici ($r \gg 10^{-8} \text{cm}$) a bassa velocità ($v \ll c$) in quello della meccanica newtoniana; il moto dei corpi materiali microscopici ($r < 10^{-8} \text{cm}$) a bassa velocità ($v \ll c$) in quello della meccanica quantistica; il moto dei corpi macroscopici ($r \gg 10^{-8} \text{cm}$) ad alta velocità ($v \sim c$) in quello della relatività; infine il moto dei corpi microscopici ($r < 10^{-8} \text{cm}$) ad alta velocità ($v \sim c$) in quello della teoria dei campi quantistici (QFT), sintesi della teoria della relatività e della meccanica quantistica, in essa trovano il loro corretto significato i concetti di particella elementare ed interazione tra particelle sui quali si fonda la descrizione della realtà in fisica fondamentale.</p>
il concetto di campo e la relazione campo-particella	<p>Premesso che ripareremo delle QFT più avanti, in prima approssimazione possono essere pensate come una sintesi delle teorie di campo classico con la meccanica quantistica. Come nel caso classico, al livello fondamentale si pone il concetto di campo, un ente fisico definito su di una porzione più o meno vasta di spazio, variabile con il tempo e soggetto ad una sua dinamica, descritto da una ampiezza funzione della posizione e del tempo. L'analisi dettagliata dei fenomeni microscopici (si ricordi il problema del corpo nero prima, e gli effetti fotoelettrico e Compton poi) mostra che <i>l'energia, l'impulso, il momento angolare ed ogni altra grandezza dinamica che il campo possiede (ovvero che risiede nei suoi modi normali) o scambia (ovvero che cede ai modi normali di altri campi) non variano in modo continuo ma discreto</i>. Tali porzioni discrete e non divisibili, in un certo senso 'atomi' del campo, sono dette quanti e possiedono frazioni di energia ed impulso calcolabili attraverso le relazioni di Einstein De-Broglie $E = \hbar\omega$, $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ dove $\hbar = 1.05 \times 10^{-34} \text{Js}$ (ad esempio, nel caso del campo elettromagnetico tali quanti sono detti fotoni).</p> <p>E' importante sottolineare che le QFT portano inevitabilmente a concludere che tale punto di vista debba estendersi anche alla materia. Ciò significa che deve ad esempio esistere un campo elettronico i cui quanti vanno identificati con gli elettroni osservati.</p> <p>Secondo questo punto di vista, quei 'segnali' registrati dai rivelatori che noi chiamiamo particelle altro non sono che <i>i quanti dei campi materiali e dei campi di forza per cui si comprende che le particelle perdono il loro carattere fondamentale</i> riducendosi a semplici manifestazioni del campo.</p>
l'accoppiamento tra campi	<p>Per quale motivo un campo A modifica il proprio stato? Per un solo motivo, a causa dell'accoppiamento, descritto da un parametro detto carica, con un altro campo B che occupa la stessa porzione di spazio. L'idea è che, in un certo punto dello spazio, esista una probabilità definita (sostanzialmente descritta dalla carica) che i due campi si scambino un quanto di energia, impulso etc. etc. attraverso un processo di natura statistica che rispetta le leggi generali di conservazione della carica, energia, impulso etc. etc. Dunque l'accoppiamento tra i campi A e B si manifesta attraverso lo scambio di uno o più quanti.</p> <p>Nel momento in cui si cerca di collocare in questo schema un qualunque processo reale sorge però un delicato problema!</p>

**il problema della
conservazione della
energia e dell'impulso
per campi accoppiati**

Per vederlo immaginiamo che un elettrone viaggi nello spazio interagendo con un campo elettromagnetico. Nello schema suddetto dovremmo allora dire che: i) esistono un campo elettronico ed un campo elettromagnetico accoppiati dalla carica elettrica dell'elettrone; ii) il campo elettronico non è vuoto ma eccitato con un quanto (l'elettrone che viaggia prima della interazione); iii) in un certo punto il campo elettronico cede (o acquisisce) un quanto al (dal) campo elettromagnetico; iv) nel campo elettronico continua ad essersi un quanto (l'elettrone che viaggia dopo la interazione). E' facile mostrare che un simile processo **viola la conservazione della energia e dell'impulso** poiché non è possibile che un elettrone irradia o assorba qualcosa rimanendo un elettrone (ritorneremo su questo punto con maggior dettaglio).

Voi potreste osservare che la stessa difficoltà si pone indipendentemente dalla quantizzazione del campo e dunque anche nell'elettromagnetismo classico. Avete ragione! Ma non dovete dimenticare che classicamente la carica irradia il campo in modo continuo per cui la violazione delle leggi di conservazione è sempre 'infinitesima' e dunque il processo di irradiazione può alla fine avvenire. Il problema sorge invece con i campi quantizzati poiché, nello scambio di un quanto, la violazione delle leggi di conservazione non è infinitesima ma finita, per cui il processo viene *inibito* dalle leggi di conservazione.

**il ruolo del principio di
indeterminazione**

Se i fatti fossero solo questi, dovremmo concludere che il modello di accoppiamento tra campi capace di spiegare i fenomeni classici deve essere rigettato nel caso dei fenomeni quantistici poiché incapace di rendere conto degli scambi di energia che pure esistono e vengono osservati. A questo punto la meccanica quantistica interviene in modo risolutivo poiché decreta che a causa delle *fluttuazioni quantistiche*, entro intervalli spaziali e temporali definiti e stimabili, ad esempio, attraverso il principio di indeterminazione (torneremo su questo punto), sono possibili violazioni nella conservazione della energia e dell'impulso.

Tornando al nostro esempio, possiamo allora pensare che lo scambio di quanti tra il campo elettronico e quello elettromagnetico (che è causato dalla carica elettrica) non sia inibito in assoluto ma piuttosto possa avvenire entro gli intervalli spaziali e temporali stabiliti dal principio di indeterminazione. Dunque, col campo elettromagnetico, possono essere scambiati quanti la cui esistenza è transitoria e soggetta alle restrizioni del principio di indeterminazione.

**quanti virtuali e
quanti reali**

I quanti di un campo che si trovano in questo **stato transitorio la cui esistenza è limitata dal principio di indeterminazione** prendono il nome di **quanti virtuali**. Tornando all'esempio, notiamo che l'esistenza dell'elettrone, invece, non è soggetta ad alcuna restrizione di natura spaziale o temporale per cui l'elettrone esiste nel senso cui solitamente attribuiamo a questa parola. I quanti di un campo che si trovano in uno stato che può esistere senza alcuna limitazione prendono invece il nome di **quanti reali**.

**il problema della
emissione di quanti
virtuali**

Il concetto di quanto virtuale risolve il problema degli scambi tra campi in ambito quantistico ma ne apre un altro ancor più delicato. Infatti, dovrebbe essere chiaro che mentre l'emissione di quanti reali è inibita dalle leggi di conservazione, nulla può impedire ad un campo carico, anche isolato, di emettere quanti virtuali per cui si deve concludere che secondo la teoria dei campi quantizzati la **l'emissione di quanti virtuali da parte di un campo carico è un processo continuo ed inarrestabile**. Che fine fanno questi quanti virtuali con lo spazio ed il tempo contati?

particelle isolate

Tornando all'esempio, se nei paraggi dell'elettrone non c'è nulla tale quanto deve per forza essere riassorbito dall'elettrone emittente, un fatto che ci costringe ad ammettere che un semplice elettrone isolato emette e riassorbe continuamente quanti virtuali del campo elettromagnetico con cui è accoppiato. Si capisce bene che tale fatto deve essere vero per qualunque tipo di interazione per cui una **particella isolata è un qualcosa che comprende tutti i processi di emissione e riassorbimento dei quanti virtuali dei campi con cui è accoppiata ovvero delle interazioni cui è soggetta!**

particelle interagenti

Se invece nei paraggi dell'elettrone vi è un secondo elettrone ad esempio (ciò significa che il campo elettronico anziché essere eccitato con un solo quanto è eccitato con due quanti) il quanto virtuale potrebbe essere assorbito da questo secondo elettrone che riceverebbe le frazioni di energia, quantità di moto, etc. etc. che il primo elettrone vi aveva immesso realizzando in questo modo ciò che chiamiamo interazione tra i due elettroni. Abbiamo allora un meccanismo del tutto generale secondo il quale **l'interazione tra particelle (quanti reali del campo A) è l'effetto dello scambio di quanti virtuali del campo B cui sono accoppiate**.

A tutt'oggi questo è il modello di interazione più avanzato che la fisica possiede! Storicamente tutto ciò (e molte altre cose di cui parleremo più avanti) si chiarì con la formulazione della QED sul finire degli anni '40 da parte soprattutto di Feynman, Schwinger, Tomonaga e Dyson.

le teorie di gauge

Questo meccanismo di base, sufficiente per accogliere la fenomenologia delle interazioni elettromagnetiche, non riusciva però a descrivere tutte le proprietà delle forze deboli e forti quali si vennero manifestando (ed alle quali accenneremo in seguito). Il passo decisivo fu compiuto - ma lo si capì solo 10 anni dopo - da Yang e Mills nel 1954 quando proposero una estensione della QED basata sulla estensione del concetto di carica elettrica. Furono introdotte in questo modo le cosiddette **teorie di campo quantizzato di Yang e Mills o teorie di gauge**, una classe di teorie sufficientemente ampia da descrivere, ad eccezione della gravitazione, tutte le forze naturali note.

All'interno dell'elettromagnetismo classico vi è una simmetria che rimane valida anche nel caso quantistico. Si tratta della simmetria rispetto a trasformazioni di gauge la quale, rovesciando l'intera logica, può essere assunta come punto di partenza per costruire l'elettromagnetismo. In questo modo, una teoria dinamica può essere dedotta a partire da un principio di simmetria, una impostazione assai vantaggiosa soprattutto se si è interessati ad estendere o generalizzare la teoria.

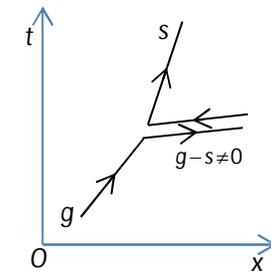
gli stati interni di carica delle particelle

In effetti è stata proprio una estensione del concetto di trasformazione di gauge che ha permesso a Yang e Mills di costruire teorie dinamicamente consistenti che generalizzano l'elettromagnetismo. Non potendo seguire questa strada ci accontenteremo di capire qualcosa per mezzo di un approccio più diretto ponendo la seguente domanda.

E' possibile costruire una teoria che abbia la stessa struttura dell'elettromagnetismo, dunque con una carica elettrica conservata, dove i campi gioco anziché essere elettricamente neutri siano elettricamente carichi?

Proviamo ancora una volta a pensare ad un elettrone che irradia un campo elettromagnetico (processo classico) o quanti del campo elettromagnetico (processo quantistico). Dato che: i) l'elettrone iniziale (prima dell'irradiazione) e finale (dopo la irradiazione) devono avere la stessa carica elettrica; ii) la carica elettrica si conserva; ne consegue che il campo irradiato ed i suoi quanti devono per forza essere privi di carica elettrica ovvero neutri. Non sembrano esserci possibilità di aggirare questo fatto a meno che non si ammetta che la particella irradiante possa esistere in **due diversi stati di carica** che possiamo chiamare giù (g) e su (s) sempre soggette a regole di conservazione. Infatti, in questo modo, l'irradiazione potrebbe portare la carica da (g) ad (s) irradiando un quanto che preleva (g) e porta (s) (le cariche sono conservate) che è carico se (g) ed (s) sono diverse.

La cosa potrebbe funzionare, ma cosa significa che la particella esiste in due stati di carica? Significa che non è più sufficiente, come nel caso dell'elettromagnetismo, il semplice numero +1 (in unità di carica dell'elettrone) per definire la carica della particella ma sono necessari due diversi numeri: +1 per la carica su e +1 per la carica giù. In termini algebrici si passa dai numeri o scalari nello spazio delle cariche a vettori a due componenti nello spazio delle cariche i quali, come sempre in meccanica quantistica, dovranno essere pensati in campo complesso. Dunque, la strada per ottenere teorie con campi carichi sembra essere quella di estendere il concetto di carica introducendo l'inedito concetto di **stati di carica di una particella disposti nelle componenti di un vettore complesso di N componenti nello spazio delle cariche.**



alcune considerazioni formali

In accordo con i principi generali della meccanica **quantistica ciò che è osservabile non è la funzione d'onda ma il suo modulo quadrato**. Ciò comporta che la moltiplicazione della funzione d'onda per un numero a tale che $|a|^2 = 1$ non può produrre alcun effetto fisico per cui la teoria deve essere simmetrica rispetto alla moltiplicazione della funzione d'onda per numeri complessi di modulo unitario. La descrizione degli stati di carica con un vettore complesso di N complica un poco l'espressione di questa proprietà della meccanica quantistica. Infatti, ora le funzioni d'onda possiedono una struttura vettoriale nello spazio N dimensionale delle cariche per cui la trasformazione non è più una rimoltiplicazione per un numero complesso a bensì una trasformazione lineare T di un vettore di N componenti nello spazio complesso della cariche. Poiché l'osservabile è il modulo quadrato della funzione d'onda, dovremo richiedere che le trasformazioni che lo lasciano inalterato non possano avere alcun effetto fisico per cui $\vec{\psi}' \cdot \vec{\psi}' = T^* \vec{\psi}^* T \vec{\psi} = \vec{\psi}^* T^+ T \vec{\psi} = \vec{\psi}^* \vec{\psi}$ se $T^+ T = I$. Ciò significa che **la teoria deve essere simmetrica rispetto al gruppo di trasformazioni unitarie ed unimodulari nello spazio complesso delle cariche a d N dimensioni** (la unimodularità assicura l'inclusione nel gruppo della trasformazione identità), un gruppo di trasformazioni indicato con la sigla **$SU(N)$** . Il punto importante è che questo requisito di simmetria, che si origina dai principi generali della meccanica quantistica può essere 'esteso' in modo tale da stabilire praticamente senza ambiguità la struttura dinamica dell'intera teoria di gauge (tecnicamente si passa da una trasformazione indipendente dalla posizione, detta *trasformazione di gauge globale*, ad una trasformazione dipendente dalla posizione, detta *trasformazione di gauge locale*), per cui, assai spesso, si nomina la particolare teoria di gauge facendo riferimento proprio al gruppo di trasformazioni unitarie e unimodulari che vengono utilizzate per costruirla.

Ad esempio la teoria quantistica dell'**interazione elettromagnetica** (elettrodinamica quantistica, QED) richiede *un solo stato di carica* per i campi materiali (la ordinaria carica elettrica dell'elettromagnetismo classico) per cui la teoria viene costruita sul **gruppo di simmetria $SU(1)=U(1)$** .

La teoria quantistica della **interazione debole**, invece, richiede due stati di carica per i campi materiali (carica di isospin debole) per cui la teoria viene costruita sul **gruppo di simmetria $SU(2)$** (oggi si dispone di una teoria unificata delle interazioni elettromagnetiche e deboli costruita sul gruppo di simmetria $U(1) \times SU(2)$ detta teoria elettrodebole).

Infine la teoria quantistica della **interazione forte**, infine, richiede tre stati di carica per i campi materiali (carica di colore) per cui la teoria quantistica (cromodinamica quantistica, QCD) viene costruita sul **gruppo di simmetria $SU(3)$** .

campi di forza carichi

Con tutta evidenza, in una teoria dove le particelle possiedono più stati di carica anche i campi devono possedere più stati di carica. Tornando al caso delle due cariche (s) e (g) abbiamo un campo di carica (g-s) quando una carica (g) si trasforma in (s), una carica (s-g) quando una carica (s) si trasforma in (g), una carica nulla quando (s) si trasforma in (s) ed una carica nulla quando (g) si trasforma in (g).

Dunque, due campi carichi e due campi neutri. E' facile capire che nel caso di N stati di carica differenti avremo N^2 campi di cui N neutri e (N^2-N) carichi. Imponendo al processo di irradiazione altre condizioni richieste dai dati sperimentali che per ora non discutiamo, si trova che uno dei campi neutri va eliminato per cui **una teoria di gauge con N stati di carica, ammette N^2-1 campi di gauge con diversi stati di carica di cui (N^2-N) carichi ed N-1 neutri.**

Ad esempio **l'elettrodinamica quantistica** è costruita sul gruppo di simmetria **$SU(1)=U(1)$** e prevede **un solo campo di gauge privo di carica**, quello elettromagnetico appunto. **L'interazione debole**, invece, costruita sul gruppo di simmetria **$SU(2)$** , prevede **tre campi di gauge, due carichi ed uno neutro** (dunque la teoria elettrodebole, la teoria unificata delle interazioni elettromagnetiche e deboli costruita sul gruppo di simmetria $U(1)\times SU(2)$, prevede quattro campi di gauge, due neutri e due carichi). L'interazione forte, infine, costruita sul gruppo di simmetria **$SU(3)$** , prevede **otto campi di gauge, sei carichi e due neutri.**

le proprietà dei campi di gauge

Come accennato, le teorie di gauge estendono il concetto di carica dell'elettromagnetismo portando alla introduzione di famiglie di campi di forza carichi e neutri in luogo del semplice ed unico campo di forza neutro dell'elettromagnetismo. A parte questo, è bene precisare, **le proprietà cinematiche** dei campi di gauge sono esattamente le stesse del campo elettromagnetico. Ciò significa che anche i campi di gauge si propagano **con velocità c** per cui i loro quanti **non possiedono massa a riposo** (come i fotoni) e danno luogo ad una interazione statica a **lungo raggio** la cui **intensità decresce con la legge $1/r^2$** (la grande differenza risiede nelle *proprietà dinamiche* poichè la proprietà dei campi di gauge di essere in generale carichi comporta che *possano interagire tra loro* dando luogo a fenomeni sconosciuti all'elettromagnetismo e capaci di spiegare le peculiarità delle interazioni deboli e forti).

il problema del raggio d'azione delle interazioni deboli e forti

Dato che era noto sin dalla loro scoperta che le interazioni deboli e forti erano a corto raggio d'azione, la natura a lungo raggio delle interazioni di gauge indusse lo stesso W. Pauli a pensare che questa famiglia di teorie, formulata da Yang e Mills nel 1954, fosse poco più di un esercizio accademico (a quel tempo la complessa fenomenologia delle interazioni forti in particolare aveva convinto molti fisici che si dovesse addirittura cambiare tipo di descrizione rinunciando alle teorie di campo quantizzato in favore degli elaborati metodi delle relazioni di dispersione e della matrice S, vedi nota storica).

**l'esempio della
superconduttività ed il
meccanismo di
Anderson**

Il superamento di questa difficoltà richiese oltre un decennio. Il suggerimento traeva la sua origine da un elusivo fenomeno della fisica della basse temperature, la **superconduttività**. Una delle caratteristiche salienti del fenomeno è che in un materiale superconduttore il campo magnetico interno è nullo (effetto Meissner) il che comporta l'impossibilità, da parte di un'onda elettromagnetica, di penetrarvi. Poiché il coefficiente di penetrazione di un'onda nel mezzo materiale è assimilabile all'inverso di una massa, in termini formali è come se i fotoni, propagandosi nel superconduttore, acquisissero una massa efficace che ne accorcia il cammino a valori piccolissimi. Sempre da un punto di vista formale tale massa efficace determina una perdita della simmetria di gauge dell'elettromagnetismo. In termini fisici, dunque, si capiva che **un mezzo materiale poteva conferire una massa efficace al fotone conferendogli un raggio d'azione finito**, fatto che poteva essere espresso formalmente affermando che **un mezzo materiale determinava una rottura o occultazione della simmetria di gauge dell'elettromagnetismo**. Un modello puramente fenomenologico di questo meccanismo, nel caso della superconduttività, fu fornito da Landau e Ginzburg nel 1950 mentre il meccanismo microscopico dettagliato fu compreso da J. Bardeen, L. Cooper e J. Schrieffer nel 1957 che misero in luce che gli elettroni, correlati da una interazione residua a formare coppie (**coppie di Cooper**), andavano a formare un 'mezzo materiale' che conferiva massa efficace alle onde elettromagnetiche (quest'ultimo fatto fu mostrato da Anderson).

**il caso delle interazioni
deboli: il meccanismo
di Higgs**

Dalla superconduttività, il meccanismo fece il suo ingresso nella fisica delle particelle attraverso i lavori di **Y. Nambu**, nel 1960, che lo utilizzò per spiegare l'origine della massa dei pioni ed alcune proprietà delle interazioni forti. Una **versione relativistica nel contesto di teorie di Yang e Mills** fu invece discussa a partire dal 1964 da **R. Brout e F. Englert, P. Higgs e G. Guralnik, C. Hagen e T. Kibble**. Essi chiarirono che, in questo caso, a seguito di un certo meccanismo oggi detto **meccanismo di Higgs** (l'unico grado di libertà di un campo scalare si combina con i due gradi di libertà di un campo vettoriale di massa nulla per fornire un campo con tre gradi di libertà ovvero di campo vettoriale massivo), **l'effetto finale della rottura della simmetria di gauge consiste nel conferire una massa non nulla i mediatori vettoriali della interazione** e, con essa, **un corto raggio alla interazione** stessa.

Curiosamente gli scopritori di questo meccanismo non pensarono di applicarlo davvero alle interazioni fondamentali allora note per cui furono S. Weinberg e A. Salam che, qualche anno dopo, lo incorporeranno nella teoria delle interazioni deboli allora disponibile sulla quale aveva lavorato, soprattutto, S. Glashow, pervenendo infine alla formulazione della teoria elettrodebole.

**l'esempio della
superconduttività ed il
meccanismo di
Anderson**

Il superamento di questa difficoltà richiese oltre un decennio. Il suggerimento trae la sua origine da un elusivo fenomeno della fisica della basse temperature, la **superconduttività**. Una delle caratteristiche salienti del fenomeno è che in un materiale superconduttore il campo magnetico interno è nullo (effetto Meissner) il che comporta l'impossibilità, da parte di un'onda elettromagnetica, di penetrarvi. Poiché il coefficiente di penetrazione di un'onda nel mezzo materiale è assimilabile all'inverso di una massa, in termini formali è come se i fotoni, propagandosi nel superconduttore, acquisissero una massa efficace che ne accorcia il cammino a valori piccolissimi. Sempre da un punto di vista formale tale massa efficace determina una perdita della simmetria di gauge dell'elettromagnetismo. In termini fisici, dunque, si capiva che **un mezzo materiale poteva conferire una massa efficace al fotone conferendogli un raggio d'azione finito**, fatto che poteva essere espresso formalmente affermando che **un mezzo materiale determinava una rottura o occultazione della simmetria di gauge dell'elettromagnetismo**. Un modello puramente fenomenologico di questo meccanismo, nel caso della superconduttività, fu fornito da Landau e Ginzburg nel 1950 mentre il meccanismo microscopico dettagliato fu compreso da J. Bardeen, L. Cooper e J. Schrieffer nel 1957 che misero in luce che gli elettroni, correlati da una interazione residua a formare coppie (**coppie di Cooper**), andavano a formare un 'mezzo materiale' che conferiva massa efficace alle onde elettromagnetiche (quest'ultimo fatto fu mostrato da Anderson).

**il caso delle interazioni
deboli: il meccanismo
di Higgs**

Dalla superconduttività, il meccanismo fece il suo ingresso nella fisica delle particelle attraverso i lavori di **Y. Nambu**, nel 1960, che lo utilizzò per spiegare l'origine della massa dei pioni ed alcune proprietà delle interazioni forti. Una **versione relativistica nel contesto di teorie di Yang e Mills** fu invece discussa a partire dal 1964 da **R. Brout e F. Englert, P. Higgs e G. Guralnik, C. Hagen e T. Kibble**. Essi chiarirono che, in questo caso, a seguito di un certo meccanismo oggi detto **meccanismo di Higgs** (l'unico grado di libertà di un campo scalare si combina con i due gradi di libertà di un campo vettoriale di massa nulla per fornire un campo con tre gradi di libertà ovvero di campo vettoriale massivo), **l'effetto finale della rottura della simmetria di gauge consiste nel conferire una massa non nulla i mediatori vettoriali della interazione** e, con essa, **un corto raggio alla interazione** stessa.

Curiosamente gli scopritori di questo meccanismo non pensarono di applicarlo davvero alle interazioni fondamentali allora note per cui furono S. Weinberg e A. Salam che, qualche anno dopo, lo incorporeranno nella teoria delle interazioni deboli allora disponibile sulla quale aveva lavorato, soprattutto, S. Glashow, pervenendo infine alla formulazione della teoria elettrodebole.

il caso delle interazioni forti

Il meccanismo appena ricordato impedisce sostanzialmente ai quanti del campo di forza (detti mediatori) di propagarsi e di formare stati legati in accordo con il fatto sperimentale che non esistono stati legati dovuti alla interazione debole. Dato però che esistono stati legati dovuti alla interazione forte (il protone ed il neutrone sono stati legati di quark fortemente interagenti) dobbiamo concludere che il corto raggio della interazione stessa deve essere dovuto ad un meccanismo di natura diversa. In effetti è così come vedremo tra non molto.

La intensità relativa delle interazioni naturali

Per effettuare questo confronto è necessario tenere conto che l'intensità delle interazione tra due particelle dipende in generale da una **costante** (G, ϵ_0, \dots , dipendente dal sistema di unità di misura adottato), da **grandezze intrinseche** (massa, carica elettrica,...) e da **grandezze cinematiche** (la distanza delle particelle nel caso statico). Mentre **la costante è fissata dalla l'interazione, le grandezze intrinseche e cinematiche sono arbitrarie e devono essere fissate nello stesso modo per tutte le interazioni che si vogliono confrontare**. Assicurata questa condizione si può esprimere l'intensità delle interazioni in una qualche scala dimensionale oppure, scelta una intensità di riferimento, in una scala adimensionale.

Per fissare allo stesso modo le quantità arbitrarie possiamo seguire un procedimento simile a quello che ci ha condotti alla definizione del sistema delle unità di misura naturali. I fenomeni che caratterizzano le particelle elementari sono al tempo stesso relativistici e quantistici e come tali descritti dalle costanti fondamentali c e \hbar . **La costante c fissa il rapporto tra le lunghezze ed i tempi caratteristici** dei processi tra particelle mentre **la costante \hbar , attraverso il principio di indeterminazione, fissa il prodotto tra le energie ed i tempi caratteristici**. In questo modo, **la scelta della energia fissa lunghezze, tempi e masse**, ed in generale, tutte le grandezze fisiche caratteristiche del processo in esame

$$1) \quad \hbar \sim E \cdot T \quad c = L / T \quad E = Mc^2 \quad \rightarrow \quad T \sim \hbar / E \quad L \sim \hbar c / E \quad M \sim E / c^2$$

Giungiamo allora alla conclusione che **i processi tra particelle sono tali per cui, fissato il valore caratteristico della energia del processo (scala energetica) risulta allora fissato anche il valore caratteristico delle lunghezze, dei tempi, delle masse e, con esse, di tutte le grandezze fisiche.**

Fatte queste premesse, possiamo costruire una **forza di riferimento** per mezzo di **considerazioni dimensionali**

$$2) \quad F_{\text{Rif}} = \frac{E}{L} = \frac{E}{\hbar c / E} = \frac{E^2}{\hbar c}$$

facendo poi il rapporto tra la forza in esame e questa forza di riferimento possiamo ottenere una **scala adimensionale delle interazioni naturali** che assume un valore definito una volta si precisata la scala energetica.

□ Interazione di Gravità

La forza statica tra due masse uguali è data dalla ben nota **legge di gravitazione** la quale, tenendo conto delle 1) , fornisce

$$3) \quad F_{\text{Grav}} = G_N \frac{M^2}{L^2} = G_N \frac{(E/c^2)^2}{(\hbar c/E)^2} = \frac{G_N E^4}{\hbar^2 c^6}$$

Ora eseguendo il rapporto con la 2) otteniamo una stima della l'intensità della interazione gravitazionale in una scala adimensionale

$$\alpha_{\text{Grav}} = \frac{F_{\text{Grav}}}{F_{\text{Rif}}} = \frac{G E^4}{\hbar^2 c^6} \frac{\hbar c}{E^2}$$

$$4) \quad \alpha_{\text{Grav}} = \frac{G E^2}{\hbar c^5}$$

□ Interazione Elettromagnetica

La forza statica tra due cariche uguali (il cui valore tipico in fisica delle particelle vale **e**) è data dalla ben nota **legge di Coulomb** la quale, tenendo conto delle 1) , fornisce

$$5) \quad F_{\text{Elettr}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{L^2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(\hbar c/E)^2} = \frac{(e^2/4\pi\epsilon_0) E^2}{\hbar^2 c^2}$$

Ora eseguendo il rapporto con la 2) otteniamo un **numero adimensionale**, noto con il nome di **costante di struttura fina**, che esprime l'intensità della forza elettrica

$$\alpha_{\text{Elettr}} = \frac{F_{\text{Elettr}}}{F_{\text{Rif}}} = \frac{(e^2/4\pi\epsilon_0) E^2}{\hbar^2 c^2} \frac{\hbar c}{E^2}$$

$$6) \quad \alpha_{\text{Elettr}} = \frac{(e^2/4\pi\epsilon_0)}{\hbar c}$$

□ Interazione Debole

In questo caso non disponiamo di una espressione della forza statica ma sappiamo che i processi deboli sono governati dalla **Costante di Fermi** $G_F=1.46 \times 10^{-62} \text{J m}^3$. Si può ottenere una stima adimensionale della intensità della interazione debole confrontando la costante di Fermi con le scale caratteristiche della energie e delle lunghezze **E** ed **L**

$$\alpha_{\text{Deb}} = \frac{G_F}{EL^3} = \frac{G_F}{E(\hbar c/E)^3}$$

$$7) \quad \alpha_{\text{Deb}} = \frac{G_F E^2}{\hbar^3 c^3}$$

□ Interazione forte

Possiamo valutare l'intensità della interazione forte partendo da due sue proprietà note: gli ordini di grandezza del raggio della interazione $L_0=10^{-15} \text{m}$ e della massa di un suo tipico stato legato $M_0=1.7 \times 10^{-27} \text{Kg}$ (il protone). Per ottenere poi una stima della intensità della interazione in una scala adimensionale possiamo confrontare queste grandezze con le corrispondenti scale caratteristiche delle lunghezze e delle masse **L** ed **M**

$$\alpha_{\text{Forte}} = \frac{M_0}{M} = \frac{M_0}{E/c^2} = \frac{M_0 c^2}{E}$$

$$\alpha_{\text{Forte}} = \frac{L_0}{L} = \frac{L_0}{\hbar c/E} = \frac{L_0 E}{\hbar c}$$

$$\alpha_{\text{Forte}}^2 = \frac{M_0 c^2}{E} \frac{L_0 E}{\hbar c} = \frac{M_0 L_0 c}{\hbar}$$

da cui

$$8) \quad \alpha_{\text{Forte}} = \sqrt{\frac{M_0 L_0 c}{\hbar}}$$

Le stime della intensità delle interazioni in una scala adimensionale dipendono dalla scala energetica E . Tale scala è stata in realtà fissata nel caso delle interazioni forti al valore della la massa del protone per cui assumeremo in tutti i casi $E=M_0c^2$. Otteniamo allora i seguenti valori numerici

$$\alpha_{\text{Grav}} = \frac{G_N E^2}{\hbar c^5} = \frac{GM_0^2}{\hbar c} = \frac{6,67 \times 10^{-11} \times (1.67 \times 10^{-27})^2}{1.05 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8} \approx 6 \times 10^{-39}$$

$$\alpha_{\text{Deb}} = \frac{G_F E^2}{\hbar^3 c^3} = \frac{G_F M_0^2 c}{\hbar^3} = \frac{1.46 \times 10^{-62} \times (1.67 \times 10^{-27})^2 \times 3 \times 10^8}{(1.05 \times 10^{-34})^3} \approx 10^{-5}$$

$$\alpha_{\text{Elettr}} = \frac{(e^2 / 4\pi\epsilon_0)}{\hbar c} = \frac{(1.60 \times 10^{-19})^2}{4\pi \times 8.85 \times 10^{-12} \times 1.05 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8} = \frac{1}{137.036} \approx 7.3 \times 10^{-3}$$

$$\alpha_{\text{Forte}} = \sqrt{\frac{M_0 L_0 c}{\hbar}} = \sqrt{\frac{1.67 \times 10^{-27} \times 10^{-15} \times 3 \times 10^8}{1.05 \times 10^{-34}}} \approx 2$$

i quali mostrano che **in una scala adimensionale dove l'intensità delle interazioni forti è ~ 1, l'intensità della interazione elettromagnetica è ~ 10⁻², l'interazione debole ~ 10⁻⁵ e l'interazione gravitazionale ~ 10⁻³⁸.**

Uno sguardo al Modello Standard

le dodici particelle materiali

Le prime particelle ad essere scoperte furono, ovviamente, i costituenti degli atomi della *materia ordinaria*: **l'elettrone, il neutrone ed il protone**. Mentre **l'elettrone (e)** ha fino ad oggi mantenuto il suo 'status' di *particella elementare*, la formulazione del *modello a quark* a metà degli anni '60 da parte di M. Gell-Mann e G. Zweig ha chiarito che protoni e neutroni sono invece stati legati di tre particelle dette **quark** (che attualmente si ritiene siano elementari) di due differenti 'tipi' detti **quark up (u)** e **quark down (d)**. Le ricerche, prima con i raggi cosmici e poi, soprattutto, con macchine acceleratrici di energia via via crescente, hanno condotto alla scoperta di nuove particelle elementari, alcune con proprietà simili all'elettrone, altre ai quark, ma tutte escluse dalla costituzione della materia ordinaria (la particelle costituenti la materia ordinaria sono indicate in rosso). Oggi la lista prevede **dodici particelle elementari, sei del 'tipo' elettrone** osservabili come **particelle libere** e **sei del 'tipo' quark** osservabili solo **all'interno di stati legati**. Quasi tutte **instabili**, queste particelle possiedono **spin $s=1/2$** (dunque con proprietà collettive governate dalla **statistica di Fermi-Dirac**) e certe determinate **masse** di cui parleremo tra poco

particelle materiali											
ν_e	ν_μ	ν_τ	e	μ	τ	u	d	c	s	t	b

Premesso che forniremo altre proprietà nel seguito, l'insieme delle particelle elementari è formato da tre diversi 'tipi' di neutrini, detti *neutrino elettronico, neutrino muonico e neutrino tauonico* (tutti sostanzialmente stabili); **l'elettrone** (stabile), il **muone** (instabile) ed il **tau** (instabile), che hanno proprietà simili ma masse assai differenti; poi sei 'tipi' di quark detti *up, down, charm, strange, top e bottom* (instabili ad eccezione dei primi due).

le dodici antiparticelle materiali

La scoperta delle nuove particelle elementari è proceduta di pari passo con la scoperta di corrispondenti antiparticelle elementari, aventi **spin e masse uguali a quelle delle rispettive particelle, ma differenti da queste per certe proprietà interne** (di cui diremo tra poco). La replicazione delle particelle in corrispondenti antiparticelle è risultata in pieno accordo con le previsioni delle teorie di campo quantizzato. La lista prevede allora anche **dodici antiparticelle elementari** con proprietà speculari a quelle delle particelle

antiparticelle materiali											
$\bar{\nu}_e$	$\bar{\nu}_\mu$	$\bar{\nu}_\tau$	\bar{e}	$\bar{\mu}$	$\bar{\tau}$	\bar{u}	\bar{d}	\bar{c}	\bar{s}	\bar{t}	\bar{b}

le masse delle particelle ed antiparticelle

Le **masse** coprono un intervallo di valori enorme che si estende attraverso 11 ordini di grandezza: dai neutrini con masse dell'ordine dell'eV, fino al quark top con una massa di ben 180 GeV. Il modello standard assume le masse delle particelle elementari come parametri esterni e non è in grado di fornire alcuna spiegazione di una tale dispersione dei loro valori. Nella tabella sono riportati i valori delle masse delle particelle/antiparticelle elementari osservate libere, ad eccezione dei quark dei quali riportiamo le cosiddette **masse costituenti**, vale a dire le masse con cui partecipano alla formazione degli stati legati che comprendono anche l'inerzia dovuta alle interazioni forti.

le masse di particelle ed antiparticelle (MeV)											
ν_e	ν_μ	ν_τ	e	μ	τ	u	d	c	s	t	b
$<2 \times 10^{-6}$	<0.19	<18.2	0.51	106	1770	350	350	1500	500	180000	4500

i numeri quantici di sapore

Dobbiamo ora precisare meglio cosa si intenda con 'tipo' di particella. A questo proposito si deve sottolineare che, a differenza degli oggetti macroscopici, non abbiamo alcuna percezione diretta delle particelle elementari: le loro proprietà sono sempre relative ai processi cui prendono parte che sono ciò che effettivamente osserviamo e misuriamo. Data questa situazione si può operare solo una **classificazione di natura dinamica**, ovvero fondata sui processi stessi per cui due particelle sono dello stesso 'tipo' se danno luogo agli stessi processi mentre sono di 'tipo' diverso in caso contrario.

Nello SM i diversi 'tipi' di particelle ed antiparticelle sono descritti per mezzo di opportuni *numeri quantici interni* (ovvero di natura non cinematica) detti **numeri quantici di sapore** (*flavour quantum numbers*). E' bene precisare che la differenza tra i diversi sapori va oltre la semplice differenza delle masse, i sapori stabiliscono in certo senso la diversa **identità delle particelle**, una identità fondata sul fatto che sapori diversi danno luogo a processi diversi e distinguibili tra loro.

Per ora possiamo identificare tali numeri quantici semplicemente con i nomi che abbiamo associato alle diverse particelle tuttavia è chiaro che non possono che essere le interazioni a suggerire le assegnazioni più razionali. Come vedremo, i fatti sperimentali e la teoria mostrano che i numeri quantici di sapore sono soggetti al **fenomeno quantomeccanico della sovrapposizione** (miscelamento del sapore) ed intervengono nelle diverse interazioni tra particelle come 'contabili' spesso per mezzo di semplici **regole di somma** (sulla base di tali regole si deduce che alle antiparticelle conviene attribuire numeri quantici di sapore opposti a quelli delle particelle).

le interazioni del modello standard

Le interazioni tra particelle rappresentano la parte più complessa ed articolata dello SM il quale, nel suo attuale assetto, comprende la descrizione teorica di tre delle quattro interazioni naturali fino ad oggi note: **l'interazione debole, l'interazione elettromagnetica e l'interazione forte** (come già ricordato risulta esclusa l'interazione gravitazionale). E' della massima importanza il fatto che tali interazioni siano tutte descritte nel contesto di uno stesso linguaggio, quello delle **teorie di campo quantizzato** nella forma specifica di **teorie di gauge**.

Si assume allora che le particelle di diverso sapore possiedano anche proprie **cariche di gauge** che determinano l'accoppiamento dei loro campi con famiglie di **campi di gauge** i quali, attraverso i meccanismi richiamati nel precedente paragrafo, causano la loro mutua interazione. Ovviamente l'assegnazione delle cariche di gauge ai diversi sapori non può che essere dettata dai fatti sperimentali. Da quanto detto appare chiaro che le cariche di gauge non possono essere confuse con i numeri quantici di sapore poiché le prime hanno un significato dinamico, descrivendo un accoppiamento tra campi diversi, mentre i secondi descrivono solo la diversa identità delle particelle.

le interazioni forti

I fatti sperimentali mostrano che le **interazioni forti**, le forze più intense esistenti in natura, interessano solo i sei quark ed i sei antiquark per cui concludiamo che solo questi possiedano le cariche di gauge proprie di questa interazione. Questo fatto determina l'ovvia ripartizione delle particelle elementari nelle due grandi famiglie dei **leptoni (antileptoni)**, particelle non soggette alla interazione forte, e dei **quark (antiquark)**, particelle soggette alla interazione forte.

leptoni						quark					
ν_e	ν_μ	ν_τ	e	μ	τ	u	d	c	s	t	b

la cromodinamica quantistica

Un certo numero di fatti sperimentali porta alla conclusione che ciascun sapore di quark o antiquark sia portatore di **tre differenti cariche di gauge** dette **cariche di colore** elevando quindi il numero di differenti quark al valore $6 \times 3 + 6 \times 3 = 36!$ Le cariche di colore accoppiano i campi di quark ed antiquark a **otto campi di gauge** ($N^2-1=9-1=8$) detti **campi gluonici**, portatori loro stessi di carica di colore e quindi autointeragenti. La teoria di campo quantizzato costruita per mezzo della invarianza di gauge rispetto al gruppo di trasformazioni SU(3) di colore prende il nome **cromodinamica quantistica** (QCD, vedi nota storica).

il confinamento ed il corto raggio della interazione forte

Gli esperimenti fino ad oggi noti indicano la non esistenza di quark liberi che invece sono stati osservati sempre e solamente all'interno di stati legati, un fatto noto con il nome di '**confinamento**'. Nonostante alcune indicazioni in tal senso, a causa delle difficoltà di calcolo una prova rigorosa che la QCD conduca al confinamento dei quark non è ancora stata ottenuta.

interazioni elettromagnetiche

Dato che **gli stati legati di quark e/o antiquark osservati sperimentalmente hanno carica di colore complessivamente nulla**, si tende ad utilizzare questo fatto come **principio guida** nella costruzione dei possibili stati legati della teoria (un po' come si dicesse che in elettromagnetismo gli unici stati legati possibili sono quelli con una carica elettrica totale nulla). In questo modo si può mostrare che gli stati legati di quark, genericamente chiamati **adroni**, possono essere formati da una coppia *quark-antiquark*, in tal caso si parla di **mesoni**, o da una tripletta *quark-quark-quark* e *antiquark-antiquark-antiquark*, in tal caso si parla di **barioni** (come il neutrone o il protone) ed **antibarioni** rispettivamente. Sulla base di questa regola, però, dovrebbero esistere anche quaterne *quark-antiquark-quark-antiquark* e composti di quark ancor più complessi di cui però non si ha una chiara evidenza sperimentale.

La neutralità della carica di colore degli adroni determina un andamento multipolare della interazione forte all'esterno degli stessi e con esso il rapido decadimento con la distanza in accordo con il suo carattere a **corto raggio d'azione** ben noto dalla fisica nucleare.

Come nell'elettromagnetismo classico, le **interazioni elettromagnetiche** interessano le particelle ed antiparticelle dotate di carica elettrica: e , μ , τ (carica -1); anti e , anti μ , anti τ , (+1); quark uplike (+2/3); quark downlike (-1/3); antiquark quark uplike (-2/3); antiquark downlike (-1/3). La carica elettrica riveste il ruolo di carica di gauge per cui, sulla base di quanto detto in precedenza, una carica elettrica si accoppia ad un unico campo di gauge, il ben noto campo elettromagnetico. La teoria di campo quantizzato costruita per mezzo della invarianza di gauge rispetto al gruppo di trasformazioni U(1) di colore prende il nome **elettrodinamica quantistica** (QED, vedi nota storica).

Le interazioni deboli

Al contrario delle interazioni forti, le **interazioni deboli sono universali** ovvero interessano tutte le particelle ed antiparticelle elementari siano esse leptoni/antileptoni o quark/antiquark.

I dati sperimentali conducono rapidamente a concludere che le particelle elementari siano pure portatrici di **due differenti cariche di gauge** della interazione debole dette **cariche di isospin debole**. A differenza delle interazioni forti, però, le due diverse cariche di gauge sono portate da particelle aventi numeri quantici di sapore differenti (ovvero particelle di diversa identità) per cui il numero complessivo di particelle questa volta non aumenta.

Utilizzando i nomi delle particelle come numeri quantici di sapore e disponendo le cariche di gauge in colonne (ordinandole come si fa di solito sulla base della carica elettrica), abbiamo la seguente ripartizione dei leptoni e dei quark in tre **famiglie** o **generazioni** (esattamente lo stesso accade per antileptoni ed antiquark) dove gli elementi corrispondenti hanno le stesse cariche di gauge. Sulla base di quanto detto in precedenza, le due cariche di gauge della interazione debole devono accoppiare i campi di quark e leptoni (antiquark e antileptoni) a **tre campi di gauge** ($N^2-1=4-1=3$).

leptoni			quark		
ν_e	ν_μ	ν_τ	<i>u</i>	<i>c</i>	<i>t</i>
<i>e</i>	<i>μ</i>	<i>τ</i>	<i>d</i>	<i>s</i>	<i>b</i>

il meccanismo di Higgs ed il cortoraggio delle interazioni deboli

In modo esattamente contrario a ciò che accade nelle interazioni forti, gli esperimenti fino ad oggi noti **indicano la non esistenza di stati legati dovuti alla interazione debole** (ad esempio non esistono stati legati di leptoni) pure caratterizzata da un corto raggio d'azione (anzi cortissimo, infatti Fermi trattò le interazioni deboli come interazioni di contatto). L'assenza di stati legati potrebbe suggerire che un qualche meccanismo impedisca ai tre campi di gauge della interazione debole di propagarsi nello spazio giustificando in questo modo anche il carattere a corto raggio della interazione. Un tale meccanismo è però assente nelle teorie di gauge le quali prevedono tutte, come si è detto, campi non massivi e quindi interazioni con raggio d'azione infinito (la via delle interazioni forti per giustificare il corto raggio delle interazioni non è praticabile perché richiede la formazione di stati legati 'neutri' qui assenti).

la teoria elettrodebole

Come accennato, il superamento di questo problema richiese un decennio e fu favorito dal contemporaneo sviluppo di un modello dettagliato della superconduttività dove la non propagazione del campo elettromagnetico all'interno di un mezzo superconduttore veniva spiegata attraverso l'acquisizione di una massa efficace da parte del campo stesso indotta dall'accoppiamento con il mezzo 'superconduttore' costituito dalle coppie di elettroni correlate tra loro (coppie di Cooper). Una versione di questo meccanismo nel contesto delle teorie di gauge fu discussa a partire dal 1964 da **R. Brout e F. Englert, P. Higgs e G. Guralnik, C. Hagen e T. Kibble** i quali chiarirono che postulando l'esistenza di un campo scalare costante e non nullo su tutto lo spazio detto campo di Higgs (i cui quanti sono le particelle di Higgs) i campi di gauge potevano acquisire una massa efficace non nulla e con essa un andamento della interazione a corto raggio (l'elaborato meccanismo dettagliato con il quale ciò avviene è detto **meccanismo di Higgs** dove l'unico grado di libertà di un campo scalare si combini con i due gradi di libertà del campo vettoriale di gauge a massa nulla per fornire un campo vettoriale con tre gradi di libertà ovvero un campo vettoriale massivo).

In questo modo, accoppiandosi con il **campo H** di Higgs, i tre succitati campi di gauge della interazione debole acquisiscono una massa e vengono solitamente indicati con i simboli W^+ , W^- e Z_0 (i quanti massivi di tali campi furono osservati per la prima volta nel 1983 da C. Rubbia). Se non fosse per la massa dei campi W^+ , W^- e Z_0 l'interazione debole avrebbe una intensità comparabile alla interazione elettromagnetica che possiede una sola carica di gauge (la ordinaria carica elettrica) capace di stabilire l'accoppiamento con un solo campo di gauge, il campo elettromagnetico indicato con il simbolo γ . Seguendo questa idea si giunse a costruire una **teoria unificata delle interazioni deboli ed elettromagnetiche** fondata su di un solo accoppiamento fondamentale (vi sono altra e più fondamentali ragioni le quali mostrano che una teoria consistente delle interazioni deboli deve comprendere anche le interazioni elettromagnetiche). La teoria di campo quantizzato che unifica le interazioni deboli ed elettromagnetiche costruita per mezzo della invarianza di gauge rispetto al gruppo di trasformazioni U(1) di ipercarica e SU(2) di isospin debole prende il nome di **teoria elettrodebole** (vedi nota storica).

Un quadro riassuntivo dei diversi campi di gauge accoppiati ai campi materiali del modello standard è mostrato nella tabella sottostante.

interazione	campi di gauge	accoppiati a	per mezzo delle
forte	$g_1 \dots g_8$	quark e antiquark	cariche di colore
elettrodebole	$W^+W^-Z_0$	tutte le particelle ed antiparticelle	cariche di isospin debole
	γ	particelle dotate di carica elettrica	carica elettrica

campo di Higgs	accoppiato a	
H	campi di gauge della interazione debole ed elettromagnetica; tutte le particelle ed antiparticelle	cariche di isospin debole (con i campi di gauge); cariche fenomenologiche di yukawa (con le particelle ed antiparticelle)

i parametri dello SM

Lo SM è in sintesi la teoria delle forze deboli elettromagnetiche e forti di 48 particelle materiali (6 leptoni, 6 antileptoni, $6 \times 3 = 18$ quark colorati, $6 \times 3 = 18$ antiquark colorati) assunte come puntiformi che si propone di spiegare una classe di fenomeni immensa: la quasi totalità dei fenomeni microscopici fondamentali. Non deve sorprendere quindi che sia piuttosto cospicuo il numero di **parametri** che è necessario immettere nella teoria per renderla predittiva. Tra questi i più semplici da comprendere sono le masse delle particelle fondamentali.

Dato che si ritiene che – fissato il tipo di quark – le masse che competono ai differenti colori siano esattamente uguali e che identiche siano pure le masse delle particelle con le corrispondenti antiparticelle, giungiamo alla conclusione devono essere definite **12 masse**.

Per quanto riguarda le interazioni abbiamo la seguente situazione. Le interazioni forti richiedono la **costante di accoppiamento α_s** (gli 8 gluoni sono assunti a massa nulla).

L'interazione elettromagnetica la **costante di accoppiamento α** nota anche come costante di struttura fina (il fotone è assunto a massa nulla). L'interazione debole, invece, richiede la **costante di accoppiamento di Fermi G_F** , la **massa del mediatore Z^0** e la **massa del bosone di Higgs**. Ricordando poi che le interazioni deboli sono 'oblique' rispetto alle generazioni di quark (matrice CKM) dobbiamo aggiungere altri **4 parametri**.

Il modello standard richiede in totale 21 parametri e con essi spiega l'immensa mole di dati raccolti in oltre 60 anni di esperimenti sulle macchine acceleratrici.

Bisogna però tenere conto che nell'ultimo decennio informazioni sempre più rilevanti sulle particelle provengono dalla **cosmologia osservativa** che già oggi lascia emergere sostanziali incompletezze del MS. I due grandi problemi riguardano **la materia oscura** e **la energia oscura** dovute certamente a particelle e campi non compresi nel MS. Dato che questi contribuiscono rispettivamente con il 23% e il 72% alla densità di massa ed energia del cosmo osservabile per un totale del 95%, mentre solo al 5% ammonta il contributo della materia ordinaria, comprendiamo l'entità delle novità che in un prossimo futuro dovrebbero interessare il MS.

Un accenno alle Teorie di Campo Quantizzato

Il concetto di campo quantizzato

La *fisica delle particelle elementari* studia processi che rispondono alle seguenti caratteristiche generali:

- a) coinvolgono particelle di *dimensione subatomica* (scala microscopica);
- b) le energie delle particelle sono spesso molto superiori alle loro energie a riposo collocandosi nel *regime relativistico* ($p \sim mc$) o *ultrarelativistico* ($p \gg mc$);
- c) sono preponderanti i processi nel corso dei quali le particelle si trasformano in altre particelle di diverso numero e tipo (processi di *produzione* o *decadimento*).

In base al punto a) tali processi si collocano nel dominio dei fenomeni quantistici tuttavia i punti b) e c) escludono che la loro descrizione possa avvenire nel contesto della meccanica quantistica classica. Infatti l'equazione di Schroedinger non è valida nel regime relativistico e ultrarelativistico ed inoltre l'interpretazione di Born della funzione d'onda non si presta alla trattazione di processi nei quali avvengono trasformazioni nella tipologia e nel numero delle particelle.

Una versione della meccanica quantistica capace di superare tutte queste limitazioni fu costruita nel ventennio compreso tra il 1925-27 (lavori di Dirac, Heisenberg, Jordan, Pasqual) ed il 1948-49 (lavori di Dyson, Feynman, Schwinger, Tomonaga) con la formulazione della teoria di campo quantizzato della interazione elettromagnetica (Quantum ElectroDynamics, QED).

I concetti di base su cui si fonda la descrizione dei fenomeni quantistici da parte di una teoria di campo quantizzato differiscono radicalmente da quelli che fondano invece la descrizione quantomeccanica classica. Sotto il profilo concettuale sottolineiamo i seguenti aspetti:

- **Il campo.** Si rifiuta la suddivisione classica degli enti fisici in particelle materiali e campi di forza e si afferma *il campo* come unico **ente fisico fondamentale** (es: la particella elettrone deve essere pensata come la manifestazione di un campo elettronico). Come quello classico, **il campo quantizzato è un ente fisico che si estende nello spazio e che può modificare il proprio stato nel tempo** (dinamica del campo);
- **Quantizzazione.** A differenza del campo macroscopico classico, quello della fisica microscopica è soggetto al fenomeno della *quantizzazione* (formalmente imposta attraverso un certa procedura) la quale comporta che *l'energia, la quantità di moto, il momento angolare, etc. etc. posseduto o scambiato dal campo sia sempre multipla di certe quantità minime non divisibili dette **quanti** del campo.*

Essendo 'frazioni' del campo, tali quanti soddisfano **il principio di sovrapposizione** e danno luogo ai tipici fenomeni della interferenza, diffrazione etc. etc. classicamente definiti come **ondulatori**. Essendo però **portatori di frazioni definite di energia, quantità di moto, etc. etc.** danno luogo anche a fenomeni classicamente definiti come **corpuscolari**. In questo senso, **il quanto è un ente portatore sia di proprietà ondulatorie che corpuscolari** come d'altra parte richiesto dagli esperimenti con particelle microscopiche (si pensi alla interferenza quantomeccanica di due fenditure in regime di singola particella);

- **Accoppiamento tra campi.** Campi diversi possono occupare la stessa regione di spazio. Se, in aggiunta a ciò, sono accoppiati tra loro, allora possono scambiarsi quanti. Si assume sempre che **lo scambio di quanti tra campi accoppiati avvenga in un certo punto dello spazio e del tempo attraverso un processo di natura intrinsecamente statistica.**

Le particelle osservate negli esperimenti altro non sono che i quanti scambiati dai campi con gli apparati di osservazione.

I **processi dove il numero e la tipologia delle particelle varia** vengono interpretati come trasferimenti di quanti tra campi differenti accoppiati tra loro (un fatto che semplifica in modo determinante la loro descrizione).

Sotto il profilo formale vale la pena richiamare i seguenti fatti:

- **Lo stato del campo.** Lo stato fisico di un campo classico viene descritto precisando, per ciascuno dei suoi modi normali, il valore dell'ampiezza.

Lo stato fisico di un campo quantizzato viene descritto precisando, per ciascuno dei suoi modi normali, il numero di quanti. Ciò significa che per descrivere lo stato fisico del campo è necessario, per ciascun modo normale k , descrivere l'insieme dei possibili stati con $n_k=1,2,3,\dots,N,\dots$ quanti. Uno stato con un singolo quanto, analogamente alla singola particella della meccanica quantistica classica, è descritto da un vettore nello spazio di Hilbert H (uno stato senza quanti, invece, da un semplice numero complesso C). Uno stato con due quanti può essere costruito nello spazio prodotto $H \otimes H$, con tre quanti nello spazio prodotto $H \otimes H \otimes H$, con n quanti nello spazio prodotto $H^{\otimes n}$. Nel costruire gli stati a due, tre o più quanti bisogna tenere conto del **principio di indistinguibilità** il quale impone che gli stati siano simmetrici (bosoni) o antisimmetrici (fermioni) rispetto allo scambio dei quanti stessi. Indicheremo tali stati correttamente simmetrizzati con $(H \otimes H)'$, $(H \otimes H \otimes H)'$, etc. etc. Uno spazio dove sia possibile costruire stati con un numero arbitrario di quanti può allora essere costruito attraverso la somma $C \oplus (H) \oplus (H \otimes H)' \oplus \dots \oplus (H^{\otimes n})' \oplus \dots$

Uno spazio di questo tipo deve essere poi costruito per ogni modo normale sicché lo spazio finale è del tipo

$$[C \oplus (H) \oplus (H \otimes H)' \oplus \dots \oplus (H^{\otimes n})' \oplus \dots]_1 \oplus [C \oplus (H) \oplus (H \otimes H)' \oplus \dots \oplus (H^{\otimes n})' \oplus \dots]_2 \oplus \dots$$

dove a pedice è indicato il primo modo, il secondo modo, etc. etc. Dunque, partendo dagli stati di singola particella della meccanica quantistica è possibile costruire lo spazio degli stati del campo. Tale spazio prende il nome di **spazio di Fock** e lo stato del campo è rappresentato da un certo **vettore di stato** $|s\rangle$ in tale spazio;

- **La dinamica del campo.** Si intuisce che, in questo tipo di formalismo, la **dinamica del campo** può essere descritta per mezzo di un 'ente' che agendo sullo 'stato del campo' lo modifica. Dunque da un 'operatore' che opera sul 'vettore di stato' del campo. Dato che una variazione dello stato del campo può avvenire in ogni punto dello spazio \vec{r} ed in ogni istante di tempo t per mezzo di un processo intrinsecamente statistico, il suddetto operatore deve dipendere da \vec{r} e t . Giungiamo allora alla conclusione che **il campo è descritto da un operatore $\hat{\Psi}(\vec{r}, t)$ in generale complesso** (i campi classici sono descritti da funzioni dipendenti da \vec{r} e t , quelli quantistici da operatori dipendenti da \vec{r} e t);
- **Come opera $\hat{\Psi}(\vec{r}, t)$, particelle e antiparticelle.** Un modo per capire come opera $\hat{\Psi}(\vec{r}, t)$ sul vettore di stato è quello di esprimerlo come serie di Fourier complessa (magari in un volume limitato così da avere una distribuzione discreta di modi normali). Si trova allora che i) è necessario introdurre, in corrispondenza di ogni **particella**, una **antiparticella** avente stessa massa e spin ma 'cariche interne' opposte (ad esempio in corrispondenza dell'elettrone si deve introdurre il positrone); ii) le ampiezze di Fourier dei diversi modi normali di $\hat{\Psi}(\vec{r}, t)$ devono essere interpretate come operatori capaci al tempo stesso di **distruzione di una particella** (o quanto) o di **creare una antiparticella** nel modo normale corrispondente. Analogamente si trova che le ampiezze di Fourier dei diversi modi normali dell'operatore aggiunto $\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}, t)$ devono essere interpretate come operatori capaci al tempo stesso di **creare una particella** (o quanto) o di **distruzione di una antiparticella** nel modo normale corrispondente. Siccome i nostri ragionamenti saranno del tutto qualitativi, nel seguito, quando necessario, in modo sintetico useremo i simboli

$$\hat{\Psi} \text{ per indicare } \text{distruzione di una particella} \text{ o } \text{creazione di una antiparticella} \quad \Psi = D_{\bar{p}} + C_{\bar{p}}$$

$$\hat{\Psi}^\dagger \text{ per indicare } \text{creazione di una particella} \text{ o } \text{distruzione di una antiparticella} \quad \bar{\Psi} = D_p + C_p$$

-
- **Indistinguibilità.** Si deve ricordare che già nella meccanica quantistica classica i fatti sperimentali richiedono che le particelle dello stesso tipo (ad esempio gli elettroni) non solo siano tra loro identiche ma anche fisicamente indistinguibili. L'indistinguibilità delle particelle identiche è un requisito che deve essere soddisfatto anche nelle teorie dei campi quantizzati dove oltretutto appare essere un concetto assai più naturale dato che le particelle sono identificate con i quanti di specifici campi. Si può mostrare che **per soddisfare l'indistinguibilità quantomeccanica delle particelle identiche** è sufficiente costruire **gli stati a più particelle in modo che siano simmetrici o antisimmetrici rispetto allo scambio delle particelle stesse** (lo spazio di Fock degli stati del campo deve essere costruito in accordo con questa prescrizione). Da questo fatto discende immediatamente che **due particelle identiche del tipo antisimmetrico non possono coesistere nello stesso stato** ma solo in stati differenti o, equivalentemente, che **il numero di occupazione di uno stato di un campo costituito da particelle del tipo antisimmetrico può essere solo 0 ed 1.**

Nessun limite di questo tipo invece sussiste per le particelle del tipo simmetrico per cui affermiamo che **un numero arbitrario di particelle identiche del tipo simmetrico possono coesistere nello stesso stato** o, equivalentemente, che **il numero di occupazione di uno stato di un campo costituito da particelle del tipo simmetrico può essere qualunque.** Le particelle o quanti del primo tipo sono dette **Fermioni** mentre quelle del secondo tipo sono dette **Bosoni**.

- **Connessione spin-statistica.** All'interno della teoria dei campi quantizzati si riesce a stabilire una fondamentale connessione tra la proprietà di simmetria degli stati e lo spin dei suoi quanti. Si tratta di uno dei teoremi più importanti e generali delle teorie di campo quantizzato, il **teorema spin-statistica** (dimostrato in forma sempre più generale da Fierz, 1939; Pauli, 1940; Schwinger, 1950): **gli stati simmetrici rispetto alla permutazione degli indici di particella sono sempre associati a particelle di spin intero (bosoni) mentre gli stati antisimmetrici rispetto alla permutazione degli indici di particella sono sempre associati a particelle di spin semintero (fermioni);**

- il passaggio dalla meccanica quantistica classica alla teoria di campo quantizzato può essere interpretato come trasformazione della funzione d'onda (che fornisce la densità di probabilità di localizzazione di una particella microscopica) in un campo operatoriale (associato alla distruzione di particelle o creazione di antiparticelle)

operatore di campo nella forma di 'onda' piana

$$\hat{\psi}(\vec{r}, t) = \hat{A}_{\vec{k}, \omega} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

operatore di campo $\hat{\psi}(\vec{r}, t)$ comprende una parte operatoriale che opera sugli stati ed una parte di spin

parte spazio-temporale : onda piana in campo complesso
parametri dell'onda piana
 $\vec{k} = (2\pi / \lambda) \vec{n} \quad \omega = 2\pi / T$
 $s = \sqrt{s(s+1)} \hbar \quad s = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$

relazione tra i parametri dell'onda piana e l'energia e l'impulso : relazioni di De-Broglie $E = \hbar \omega \quad \vec{p} = \hbar \vec{k}$

relazioni relativistiche per la energia e l'impulso $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$

relazioni relativistiche + relazioni di De Broglie $\hbar \omega = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad \hbar \vec{k} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad \omega^2 = k^2c^2 + \frac{m^2c^4}{\hbar^2}$

- L'evoluzione temporale degli operatori di campo è data dalle equazioni del campo che possono essere espresse nella forma di **equazioni di evoluzione tipo Schroedinger o Heisenberg**

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi} = H \hat{\psi} \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi} = -(\hat{H} \hat{\psi} - \hat{\psi} H)$$

Quando il numero di particelle non cambia gli operatori di campo possono essere reinterpretati come funzioni complesse della posizione e del tempo il cui modulo quadro fornisce la densità di probabilità di localizzazione della particella (funzione d'onda della meccanica quantistica classica).

Le interazioni nei campi quantizzati

Le interazioni nel campo classico

Nelle teorie di campo classico, valide macroscopicamente, le interazioni tra particelle materiali vengono descritte per mezzo di uno scambio continuo di energia, quantità di moto etc. etc. attraverso l'intermediazione del campo.

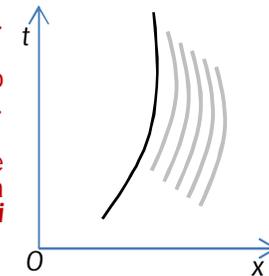
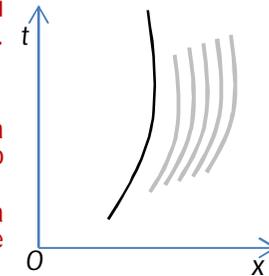
Ad esempio, nel caso dell'elettromagnetismo, una carica elettrica posizionata in un certo punto con una certa velocità, si accoppia con una certa *intensità caratteristica* al campo elettrico e magnetico innalzandone il valore in tutto lo spazio circostante.

Una seconda carica elettrica, posizionata in un secondo punto, si accoppia con la stessa intensità caratteristica a tali campi elettrico e magnetico ricevendone una forza che si traduce in una variazione della sua velocità.

Attraverso questo meccanismo, la prima carica trasferisce frazioni di energia, quantità di moto etc. etc. al campo elettromagnetico che, a sua volta, le trasferisce alla seconda carica.

Il processo elementare su cui si basa l'interazione consiste quindi nella cessione (prima figura) o acquisizione (seconda figura) dal campo elettromagnetico, di frazioni di energia, quantità di moto etc. etc. da parte delle cariche.

Secondo l'elettromagnetismo classico, le frazioni di energia, quantità di moto etc. etc. che le cariche cedono o acquisiscono dal campo possono variare in modo continuo per cui lo scambio risulta assimilabile ad una **sequenza continua di processi elementari e deterministici** di scambio di **frazioni infinitesime** di energia, quantità di moto etc. etc.



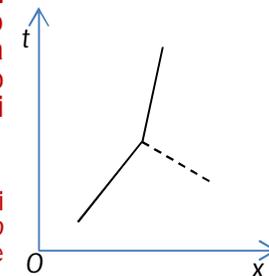
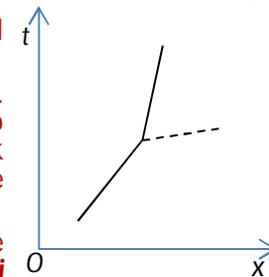
Le interazioni nel campo quantizzato

I fatti sperimentali in ambito microscopico impongono alcune rilevanti modifiche del meccanismo d'interazione del campo classico.

In primo luogo risulta necessario ammettere che le frazioni di energia, quantità di moto etc. etc. scambiate tra particelle e campi, possano variare solo in modo discontinuo attraverso **porzioni minime indivisibili dette quanti** (storicamente questo fatto fu messo in luce da Plank con la sua rivoluzionaria interpretazione della radiazione di cavità ma fu poi confermato come caratteristica generale dei fenomeni microscopici).

In secondo luogo è anche necessario ammettere che lo scambio di tali quanti tra particelle e campi sia **istantaneo, avvenga in un preciso punto dello spazio, e regolato da una legge di natura statistica con probabilità proporzionale alla intensità caratteristica della interazione**. Ciò significa che il processo non è deterministico, e, a priori, ciò che è definita è solo la probabilità che avvenga un tale scambio (vastissima è la base empirica di questo fatto, ma potremmo citare l'interferenza quantomeccanica di elettroni ovvero la distribuzione statistica degli elettroni su di uno schermo fotografico preceduto da due fenditure nanometriche).

Ad esempio, nel caso della interazione elettromagnetica lo scambio tra carica e campo deve strutturarsi in una **sequenza discreta** di processi elementari ciascuno corrispondente ad una **cessione (terza figura) o acquisizione (quarta figura) finita ed istantanea** di energia, quantità di moto etc. etc. dal campo da parte della carica.



**l'interazione tra campi
come sequenza di eventi
di creazione e distruzione
di quanti**

Dato che nelle teorie di campo quantizzato, non solo le forze ma anche le particelle materiali sono ricondotte ad altrettanti campi, **l'interazione viene di fatto descritta come una sequenza di processi di emissione (creazione) o assorbimento (distruzione) di specifici quanti.**

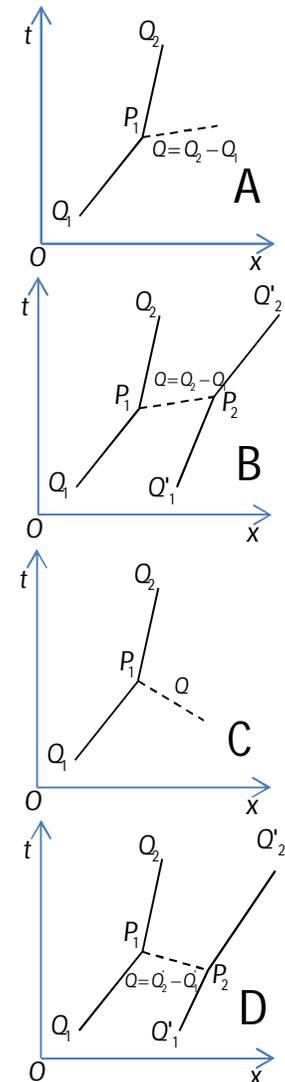
Ad esempio il processo elementare di emissione di un quanto elettromagnetico da parte di un elettrone viene descritto nel modo seguente (A):

- inizialmente l'elettrone si muove con un certo quadrimpulso Q_1 ;
- in un certo punto P_1 dello spazio e del tempo viene *distru*to un quanto del campo elettronico nello stato di quadrimpulso Q_1 e *creato* un quanto elettronico nello stato di quadrimpulso Q_2 (si noti che l'intero processo corrisponde ad un quanto elettronico che perde un quadrimpulso $Q_2 - Q_1$);
- contemporaneamente, sempre in P_1 , viene *creato* un quanto del campo elettromagnetico nello stato di quadrimpulso $Q = Q_2 - Q_1$ che si 'propaga' per un certo spazio e per un certo tempo ;
- la distruzione dell'elettrone iniziale e la creazione dell'elettrone e del fotone finali avvengono nel punto P_1 con una probabilità dipendente dalla intensità caratteristica della interazione;
- l'intero processo corrisponde al trasferimento del quadrimpulso $Q = Q_2 - Q_1$ dall'elettrone al quanto del elettromagnetico con una certa definita probabilità.

Se sul cammino del quanto del campo elettromagnetico così emesso si trova un secondo elettrone che si muove con un certo quadrimpulso Q_2 , allora potranno aversi i seguenti processi (B):

- nel punto P_2 vengono *distru*tti un quanto elettronico nello stato di quadrimpulso Q_1' ed un quanto del campo elettromagnetico di quadrimpulso $Q = Q_2 - Q_1$; contemporaneamente viene *creato* un quanto elettronico di quadrimpulso $Q_2' = Q_1' + Q = Q_1' + (Q_2 - Q_1)$;
- la distruzione dell'elettrone e del fotone iniziale e la creazione dell'elettrone finale avvengono nel punto P_2 con una probabilità dipendente dalla intensità caratteristica della interazione;
- l'intero processo corrisponde ad un trasferimento del quadrimpulso $Q = Q_2 - Q_1$ tra i due elettroni attraverso lo scambio di un quanto elettromagnetico o fotone.

In modo analogo si descrive il processo di assorbimento di un quanto elettromagnetico da parte di un elettrone (C). Se questo, a sua volta, è stato emesso da un secondo elettrone, allora può aversi il processo del diagramma (D) che si configura anch'esso come un trasferimento di quadrimpulso tra i due elettroni attraverso i quanti del campo elettromagnetico e che va a contribuire, assieme al diagramma (B), alla interazione tra i due elettroni.



processi associati alle antiparticelle

Come accennato la formulazione relativistica porta inevitabilmente ad introdurre in posizione simmetrica, accanto alle particelle, le antiparticelle aventi stessa massa e spin ma cariche interne opposte.

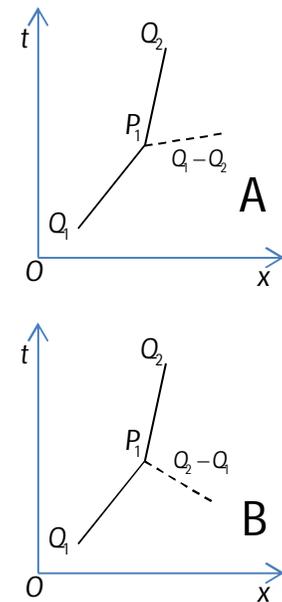
In generale le antiparticelle sono diverse e perfettamente distinguibili dalle particelle (come nel caso degli elettroni e dei positoni). Tuttavia può accadere che, per certi campi, esse coincidano e allora si parla di **campo realmente neutro** ovvero di un campo dove tutte le cariche interne sono nulle (ad esempio il fotone è realmente neutro, mentre il neutrone è solo elettricamente neutro poiché altre 'cariche interne' sono non nulle. Da ciò comprendiamo che la reale neutralità è la condizione di neutralità più forte in assoluto) . Da un punto di vista formale si trova che un campo realmente neutro è descritto da *operatori di campo autoaggiunti* mentre un campo non realmente neutro è descritto da *operatori di campo non autoaggiunti*. E' naturale attendersi che l'esistenza delle antiparticelle accanto alle particelle introduca nel gioco della interazione nuovi processi.

Ad esempio l'esistenza del positone accanto all'elettrone introduce la possibilità di processi sconosciuti all'elettromagnetismo classico. Per averne una idea inventiamo una notazione che descriva rapidamente i due diagrammi elementari di emissione e assorbimento di un fotone da parte di un elettrone noti dalla analogia con il campo classico. Riassumiamo il diagramma A con la notazione **DeCeCf** che significa distruzione di un elettrone iniziale e creazione di un elettrone ed un fotone finale. Analogamente il diagramma B sarà indicato con **DeDfCe**.

Come accennato sviluppando coerentemente la teoria si trova che lo stesso operatore di campo $\hat{\Psi}$ descrive sia la distruzione di particelle (**De**=distruzione di un elettrone) che la creazione di antiparticelle (**Cp**=creazione di un positone) mentre l'operatore di campo $\hat{\Psi}^\dagger$ descrive sia la creazione di particelle (**Ce**=creazione di un elettrone) che la distruzione di antiparticelle (**Dp**=distruzione di un positone).

Fatta questa premessa, possiamo pensare di sostituire **De** con **Cp** e **Ce** con **Dp** in tutte le possibili combinazioni nei diagrammi A e B in modo da ottenere altri diagrammi possibili. Otteniamo allora i seguenti processi (si tengano a sinistra i processi di distruzione)

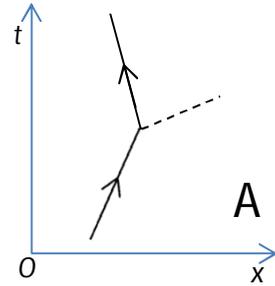
$$\begin{aligned}
 & D_e C_e C_f \quad C_p C_e C_f \quad D_e D_p C_f \quad D_p C_p C_f \\
 & D_e D_f C_e \quad D_f C_p C_e \quad D_e D_p D_f \quad D_p D_f C_p
 \end{aligned}$$



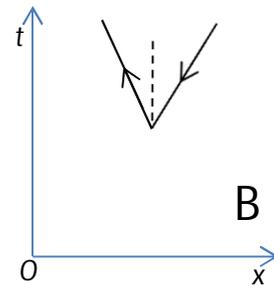
un segno grafico per le antiparticelle

Prima di tradurli in altrettante figure dobbiamo introdurre un qualche segno grafico per distinguere il positone dall'elettrone nel nostro diagramma spaziotemporale. Si potrebbe semplicemente introdurre una linea di tipo diverso ma conviene citare un altro risultato importante secondo il quale **la propagazione di un positone è formalmente equivalente alla propagazione di un elettrone con il tempo invertito**. Ciò significa che possiamo usare una linea continua per rappresentare la propagazione sia di elettroni che di positoni con l'accortezza di inserire una freccia concorde con il tempo nel caso degli elettroni ed una freccia opposta al tempo nel caso dei positoni. A questo punto siamo in grado di costruire facilmente i seguenti otto diagrammi

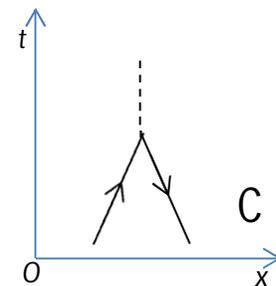
NOTA: vale la pena osservare che in ciascuno di questi diagrammi l'elettrone partecipa sempre con gli operatori Ψ e Ψ^\dagger . Dal punto di vista dell'elettrone dunque il vertice ha la forma $(\Psi^\dagger \dots \Psi)$ dove i puntini indicano altre grandezze associate al vertice che non riportiamo



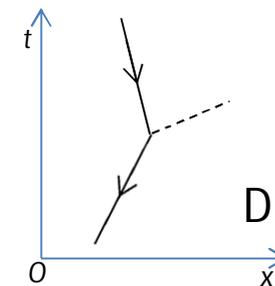
elettrone che emette un fotone



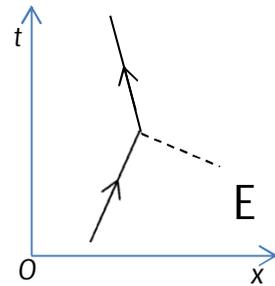
creazione di un elettrone, positone e fotone



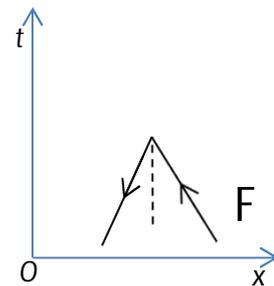
annichilazione elettrone positone in un fotone



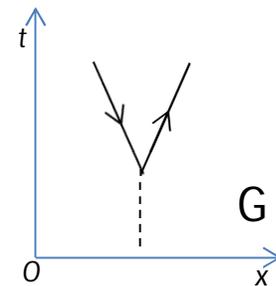
positone che emette un fotone



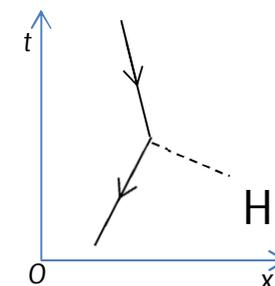
elettrone che assorbe un fotone



annichilazione di un elettrone, positone e fotone



creazione elettrone-positone da un fotone



positone che assorbe un fotone

NOTA: non sarà sfuggito che si potrebbero ottenere questi otto diagrammi assumendo A come fondamentale e considerando l'elettrone ed il fotone sia in posizione iniziale che finale in tutte le combinazioni (con l'avvertenza che un elettrone iniziale si scambia in un positone finale e viceversa mentre un fotone iniziale si scambia in un fotone finale).

I diagrammi di assorbimento ed emissione A ed E e D ed H rappresentano processi che hanno un analogo classico mentre i diagrammi B, C, F e G sono processi del tutto nuovi che emergono dal formalismo della teoria dei campi quantizzati combinando la meccanica quantistica e l'invarianza relativistica.

processi di irradiazione e leggi di conservazione

Consideriamo ora un aspetto delicato ma cruciale: i processi elementari rappresentati nei diagrammi della pagina precedente, ed in generale **i processi di emissione od assorbimento di quanti da parte di particelle libere, sono incompatibili con le leggi di conservazione della energia e dell'impulso** e come tali, essendo tali leggi di conservazione fuori discussione, non possono avvenire nel modo indicato.

Per vederlo nel caso più generale immagineremo che a causa dell'accoppiamento esistente tra due campi massivi X e Y, una particella libera massiva (quanto di X) irradia una particella massiva (quanto di Y) secondo un processo che Mandelstam chiamò **canale t**. Dalla **conservazione del quadrimpulso nel vertice P1** otteniamo

$$Q_1 = Q_2 + Q \quad (\varepsilon_1, c\vec{p}_1) = (\varepsilon_2, c\vec{p}_2) + (\varepsilon, c\vec{p}) \quad \varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \quad \vec{p} = \vec{p}_1 - \vec{p}_2$$

dove Q1 e Q2 sono i quadrimpulsi delle particelle libere che devono pertanto soddisfare le relazioni energia-impulso della teoria della relatività ristretta

$$\varepsilon_1 = \sqrt{p_1^2 c^2 + m^2 c^4} \quad \varepsilon_2 = \sqrt{p_2^2 c^2 + m^2 c^4}$$

Da queste possiamo calcolare la massa M' con cui il quanto Y viene irradiato

$$M'^2 c^4 = \varepsilon^2 - p^2 c^2 = 2(m^2 c^4 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 c^2)$$

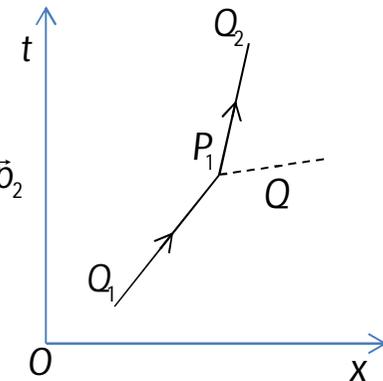
Notiamo che il secondo membro dipende dalla cinematica ed è inoltre sempre negativo. Infatti nel riferimento in cui la particella iniziale è ferma si ha

$$\varepsilon_1 = mc^2 \quad \vec{p}_1 = 0 \quad \varepsilon_2 = \sqrt{p_2^2 c^2 + m^2 c^4} \quad \vec{p}_2 = -\vec{p}$$

da cui

$$M'^2 c^4 = \varepsilon^2 - p^2 c^2 = 2 mc^2 (mc^2 - \sqrt{p_2^2 c^2 + m^2 c^4}) < 0 \text{ se } p_2 \neq 0 \quad (1)$$

dove l'ultima condizione indica che è avvenuta l'emissione. Dunque, **la massa M' della quanto emesso nel canale t è variabile ed immaginaria.**



In modo analogo possiamo affrontare il caso in cui due particelle annichilano emettendo il quanto di un campo massivo secondo un processo che Mandelstam chiamò **canale s**. Dalla **conservazione del quadrimpulso nel vertice P1** otteniamo

$$Q_1 + Q_2 = Q \quad (\varepsilon_1, c\vec{p}_1) + (\varepsilon_2, c\vec{p}_2) = (\varepsilon, c\vec{p}) \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad \vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

dalle quali otteniamo la massa M' con cui il quanto Y viene irradiato

$$M'^2 c^4 = \varepsilon^2 - p^2 c^2 = 2(m^2 c^4 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 c^2)$$

Il secondo membro dipende dalla cinematica ed è sempre maggiore di $4m^2 c^4$. Infatti nel riferimento del centro di massa si ha

$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$$

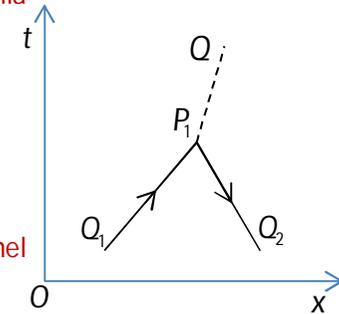
da cui

$$M'^2 c^4 = \varepsilon^2 - p^2 c^2 = 4(m^2 c^4 + p_2^2 c^2) > 4 m^2 c^4 \quad \text{se } p_2 \neq 0 \quad (3)$$

dove l'ultima condizione indica che è avvenuta l'emissione. Dunque, **la massa M' del quanto emesso nel canale s è variabile, reale e tale che $M' > 2m$.**

Trovata la massa dei quanti che intervengono nel processo di irradiazione ovvero dei **quanti interagenti**, ricordiamo che invece la massa dei quanti che non intervengono nel processo di irradiazione ovvero dei **quanti liberi** devono avere una massa **M costante, reale e positiva** tale da soddisfare la relazione

$$\varepsilon^2 - p^2 c^2 = M^2 c^4 \quad (5)$$



quanti virtuali e quanti reali

Sulla base della conservazione della energia e dell'impulso concludiamo che **la massa con cui il quanto di un campo massivo Y si propaga nello stato libero è costante reale e positiva e soddisfa la relazione relativistica energia-impulso mentre quella con cui si 'propaga' nello stato interagente è variabile reale o complessa e viola la relazione relativistica energia-impulso.**

Nel primo caso si parla di **quanti reali** o di **quanti on-shell** mentre nel secondo di **quanti virtuali** o di **quanti off-shell**. Il fatto che nella teoria dei campi quantizzati, accanto ai quanti reali, debbano esistere corrispondenti quanti virtuali fu una delle cause che maggiormente ne ostacolarono l'accettazione da parte della comunità scientifica. Le resistenze si attenuarono gradualmente quando risultò chiaro **che i quanti virtuali erano ammessi dalle leggi della meccanica quantistica** e che, oltretutto, trovavano una conferma in alcuni piccoli ma fondamentali effetti misurati sperimentalmente (vedi più avanti).

i quanti virtuali sono ammessi dalla meccanica quantistica

Possiamo cercare di capire questo punto tenendo conto della meccanica quantistica attraverso le **relazioni di indeterminazione**

$$\Delta \varepsilon \Delta t \sim h \quad \Delta p \Delta x \sim h \quad (6)$$

che possono essere rilette affermando **su intervalli spaziali e temporali via via più piccoli, un fenomeno microscopico è soggetto a fluttuazioni spontanee dell'impulso e della energia sempre più grandi.**

Immaginiamo allora che il fenomeno microscopico consista nella emissione di un quanto Y da parte del quanto libero X a causa dell'accoppiamento tra i rispettivi campi. Siccome vale la conservazione della energia e dell'impulso nel vertice di emissione, sappiamo che il quanto emesso Y deve necessariamente essere virtuale. Ora si tratta di stabilire se un simile quanto virtuale possa in qualche modo esistere oppure no.

A questo proposito ricordiamo che un quanto esistente come particella reale soddisfa la relazione energia-impulso data dalla (5) per cui la risposta parrebbe essere negativa. Osserviamo però che, secondo la meccanica quantistica, a scale temporali e spaziali sempre più corte esistono fluttuazioni spontanee della energia e dell'impulso sempre più grandi. Tali fluttuazioni alterano in modo incontrollato i valori dell'impulso e della energia trasportate dal quanto reale e quindi anche il valore della massa calcolata attraverso la (5). Entro scale spaziali e temporali sempre più corte il quanto reale assume quindi sempre più le caratteristiche di un corrispondente quanto virtuale. Differenziando rispetto ad E e p, dalla (5) otteniamo facilmente

$$\Delta M = \frac{E}{Mc^4} \Delta E \quad \Delta M = \frac{p}{Mc^2} \Delta p \quad (7)$$

Assumendo come **condizione di virtualità** che le fluttuazioni sulla massa siano almeno dell'ordine della massa stessa così come le fluttuazioni della energia e della quantità di moto

$$\Delta M \geq M \quad \Delta E \approx E \quad \Delta p \approx p \quad (7a)$$

otteniamo sostituendo nelle (7)

$$\Delta M \approx \frac{1}{Mc^4} \Delta E^2 \quad \Delta M \approx \frac{1}{Mc^2} \Delta p^2$$

$$M \leq \frac{1}{Mc^4} \Delta E^2 \quad M \leq \frac{1}{Mc^2} \Delta p^2$$

da cui le **condizioni approssimate sull'ampiezza delle fluttuazioni spontanee della energia e dell'impulso necessarie a creare uno stato virtuale a partire da un quanto di massa M (calcolata come stato libero**

$$\Delta E \geq Mc^2 \quad \Delta p \geq Mc$$

Tenendo ora conto delle relazioni di indeterminazione (6) otteniamo

$$c\Delta t \leq \frac{h}{Mc} \quad \Delta x \leq \frac{h}{Mc} \quad (8)$$

dove il quoziente h/Mc viene detto **lunghezza Compton**. Concludiamo allora che secondo **la meccanica quantistica i quanti reali di un campo massivo possono sussistere illimitatamente nel tempo e propagarsi illimitatamente nello spazio mentre i corrispondenti quanti virtuali possono esistere solo entro intervalli temporali e spaziali dell'ordine della lunghezza Compton. Nel caso particolare in cui il campo non sia massivo i corrispondenti quanti virtuali possono esistere senza limitazioni spaziali e temporali.**

Non può sfuggire come tutto ciò suggerisca l'idea che i quanti virtuali massivi siano coinvolti nelle interazioni naturali a corto raggio come quelle deboli e forti (?) mentre quelli non massivi nelle interazioni naturali a lungo raggio come quelle elettromagnetiche o gravitazionali.

I PROCESSI OSSERVABILI. Quando due campi sono accoppiati tra loro, le particelle libere dell'uno possono irradiare solo quanti virtuali dell'altro. Come più volte detto, tali quanti virtuali possono esistere solo per intervalli temporali e spaziali limitati dopodiché devono essere necessariamente riassorbiti o dalla particella che li ha emessi o da una seconda particella dello stesso tipo che si trovi all'interno del raggio della interazione.

Questo significa che, nel caso di particelle libere, i processi con un solo vertice di emissione non possano realizzarsi essendo richiesto almeno un secondo vertice di assorbimento. Dunque **i processi osservabili più semplici devono avere almeno due vertici.**

Nel caso della interazione elettromagnetica, possiamo cercare di costruire tutti processi a due vertici con le semplici prescrizioni di pag 38.

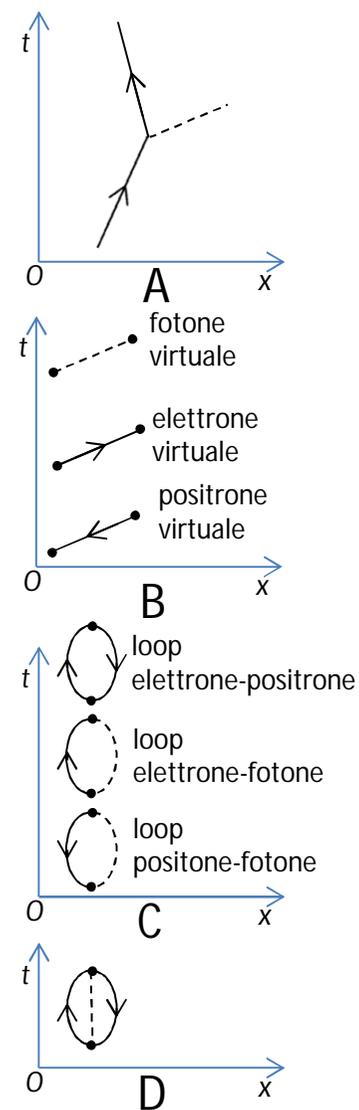
Assumendo il diagramma A come rappresentativo del vertice della interazione elettromagnetica, notiamo che da esso arrivano o si dipartono tre particelle di cui un fotone e due elettroni. Ciò significa che tra due vertici elettromagnetici potranno trovarsi uno, due o al massimo tre particelle virtuali. Nel caso di una particella virtuale abbiamo le possibilità rappresentate in B, con due particelle virtuali quelle rappresentate in C e con tre particelle virtuali solo il diagramma D. Naturalmente i diagrammi rappresentati in B, C e D vanno completati in modo da avere i giusti vertici elettromagnetici.

Notiamo subito che il diagramma D è già completo. Esso rappresenta un processo che può avvenire sempre e comunque, indipendentemente da tutti altri (diagramma sconnesso) gli nel quale spontaneamente dal vuoto si generano un elettrone, un positrone ed un fotone virtuali che vengono poco dopo distrutti. Si può mostrare che *tale processo non da mai contributi osservabili* (inessenziale fattore di fase nell'ampiezza del processo).

I diagrammi C possono essere completati solo nei modi indicati in E. Il primo, detto **polarizzazione del vuoto**, descrive un processo dove un preesistente campo elettromagnetico (fotone) irradia una coppia virtuale elettrone-positrone subito dopo assorbita. Un tale processo dovrebbe produrre effetti osservabili dato che farebbe comparire un dipolo transiente che potrebbe orientarsi nel campo elettrico generato dalla carica stessa che ha prodotto il campo iniziale schermandola.

Il secondo ed il terzo sono detti **self-energy dell'elettrone e del positrone** e descrivono il processo di emissione e riassorbimento di un fotone virtuale da parte di elettroni e positroni liberi. Un tale processo rappresenta di fatto un campo elettromagnetico transiente associato alle cariche, portatore, come tutti i campi, di una energia addizionale che dovrebbe contribuire alla inerzia complessiva dell'elettrone e del positrone.

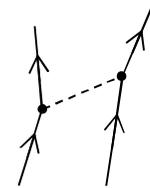
Naturalmente il destino della teoria si gioca sulla sua capacità di fornire una previsione quantitativa degli effetti citati e, soprattutto, sulla conferma in sede sperimentale degli stessi. Furono entrambi problemi formidabili perché il calcolo dell'ampiezza di diagrammi come quello della polarizzazione del vuoto e della self energia forniva una **probabilità infinita** priva di senso e gli esperimenti per verificarne gli effetti di una difficoltà proibitiva. Come diremo tra non molto entrambi i problemi si risolsero quasi contemporaneamente sul finire degli anni '40 con la formulazione della teoria di campo quantizzato della interazione elettromagnetica (QED) capace di previsioni di una precisione sbalorditiva.



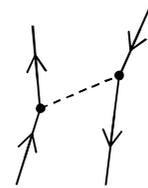
Naturalmente il destino della teoria si gioca sulla sua capacità di fornire una previsione quantitativa degli effetti citati e, soprattutto, sulla conferma in sede sperimentale degli stessi. Furono entrambi problemi formidabili perché il calcolo dell'ampiezza di diagrammi come quello della polarizzazione del vuoto e della self energia forniva una **probabilità infinita** priva di senso e gli esperimenti per verificarne gli effetti di una difficoltà proibitiva. Come diremo tra non molto entrambi i problemi si risolsero quasi contemporaneamente sul finire degli anni '40 con la formulazione della teoria di campo quantizzato della interazione elettromagnetica (QED) capace di previsioni di una precisione sbalorditiva.

Completiamo ora i diagrammi B. Hanno luogo diverse classi di processi quali **la diffusione elettrone-elettrone (Moller scattering), elettrone-positone (Bhabha scattering), positone-positone, elettrone-fotone e positone-fotone (Compton scattering) ed infine la produzione di coppie elettrone-positone da due fotoni e l'annichilazione di coppie elettrone-positone in due fotoni**. E' importante sottolineare che di questi processi **la teoria fornisce previsioni verificate sperimentalmente con grande precisione**.

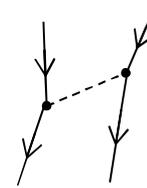
Dunque, premesso che alcuni diagrammi a due vertici pongono il problema delle ampiezze di valore infinito, rimane il fatto che la teoria prevede correttamente altri processi fornendo un modello microscopico della interazione. Come si può vedere, **dati due campi interagenti (in questo caso elettrone-positone e campo elettromagnetico) l'interazione tra particelle libere di questi campi (fotone, elettrone o positone) è sostanzialmente basata sullo scambio di quanti virtuali degli stessi campi**.



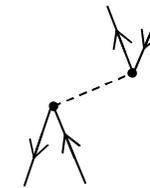
diffusione
elettrone-elettrone
(Moller Scattering)



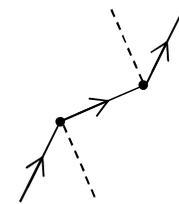
diffusione
elettrone-positone
(Bhabha Scattering)



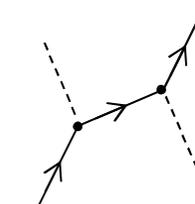
diffusione
positone-positone



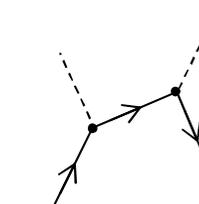
diffusione
elettrone-positone
(Bhabha Scattering)



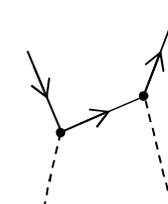
diffusione
elettrone-fotone
(Compton Scattering)



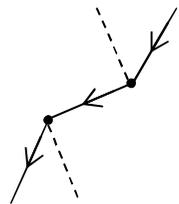
diffusione
elettrone-fotone
(Compton Scattering)



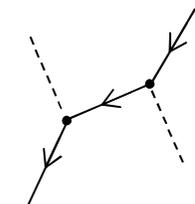
annichilazione
elettrone-positone
in due fotoni



produzione di una coppia
elettrone-positone
da due fotoni



diffusione
positone-fotone
(Compton Scattering)



diffusione
positone-fotone
(Compton Scattering)

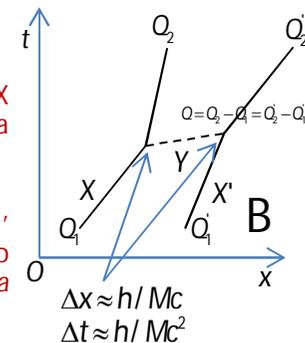
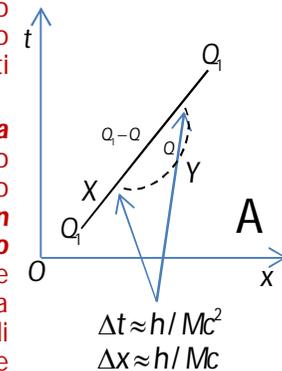
UN MODELLO MICROSCOPICO PER LA INTERAZIONE. Il primo ad intuire che il modello d'interazione microscopica emergente dai processi elettromagnetici poteva rappresentare un modello generale per le interazioni naturali fu H. Yukawa. In un fondamentale lavoro pubblicato nel 1936, egli mostra che estendendo tale modello al caso di quanti virtuali di campi massivi si possono descrivere all'interno dello stesso schema sia le interazioni a corto raggio che quelle a lungo raggio. Si tratta di un avanzamento decisivo verso una interpretazione unitaria delle interazioni naturali, poiché si intuisce che le proprietà assai differenti con le quali si manifestano possono essere ricondotte a diverse proprietà dei quanti virtuali scambiati e non al sottostante meccanismo che è invece sempre lo stesso.

Immaginiamo che un **campo massivo X** sia accoppiato ad un secondo **campo massivo Y** con una certa **accoppiamento caratteristico**. Se X è soggetto ad una forza esterna, la validità delle leggi di conservazione della energia e dell'impulso sono assicurate dalla forza stessa, ed X potrà certamente emettere o assorbire quanti reali di Y con il suddetto accoppiamento caratteristico. Se, invece, X è libero, potrà emettere o assorbire (con lo stesso accoppiamento caratteristico) solo quanti virtuali di Y che possono sussistere solo per intervalli spaziali e temporali dell'ordine della loro lunghezza Compton.

Se X è libero ed isolato, in tali intervalli non cadrà alcuna altra particella ed **il quanto virtuale Y non potrà che essere riassorbito da X** stesso. Se, invece, X è libero ma non isolato, in tali intervalli potrà cadere una seconda particella libera X' (magari quanto dello stesso campo X) che potrà assorbire il quanto virtuale Y (con lo stesso accoppiamento caratteristico della interazione) dando luogo ad un processo che, nel complesso, si configura come **una interazione tra X e X' mediata dal quanto virtuale Y, con raggio d'interazione finito dell'ordine della lunghezza Compton di Y, e intensità data dal quadrato dell'accoppiamento caratteristico della interazione**. Nel caso particolare in cui il campo Y sia non massivo, il corrispondente raggio della interazione diventa infinito (come nel caso dell'elettromagnetismo). In questo modo si descrivono, con un solo modello, le interazioni sia a lungo che a corto raggio. È importante sottolineare che, in tutti questi casi, il processo di assorbimento e/o di emissione di quanti virtuali (ma anche reali) si assume sia **intrinsecamente probabilistico** con una probabilità che misura l'intensità di ciò che abbiamo chiamato accoppiamento caratteristico.

Da un punto di vista formale il processo viene descritto nel modo seguente:

- inizialmente un *quanto libero* di X si muove con un certo quadrimpulso (o stato) Q_1 ;
- in un certo punto P1 dello spazio e del tempo viene *distrutto* un quanto reale X nello stato Q_1 , creato un quanto reale X nello stato Q_2 , creato un quanto virtuale Y nello stato $Q=Q_2-Q_1$ che si 'propaga' per spazi e per tempi dell'ordine della sua lunghezza Compton. Tutto ciò con la *probabilità caratteristica della interazione*;
- se X è isolato, il quanto Y non può che essere riassorbito da X stesso (A);
- se X non è isolato può accadere che all'interno di tali lunghezze Compton cada un secondo quanto X' di quadrimpulso Q_1' (B). In tal caso, in un certo punto P2 potrà essere distrutto, sia il quanto virtuale di Y di quadrimpulso Q_2-Q_1 che il quanto reale X' di quadrimpulso Q_1' , e creato il quanto reale finale di quadrimpulso Q_2' . Il tutto con la *probabilità caratteristica della interazione*.



In modo euristico risulta anche possibile stimare le **forze macroscopiche** che insorgono per mezzo di questo **meccanismo microscopico** basato sullo scambio di quanti virtuali.

Ricordiamo che le relazioni tra fluttuazioni della energia e dell'impulso e quelle della massa

$$\Delta M = \frac{E}{Mc^4} \Delta E \quad \Delta M = \frac{p}{Mc^2} \Delta p$$

eguagliando otteniamo

$$\Delta E \approx \frac{pc^2}{E} \Delta p$$

Tenendo conto delle relazioni di indeterminazione della energia otteniamo la seguente stima del **tempo di emissione del quanto virtuale**

$$\Delta t_e \approx \frac{hE}{pc^2} \frac{1}{\Delta p_e}$$

e quindi anche la seguente espressione della **forza dovuta alla emissione del quanto elementare**

$$\Delta F_e \approx \frac{\Delta p_e}{\Delta t_e} \approx \frac{c}{h} \frac{pc}{E} \Delta p^2 \approx \frac{c}{h} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{mc}{p}\right)^2}} \Delta p^2 \approx \frac{c}{h} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{mc}{\Delta p}\right)^2}} \Delta p^2$$

dove abbiamo posto i valori centrali dell'impulso uguali al valore delle fluttuazioni. **Tenendo ora conto delle relazioni di indeterminazione dell'impulso otteniamo**

$$\Delta F_e \approx \frac{hc}{\sqrt{1 + \left(\frac{mc}{h} \Delta x\right)^2}} \frac{1}{\Delta x^2} \quad (8)$$

Notiamo subito che *nel caso di quanti non massivi si ottiene un andamento spaziale della forza del tipo $1/r^2$ mentre nel caso di quanti massivi la forza si spegne più rapidamente in un modo controllato essenzialmente dalla lunghezza Compton.*

Ora possiamo cercare di scrivere l'espressione macroscopica della forza intercorrente tra due particelle libere accoppiate al medesimo campo Y massivo immaginando che ciascuna di esse possa emettere o assorbire quanti virtuali di Y secondo un processo statistico dove il tempo medio tra due emissioni-assorbimenti successivi vale ΔT_{ee} . Ipotizzando che nell'intervallo di tempo macroscopico vi siano N atti di emissione o assorbimento otteniamo

$$F^{macro} \approx \frac{\Delta P^{macro}}{\Delta T} \approx \frac{\sum_{j=1}^N \Delta P_j^{micro}}{\Delta T} \approx \frac{\sum_{j=1}^N \Delta T_{je} \frac{\Delta P_j^{micro}}{\Delta T_{je}}}{N \Delta T_{ee}} \approx \frac{N \Delta T_e \Delta F_e}{N \Delta T_{ee}} \approx \left(\frac{\Delta T_e}{\Delta T_{ee}} \right) \Delta F_e \quad (9)$$

dove, abbiamo preso gli elementi della sommatoria tutti uguali e di valore ΔF_e pensato come valore medio. Notiamo che l'intensità della forza dipende dal quoziente adimensionale $(\Delta T_e / \Delta T_{ee})$ tra il tempo medio di emissione o assorbimento del quanto ed il tempo medio intercorrente tra due successive emissioni-assorbimenti. E' naturale assumere tale quoziente come una *misura della intensità della interazione* poiché assume un valore elevato quando il tempo tra due emissioni-assorbimenti successivi è breve, ovvero l'interazione è intensa, e viceversa. Per avere una quantità definita nel singolo vertice di emissione o assorbimento introdurremo la seguente **intensità adimensionale della interazione**

$$\delta^2 = \left(\frac{\Delta T_e}{\Delta T_{ee}} \right) \quad (10)$$

Sostituendo, otteniamo la seguente espressione della **forza macroscopica tra due particelle dovuta agli atti elementari di emissione e/o assorbimento di quanti virtuali del campo Y**

$$F^{macro} \approx \delta^2 \frac{hc}{\sqrt{1 + \left(\frac{mc}{h} \Delta x \right)^2}} \frac{1}{\Delta x^2} \quad (11)$$

Il profilo spaziale, invece, risulta essenzialmente regolato dalla massa m del campo cui appartengono i quanti virtuali emessi/assorbiti. Nel caso di massa m non nulla l'interazione diminuisce rapidamente oltre la lunghezza compton mentre nel caso di massa nulla diminuisce con un profilo $1/r^2$.

Nel caso della forza elettromagnetica l'espressione (9), ponendo $m=0$, può essere confrontata con la legge di Coulomb. Si ottiene

$$F^{Coulomb} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\Delta x^2} \approx \delta^2 \frac{hc}{\Delta x^2}$$

da cui

$$\delta^2 = \left(\frac{\Delta T_e}{\Delta T_{ee}} \right) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{hc} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c}$$

La quantità adimensionale a secondo membro occupa un ruolo fondamentale nella teoria di campo quantizzato della interazione elettromagnetica (ed in generale in tutte le trattazioni quantistiche del campo elettromagnetico) e viene detta **costante di struttura fina** indicata con il simbolo α

$$\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c} = 1/137.035999074(44)$$

Otteniamo allora che l'intensità della interazione elettromagnetica, nel senso precisato poco fa, è proprio misurato dalla costante adimensionale di struttura fina

$$\left(\frac{\Delta T_e}{\Delta T_{ee}} \right) \approx \alpha \approx \frac{1}{137}$$

Tale formula interpreta la costante di struttura fina chiarendo che **nella interazione elettromagnetica il tempo intercorrente tra due successive emissioni/assorbimenti è in media 137 volte più lungo del tempo di emissione del singolo quanto.**

Consideriamo ora il caso di una interazione con $m \neq 0$ che da luogo ad una interazione a corto raggio. A distanze **molto maggiori della lunghezza compton** la forza assume la forma seguente

$$F^{macro} \approx \delta^2 \frac{hc}{\sqrt{1 + \left(\frac{mc}{h} \Delta x \right)^2}} \frac{1}{\Delta x^2} \approx \left(\delta^2 \frac{1}{m} \right) \frac{h^2}{\Delta x^3}$$

da cui si vede che **a tali distanze non risulta possibile stabilire se l'intensità osservata della forza sia dovuta ad una certa intensità della interazione nel vertice di emissione/assorbimento oppure ad una certa massa del quanto virtuale emesso.**

Ad esempio, vedremo nel caso della interazione debole che ciò comporta che a grandi distanze, ovvero attraverso processi con basso impulso trasferito, non sia possibile stabilire se la debolezza della interazione sia dovuta ad un piccola intensità al vertice o ad una grande massa del mediatore dell' interazione. La teoria unificata delle interazioni deboli ed elettromagnetiche mostrerà che l'intensità al vertice è quella del processo elettromagnetico e che l'interazione appare debole solo perché mediata da quanti virtuali molto massivi.

Tornando alla (9) possiamo ottenere una **espressione approssimata all'interno della lunghezza compton** sviluppando in serie

$$F^{macro} \approx \delta^2 \frac{hc}{\sqrt{1 + \left(\frac{mc}{h} \Delta x\right)^2}} \frac{1}{\Delta x^2} \approx \delta^2 \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{h} \Delta x\right)^2\right] \frac{1}{\Delta x^2} \approx \delta^2 \left[\frac{1}{\Delta x^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{h}\right)^2\right]$$

da cui ricaviamo il potenziale

$$V^{macro} \approx \delta^2 \left[\frac{1}{\Delta x} + \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{h}\right)^2 \Delta x\right] \approx \delta^2 \frac{1}{\Delta x} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{h} \Delta x\right)^2\right] \approx \delta^2 \frac{1}{\Delta x} \left[1 - \left(\frac{mc}{h} \Delta x\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{h} \Delta x\right)^2\right]$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo aggiunto un ininfluente termine costante nel potenziale che però ci permette di riconoscere i primi tre termini dello sviluppo in serie di $\exp -\left(mc \frac{\Delta x}{h}\right)$. Otteniamo allora

$$V^{macro} \approx \delta^2 \frac{1}{\Delta x} e^{-\frac{mc}{h} \Delta x} \approx \delta^2 \frac{1}{x} e^{-\frac{x}{h/mc}} \quad (12)$$

che è in effetti il **potenziale di Yukawa** introdotto per descrivere le forze mediate dallo scambio di quanti virtuali massivi.

Queste considerazioni di natura qualitativa dovrebbero comunque avere chiarito che le particelle virtuali giocano un ruolo fondamentale nei processi microscopici che sono alla base del meccanismo della interazione tra particelle. E' utile riassumere ciò che abbiamo detto

- i) quando due campi X e Y sono accoppiati tra loro, una *particella X emette o assorbe quanti di Y* (e viceversa);
- ii) il processo di emissione e assorbimento di Y da parte di X è *intrinsecamente probabilistico* e regolato da una *intensità caratteristica adimensionale* δ sostanzialmente connessa al tasso dei processi di emissione o assorbimento ;

-
- i) se la particella X è soggetta ad una *forza esterna* allora può irradiare *quanti reali di Y* ma se è *libera* può irradiare solo *quanti virtuali di Y* ;
 - ii) mentre i quanti reali di Y (se stabili) possono propagarsi liberamente nello spazio e nel tempo, i quanti virtuali possono sussistere solo attraverso le *fluttuazioni spontanee* della energia e dell'impulso esistenti alle piccole scale temporali e spaziali descritte dalle relazioni di indeterminazione. Tali fluttuazioni spontanee sono in grado di sostenere gli stati virtuali entro limiti spaziali e temporali stimati dalla *lunghezza compton di Y* ;
 - iii) se la particella X è *isolata* il quanto virtuale Y viene riassorbito da X stessa, ma se X non è isolata, allora Y può essere assorbito da una seconda particella X' realizzando un trasferimento netto di energia e quantità di moto tra X e X' per mezzo di Y che rappresenta l'evento microscopico alla base del processo di interazione;
 - iv) l'intensità ed il profilo spaziale della interazione è governato da due parametri, l'intensità adimensionale δ di emissione o assorbimento al vertice e la massa m del quanto virtuale irradiato;
 - v) se la massa m del quanto irradiato è nulla allora gli stati virtuali possono estendersi illimitatamente nello spazio e nel tempo (ovvero i quanti virtuali possono essere scambiati tra particelle infinitamente distanti nello spazio e nel tempo) e si ha una interazione di *raggio infinito* inversamente proporzionale al quadrato della distanza;
 - vi) se la massa m del quanto irradiato è non nulla, gli stati virtuali possono estendersi solo entro i limiti spaziali e temporali stimati dalla *lunghezza compton di Y* (ovvero i quanti virtuali possono essere scambiati tra particelle la cui distanza nello spazio e nel tempo non eccede di troppo la lunghezza compton di Y) e si ha una interazione di *raggio finito* che scende rapidamente a zero con la distanza (il potenziale della interazione dipende da un esponenziale negativo!);
 - vii) l'intensità di una interazione di raggio finito, ad un certa distanza, dipende dalla intensità al vertice δ e dalla massa m del quanto virtuale scambiato. Ciò comporta che, se non si ha la possibilità di esplorare tutte le distanze, esistano diverse combinazioni di valori di δ ed m compatibili con l'intensità osservata per cui la stessa forza può essere spiegata con un elevato valore δ ed un grande valore di m oppure con un piccolo valore di δ ed un piccolo valore di m .

CONSEGUENZE INEVITABILI DEI QUANTI VIRTUALI. Se da una lato i quanti virtuali forniscono un meccanismo microscopico per le interazioni naturali, dall'altro comportano una serie di conseguenze che, almeno inizialmente, costituiscono una seria difficoltà per l'intera teoria.

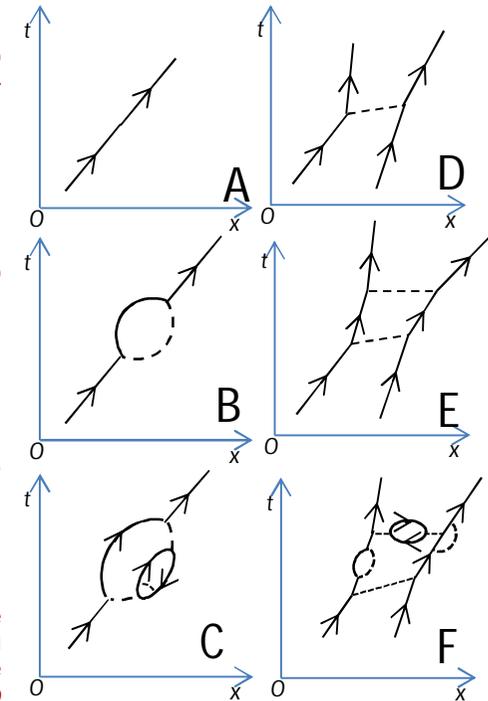
Quando due campi X e Y sono accoppiati tra loro con una certa intensità caratteristica accade che il quanto libero X abbia una certa probabilità caratteristica di irradiare quanti virtuali di Y. Se X non è isolato è possibile che tali quanti virtuali Y vengano assorbiti da X' dando luogo ad una interazione tra X e X' mediata da Y. È evidente che tale meccanismo presuppone che **la emissione di quanti virtuali Y da parte di X sia un processo continuo ed inarrestabile** che avviene sempre anche quando X è libero (classicamente questo problema non si pone perché, non essendo riconosciuto il principio di indeterminazione, non vengono nemmeno riconosciuti gli stati virtuali del campo elettromagnetico ovvero gli stati che violano le ordinarie relazioni di dispersione dettate dalle equazioni d'onda). Tale fatto *complica enormemente sia il concetto di particella isolata che il concetto di interazione tra particelle.*

Per vederlo vogliamo considerare il caso della interazione elettromagnetica. Un elettrone libero ha sicuramente una certa probabilità di non irraggiare alcun quanto virtuale (A). Tuttavia esiste una certa probabilità che possa emettere e poi assorbire un quanto virtuale nel modo indicato dal diagramma B. Ma nulla può impedire che si realizzi il più complicato processo descritto dal diagramma C oppure che si realizzino processi ancora più complicati con un grande numero di vertici e linee interne. Siccome *questi processi di emissione ed assorbimento di quanti virtuali non vengono osservati, secondo le regole della meccanica quantistica l'ampiezza complessiva si ottiene sommando in interferenza le ampiezze di tutti i processi virtuali compatibili con il processo osservato* ovvero con l'elettrone libero.

Giungiamo allora alla conclusione che l'interazione tra carica e campo elettromagnetico, attraverso i processi virtuali, si riflette anche sullo stato dell'elettrone libero che **deve essere pensato come la somma di tutti i sottostanti processi virtuali possibili.**

Lo stesso accade nel caso della interazione tra due cariche elettriche che a suo tempo descrivemmo con il semplice diagramma D. Nulla impedisce che la stessa interazione avvenga con le topologie più complesse indicate nei diagrammi E ed F, oppure in modo ancora più complicato con un grande numero di vertici e linee interne. Siccome *questi processi di emissione ed assorbimento di quanti virtuali non vengono osservati, secondo le regole della meccanica quantistica l'ampiezza complessiva si ottiene sommando in interferenza le ampiezze di tutti i processi virtuali compatibili con il processo osservato* ovvero con la diffusione dei due elettroni.

Giungiamo allora alla conclusione che l'interazione tra carica e campo elettromagnetico, attraverso i processi virtuali, si riflette anche sulla interazione tra elettroni che **deve essere pensata come la somma di tutti i sottostanti processi virtuali possibili.**



Naturalmente ciò che abbiamo detto nel caso della interazione elettromagnetica deve essere esteso a tutte le altre interazioni. Ciò significa che, se la particella oltre ad essere soggetta alle interazioni elettromagnetiche è pure soggetta alle interazioni forti, il suo stato libero e le sue interazioni saranno il risultato della somma di tutti i sottostanti processi virtuali ad interazione elettromagnetica e forte. Si giunge così a comprendere un aspetto assai caratteristico delle teorie di campo quantizzato ovvero che **gli stati liberi ed interagenti di una particella devono essere pensati come la somma di tutti i processi virtuali caratteristici delle interazioni cui è soggetta compatibili con il processo osservato**. La somma delle ampiezze di tali processi prende il nome di **serie perturbativa**.

Questo stato di cose apre un ovvio problema computazionale poiché se si vuole calcolare l'ampiezza di un qualunque processo si dovranno prima **calcolare e poi sommare le ampiezze degli infiniti processi virtuali compatibili con il processo osservato**. Una parziale via d'uscita a questo problema può essere trovata osservando che, mano a mano che viene complicata la topologia della interazione, aumenta inevitabilmente anche il numero di vertici coinvolti (il cosiddetto ordine del diagramma). Se l'interazione è tale per cui **la probabilità di emissione del quanto virtuale al vertice risulti inferiore all'unità** allora le topologie più complesse avranno ampiezze soppresse rispetto a quelle più semplici. Ciò significa che si può pensare di ordinare le varie topologie in base al numero di vertici contenuti calcolando solo i diagrammi necessari per raggiungere una prefissata precisione. Quando ciò è possibile si dice che **l'interazione è trattabile perturbativamente** (l'interazione elettromagnetica rientra in questa categoria d'interazioni poiché la probabilità di emissione al vertice vale $\sim\sqrt{1/137}$).

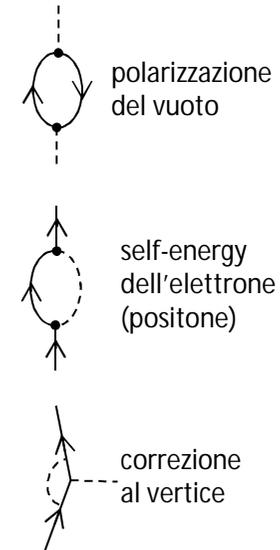
Se invece la probabilità di emissione o assorbimento di un quanto virtuale del campo di forza è superiore all'unità i diagrammi più complessi contribuiscono in misura sempre più rilevante privando la procedura di ogni valore pratico. In tale caso si dice che **l'interazione non è trattabile perturbativamente** e si deve ricorrere ad altri metodi di calcolo detti in generale *metodi non perturbativi* (poiché nel regime delle basse energie le interazioni forti rientrano in questa categoria i metodi non perturbativi nella teoria dei campi si sono sviluppati soprattutto all'interno della cromodinamica quantistica. Negli ultimi trent'anni grandi progressi sono stati fatti seguendo una tecnica introdotta da Wilson nel 1974 che consiste nell'eseguire il calcolo diretto delle ampiezze in spazi-tempo discretizzati, detti reticoli, attraverso un massiccio uso dei calcolatori. Si sono anche sviluppate tecniche analitiche assai complesse di validità però parziale. Premesso che si tratta dell'area forse più difficile della teoria dei campi è diffusa l'idea che una vasta fenomenologia di fondamentale importanza sia di natura non perturbativa).

Anche limitandosi al caso delle interazioni trattabili perturbativamente sorgono altre formidabili difficoltà poichè si scopre facilmente che **non è garantita la finitezza dei singoli termini della serie perturbativa**. In particolare si trova che i **processi con topologie contenenti 'loop' assumono un valore infinito**.

Ad esempio nel caso della interazione elettromagnetica, considerando i termini successivi della serie perturbativa, si scopre che le tre tipologie di diagrammi indicate a fianco forniscono un valore dell'ampiezza infinito.

Storicamente fu proprio questo fatto (scoperto da Heisenberg e Pauli, 1929 e da Oppenheimer, 1930) che arrestò il percorso della teoria dei campi per oltre un ventennio fino alla fine degli anni '40 quando, per merito dei lavori di Weisskopf, Bethe, Feynman, Schwinger, Tomonaga e Dyson, si giunse a mettere a punto una elaborata tecnica di rimozione degli infiniti detta **rinormalizzazione**.

La tecnica si articola in varie parti. Nella prima, detta di **regolarizzazione**, si esegue il calcolo dell'ampiezza cercando di separare le parti finite da quelle divergenti. Questo può essere fatto inserendo tagli sugli integrali ma oggi si preferisce la cosiddetta regolarizzazione dimensionale (Giambiagi, Bollini 1972) la quale, sfruttando le proprietà della funzione gamma, esegue il calcolo degli integrali in uno spazio a $4-\epsilon$ dimensioni preservando la Lorentz invarianza (persa invece con le altre tecniche di regolarizzazione). Nella fase successiva, detta di **rinormalizzazione**, a ciascuna parte divergente trovata in fase di regolarizzazione si contrappone un opportuno diagramma (detto controtermine) che la elimina. Si ottiene allora l'ampiezza rinormalizzata e si manda ϵ a zero recuperando le 4 dimensioni dove l'ampiezza assume ora un valore finito. Dato che **la serie perturbativa è costituita da infiniti termini, un punto per niente scontato è che introducendo un numero finito di controtermini si possa di fatto rimuovere gli infiniti in tutti i suoi termini**. Quando questo accade si dice che la **teoria di campo è rinormalizzabile**. Come è facile intuire, la dimostrazione della rinormalizzabilità di una teoria può essere molto complessa, nel caso della elettrodinamica essa fu fornita da F. Dyson nel 1949 - che introdusse anche il concetto di rinormalizzabilità appena ricordato - mentre nel caso delle teorie di Yang-Mills, alla base delle teorie di campo quantizzato delle interazioni deboli e forti, la prova fu fornita da t'Hooft e Veltman nel 1971.



Notevolissime sono le conseguenze della procedura di rinormalizzazione sia sul piano delle previsioni (che diventano di una precisione sbalorditiva) che sul piano concettuale.

La rimozione degli infiniti, infatti, comporta che i parametri fisici (principalmente massa e carica) con cui la particella interviene nel calcolo dell'ampiezza (**parametri nudi**) debbano essere ridefiniti in nuovi parametri (**parametri vestiti o rinormalizzati**) oltretutto **dipendenti dal quadrimpulso trasferito nel processo**.

Questo fatto viene interpretato qualitativamente pensando la particella come una struttura complessa costituito da un 'core' interno caratterizzato dai parametri nudi, rivestito dalla 'nube' di processi virtuali dovuti agli accoppiamenti con gli altri campi, che porta un proprio contributo ai parametri fisici della particella modificandoli in quelli rinormalizzati. Dato che le particelle non possono essere separate dai processi virtuali dovuti ai suoi accoppiamenti ciò che osserviamo sperimentalmente sono i parametri rinormalizzati non quelli nudi. Per osservare questi ultimi si dovrebbero spegnere tutti gli accoppiamenti della particella, cosa evidentemente impossibile.

Ad esempio l'elettrone libero deve essere pensato come somma di tutti i possibili processi virtuali di emissione e riassorbimento. Tra questi processi, quelli che prevedono l'emissione di un fotone virtuale che si converte in una coppia elettrone positone che poi si annichila in un fotone che viene poi riassorbito, portano alla comparsa temporanea di un dipolo elettrico che tenderà ad essere orientato dalla carica elettrica dell'elettrone iniziale schermandone il valore. Quindi l'elettrone interviene nei diagrammi con il valore della carica non schermata mentre il valore che viene misurato in laboratorio corrisponde a quello della carica schermata.

Il fatto poi che i parametri rinormalizzati dipendano dal quadrimpulso trasferito comporta che i parametri fisici con cui le particelle intervengono nei processi non siano costanti ma dipendano dalla energia in gioco. Questo fatto viene interpretato qualitativamente osservando che al variare della energia del processo cambia anche la lunghezza d'onda quantomeccanica delle particelle coinvolte e con essa il loro reciproco potere risolutivo ovvero la loro reciproca capacità di risolvere in misura diversa il core dai processi virtuali. In questo modo variando l'energia varia il grado di penetrazione all'interno delle rispettive nubi di processi virtuali e con esso, quindi, il valore dei parametri fisici con cui vi intervengono. Ha così luogo un tipico effetto previsto dalle teorie di campo quantizzato che prende il nome di **'running' dei parametri**.

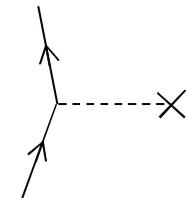
ALCUNE VERIFICHE SPERIMENTALI. Storicamente, la prova definitiva che gli stati virtuali e le elaborate tecniche di rimozione degli infiniti della teoria di campo quantizzato della interazione elettromagnetica avevano una enorme capacità predittiva fu ottenuta sul finire degli anni '40. In una ormai storica *Conference on the Foundations of quantum Mechanics* tenuta a Shelter Island (NY) nel Giugno del 1947, alcuni fisici sperimentali richiamarono l'attenzione su due piccoli ma decisivi effetti nell'atomo d'idrogeno che la teoria relativistica di Dirac non calcolava correttamente

- **Willis Lamb**, con una tecnica geniale, riuscì a misurare lo splitting tra i livelli $2S_{1/2}$ e $2P_{1/2}$ dell'atomo di idrogeno (circa 1000 MHz) che secondo la teoria di Dirac doveva essere assente (l'idrogeno molecolare viene dissociato termicamente in atomi singoli; questi vengono bombardati da elettroni e, in una piccola frazione, si portano sul livello metastabile $2S$; attraverso un campo magnetico ed una radiofrequenza finemente accordata vengono favorite le transizioni verso il livello $2P$ che rapidamente si diseccita sul livello $1S$; dal valore della frequenza radio si estrae la differenza di energia tra i livelli $2S$ e $2P$ dell'atomo d'idrogeno; il valore misurato da Lamb vale 1059 MHz);
- **Isidor Rabi**, con il metodo della risonanza magnetica da lui inventato, misurò il momento magnetico dell'elettrone (circa 1.0013) che risultava essere lievemente maggiore del valore unitario previsto da Dirac.

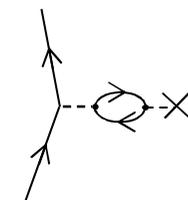
Tali esperimenti diedero un fortissimo impulso allo sviluppo al lavoro teorico che produsse subito un certo numero di lavori fondamentali.

Per quanto riguarda il Lamb shift, un primo calcolo non relativistico, che eliminava le divergenze con un semplice taglio sugli integrali, fu eseguito nel 1947 da Bethe e fornì il valore quasi corretto di 1040 MHz. Calcoli relativistici furono eseguiti negli anni seguenti da diversi autori: Feynmann 1948, Tomonaga et al. 1948, Weisskopf & French 1949, Schwinger 1949, Kroll e Lamb 1949. Tali lavori erano basati sulla idea che il semplice potenziale coulombiano, che di solito veniva inserito nella equazione di Dirac per il calcolo dei livelli energetici dell'atomo d'idrogeno, dovesse tenere conto dei processi virtuali indicati a lato che risultarono pesare nel modo seguente

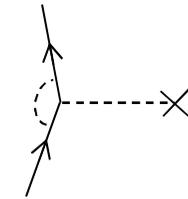
Polarizzazione del vuoto	-27 MHz	
Self energy	+1017 MHz	
Correzione al vertice	+68 MHz	TOT +1058 MHz



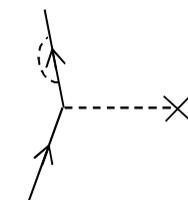
potenziale coulombiano



correzione dovuta alla polarizzazione del vuoto



correzione al vertice



correzione dovuta alla self-energy

Per quanto riguarda il momento magnetico dell'elettrone è necessario premettere che, secondo la **teoria di Dirac**, una **particella puntiforme** di spin $s=1/2$ \hbar possiede un **momento di dipolo magnetico** dato dalla formula

$$\vec{\mu} = g(e\hbar/2m)\vec{s} \quad g=2$$

dove **S** è lo **spin**, la quantità tra parentesi viene detta **magnetone di Bohr** e **g** è il cosiddetto **rapporto giromagnetico**. Tenendo conto delle **correzioni elettrodinamiche** (il primo calcolo relativistico compiuto da Schwinger nel 1948 mostrava che la correzione al vertice doveva fornire il contributo principale) il valore del rapporto giromagnetico viene **spostato di una quantità α** molto piccola calcolabile teoricamente con grande precisione **$g=2(1+\alpha)$** . Gli specialisti, piuttosto che ragionare sul momento magnetico si confrontano direttamente con la **correzione al rapporto giromagnetico**

$$\alpha = (g - 2) / 2$$

Se le correzioni elettrodinamiche (ed in generale le correzioni apportate da tutte le interazioni cui è soggetta la particella) riescono a riprodurre correttamente il valore sperimentale della $(g-2)/2$ allora, oltre alla verifica della teoria, si ottiene anche la **prova della puntiformità o elementarità della particella** (nel senso che evidentemente si tratta di una particella che soddisfa l'equazione di Dirac, dunque elementare, cui vanno aggiunti gli inevitabili processi virtuali associati alle sue interazioni).

La situazione per quanto riguarda i tre leptoni fondamentali del modello standard è riportata nella tabella. I valori sperimentali sono medie mondiali, mentre quelli teorici tengono conto non solo delle interazioni elettromagnetiche ma anche di quelle deboli e forti. Nel caso dell'elettrone si osserva uno spettacolare accordo fino alla undicesima cifra decimale. Nel caso del muone si osserva un interessante accordo/disaccordo dell'ordine di tre sigma tra teoria ed esperimenti. Problematica infine la situazione sperimentale per quanto riguarda il tau.

		g-2/2
e	Esp	0.00115965218279(771)
	Teo	0.00115965218073(28)
μ	Esp	0.00116592089(63)
	Teo	0.00116591802(49)
τ	Esp	-0.052 \rightarrow 0.013
	Teo	0.00117721(5)

A partire dalla fine degli anni '40, le teorie di campo quantizzato hanno accumulato una serie impressionante di successi. Dapprima fornendo previsioni di una precisione spettacolare di tutta una serie di processi relativi alla interazione elettromagnetica poi, nella forma generalizzata proposta da Yang e Mills, dimostrandosi capace di spiegare le proprietà delle interazioni deboli (Teoria unificata delle interazioni deboli ed elettromagnetiche) e forti (Cromodinamica quantistica, QCD). Tali successi hanno posto in ombra alcune incompletezze. Ad esempio, nel caso di interazioni trattabili perturbativamente e rinormalizzabili si sa che i termini della serie perturbativa sono tutti finiti e che la serie troncata ad un qualche ordine fornisce previsioni in accordo con gli esperimenti. Tuttavia, anche nel caso della QED, non esiste una prova che la serie perturbativa sia complessivamente convergente, anzi Dyson mostrò, con una argomentazione pubblicata nel 1952, che il raggio di convergenza della serie in questo caso è addirittura nullo!

Le interazioni forti

proprietà della 'carica forte'

In quel che segue ci occuperemo delle interazioni forti richiamando, integrando e discutendo più a fondo alcune proprietà delle interazioni forti ricordate nel capitolo generale sul modello standard (Uno sguardo al modello Standard).

Come già ricordato, l'esistenza della *forza forte* fu intuita da Rutherford il quale, avendo chiarito la struttura dell'atomo, comprese che protoni e neutroni potevano coesistere in una struttura compatta come il nucleo solo se tra di loro esisteva una forza di natura attrattiva più intensa di quella coulombiana repulsiva dei protoni.

Una proprietà della interazione forte che Heisenberg e Majorana (1932) compresero sin dall'inizio riguardava la sostanziale coincidenza della intensità della forza forte che si esercitava tra le coppie neutrone-neutrone, neutrone-protone, protone-protone. Da tale fatto si deduce va che i) ***l'interazione forte non si origina dalla carica elettrica ma da un qualche altro tipo di 'carica forte'*** ; ii) ***neutroni e protoni possiedono la stessa 'carica forte'***. Inoltre, dato che neutrone e protone hanno approssimativamente la stessa massa, Heisenberg e Majorana proposero che, dal punto di vista delle interazioni forti, neutrone e protone potevano essere descritti come due stati interni differenti della stessa particella che chiamarono ***nucleone***. Data la sua analogia formale con lo spin, i numeri quantici interni necessari per descrivere tali stati interni vennero detti ***isospin*** (nome proposto da Wigner nel 1936).

non tutte le particelle interagiscono fortemente

Una idea allora quasi implicita era che l'elettrone, che sentiva la carica elettrica dei protoni nucleari, non sentisse la loro 'carica forte'. Ciò voleva dire che l'elettrone, a differenza dei protoni e dei neutroni, non era una particella capace di interagire fortemente, un fatto che suggeriva che ***l'interazione forte non è una proprietà universale solo delle particelle***. In questo modo si introduceva l'attuale distinzione in particelle ***fortemente interagenti*** dette ***adroni*** (dal greco adros=forte) e ***particelle non fortemente interagenti*** dette ***leptoni*** (dal greco leptos=leggero poiché solitamente più leggeri degli adroni).

fenomenologia della interazione forte presso gli acceleratori

Nei decenni seguenti le macchine acceleratrici studiarono a fondo le proprietà della interazione forte che si manifestarono con una fenomenologia molto complessa resistendo per lungo tempo ad ogni tentativo di inquadramento teorico.

Come spiegato nella prima parte del corso, attraverso esperimenti di diffusione di protoni (e neutroni) non troppo energetici su bersagli materiali, risulta possibile ***studiare in modo dettagliato la struttura e l'andamento spaziale del potenziale della forza forte*** (si trova allora che al di sotto di 0.7 fm la forza è repulsiva, oltre i 0.7 fm diventa attrattiva per raggiungere il massimo a circa 1 fm dopodiché diminuisce esponenzialmente fino ad esaurirsi a circa 2 fm. Possiede inoltre componenti sia centrali che non centrali, dette tensoriali, dipendenti dall'allineamento relativo degli spin).

**alcune proprietà
generali degli adroni**

Salendo in energia, la collisione di protoni con bersagli comincia a dare luogo a *particelle di nuovo tipo* non presenti nello stato iniziale (protone collidente e bersaglio materiale). Il **numero e la varietà di tali 'particelle' cresce con l'aumentare della energia a disposizione del sistema** ovvero con l'energia delle particelle proiettile. Di ciò ci si accorse a partire dagli anni '50 con la costruzione di acceleratori di energia via via crescente quando il numero e la tipologia di questi stati crebbe rapidamente superando il centinaio ed originando quel fenomeno piuttosto sconcertante ricordato con il nome di **'proliferazione degli adroni'**. Un fenomeno che caratterizzava la sola interazione forte poiché *non si osservò una corrispondente proliferazione dei leptoni* i quali, invece, si manifestavano in un numero molto limitato di particelle.

La caratteristica comune di tali 'particelle' fortemente interagenti è di essere **'molto instabili'** decadendo con una **brevevissima vita media** (con valori tipici dell'ordine di 10^{-22} s) in altre 'particelle' più leggere sempre instabili fino a raggiungere, in un certo numero di passaggi, un ben definito insieme di 'particelle' **'quasi stabili'** con vite medie molto più lunghe comprese tra i 10^{-8} e i 10^{-12} s. La grande differenza tra i valori della vita media degli stati *fortemente instabili* e di quelli *quasi stabili* indica che il decadimento dei primi è governato dalla interazione forte mentre quello dei secondi da una interazione meno intensa, presumibilmente quella elettromagnetica e/o debole. In virtù della loro pronunciata instabilità tali 'particelle' fortemente interagenti vengono spesso chiamate **risonanze**.

Naturalmente, le proprietà di questi adroni fortemente instabili e quasi stabili furono studiate con grande dettaglio misurando *spin, masse, modi e frazioni di decadimento nei diversi canali*, etc. etc. per mezzo di un monumentale lavoro sia sperimentale che teorico durato decine d'anni e riassunto (assieme ad altre aree della fisica delle particelle) in quel grande 'data base' aggiornato e pubblicato periodicamente dal Particle Data Group (PDG, disponibile gratuitamente online).

Semplificando assai si osserva che gli adroni si presentano in due grandi gruppi ben distinti:

- un gruppo di adroni tendenzialmente più leggeri, di *spin intero*, formato sia da particelle che da antiparticelle sia cariche che neutre che vengono detti **mesoni** (dal greco mesos=mezzo);
- un gruppo di adroni tendenzialmente più pesanti, di *spin semintero*, formato da particelle cariche e neutre detti **barioni** (dal greco barys= pesante), ben separato da uno speculare gruppo di adroni di spin semintero formato da antiparticelle cariche e neutre detti **antibarioni**;
- sia i mesoni che i barioni e gli antibarioni si presentano in famiglie di sapore di varia numerosità, massa approssimativamente uguale e cariche elettriche differenti.

il modello a quark

Il problema degli adroni venne risolto gradualmente a partire dalla metà degli anni '60. Un primo passo decisivo fu la formulazione del **modello a quark** da parte di M. Gell-Mann e G. Zweig nel 1964 che ebbe un ruolo simile alla tavola periodica degli elementi in chimica.

L'ipotesi basilare del modello è che gli **adroni osservati** non siano *particelle elementari* ma, piuttosto, **particelle composte** da un numero relativamente piccolo di particelle elementari. L'analisi dettagliata degli adroni allora noti li condusse alla conclusione che si poteva spiegare in modo soddisfacente le loro proprietà statiche quali *masse, spin, cariche elettriche e numeri quantici di sapore*, postulando l'esistenza di:

- tre diversi tipi o sapori di particelle elementari dette **quark** (un nome di fantasia proposto da Gell-Mann e tratto dai *Finnegans Wake* di J. Joyce) ed indicate con i nomi **up, down e strange**;
- ciascuno dotato di **spin $s=1/2$** , una certa **massa** ed una certa **carica frazionaria**;
- tutti capaci di interagire fortemente;
- dove l'interazione è strutturata in modo tale da formare stati legati a due quark del tipo **quark-antiquark** e stati a tre quark del tipo **quark-quark-quark** e **antiquark-antiquark-antiquark**.

Inoltre, interpretando gli adroni osservati come stati legati di quark, risultava naturale immaginare un certo numero di

- **stati fondamentali stabili rispetto alla interazione forte** ma non rispetto a quella debole e/o elettromagnetica che potevano così fare decadere tali stati con tempi molto più lunghi in accordo con i dati sperimentali. Ciò suggeriva di identificare questi **stati fondamentali stabili rispetto alle interazioni forti** con gli **adroni quasi stabili** osservati;

e numerosi

- **stati eccitati instabili rispetto alla interazione forte** la quale, essendo la più intensa, mascherava la instabilità indotta dalle interazioni deboli e/o elettromagnetiche determinando le *brevissime vite medie* osservate sperimentalmente. La intensità della interazione determinava anche una forte differenza di energia potenziale e con essa una **forte differenza di massa** tra tali stati (in accordo con la inerzia della energia valida nella teoria della relatività ristretta). Tali stati eccitati potevano così essere identificati con i numerosissimi **adroni risonanti instabili** di massa diversa.

In sintesi il modello a quark scopre che gli adroni osservati altro non sono che i diversi livelli energetici eccitati instabili o fondamentali stabili di un certo numero di differenti **'atomi' di quark** ovvero la manifestazione di una assai complessa **spettroscopia delle interazioni forti** (spesso separata in *spettroscopia mesonica* e *barionica*).

Nonostante i suoi pregi, non mancarono **alcune resistenze** legate al fatto che **nessuno aveva mai osservato i quark liberi** (ne riuscirà ad osservarli nonostante i numerosi tentativi). Facendo collidere adroni ad energie sempre maggiori si verifica che piuttosto che spezzare gli adroni nei quark componenti, **l'energia si 'dissipa' creando nuovi adroni o addirittura getti di adroni** riproponendo il 'paradosso' della calamita spezzata. A quanto pare le interazioni forti sono strutturate in modo tale da impedire la frantumazione di un adrone, un fatto empirico descritto con il termine '**confinamento**'.

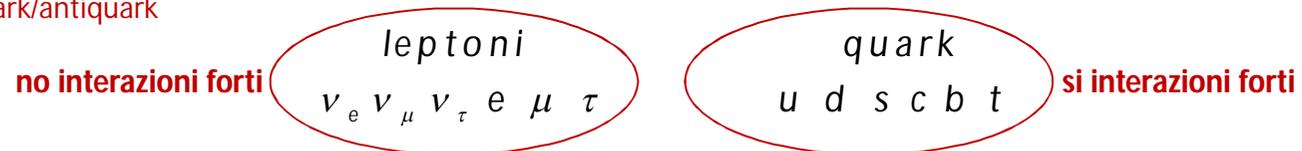
nasce la fisica dei quark

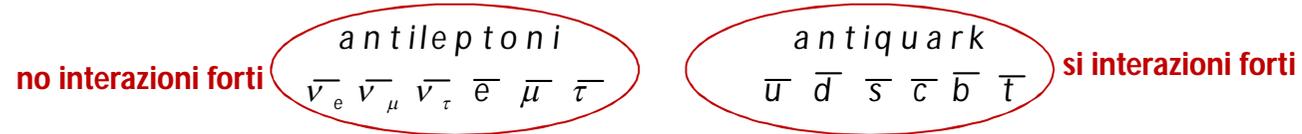
Comunque il modello si impose ed avviò un completo ripensamento soprattutto della fisica degli adroni che divenne di fatto una **spettroscopia dei quark**. Non fu un caso, infatti, che pochi anni dopo la formulazione del modello a quark si pervenne, nei primi anni '70, ad una teoria di campo quantizzato delle interazioni forti: la **Cromodinamica Quantistica**, la cui accettazione è in larga misura basata sul fenomeno della libertà asintotica (cui accenneremo), prevista teoricamente da D. Gross, D. Politzer e F. Wilczek (premi Nobel nel 2004) e confermata sperimentalmente negli anni successivi.

tre nuovi quark

Con l'aumentare della energia delle macchine acceleratrici anche dopo gli anni '70 si continuarono a scoprire nuovi adroni di massa più grande con proprietà simili ai precedenti. La via però era segnata e da allora si è sempre riusciti ad interpretare tali nuovi adroni semplicemente allungando la lista dei quark fondamentali. Così, accanto ai quark **up, down e strange**, si è resa necessaria prima l'introduzione del **quark charm** [anticipato teoricamente da Glashow, Iliopoulos e Maiani ed osservato sperimentalmente da B. Richter e S. Ting nel 1974 nel mesone J/ψ , formato dai quark **charm-anticharm** legati tra loro (premi Nobel nel 1976)]; poi del **quark bottom** [osservato sperimentalmente da L. Lederman nel 1977 nel mesone Υ , formato dai quark **bottom-antibottom** legati tra loro (premio Nobel nel 1988 ma per le scoperte sui neutrini)]; ed infine del quark top [il quark bottom e top furono anticipati teoricamente da Kobayashi e Maskawa agli inizi degli anni '70 (premi Nobel nel 2008) ma il quark top fu osservato dall'esperimento CDF solo nel 1995. La sua enorme massa rende il decadimento debole nel quark bottom così rapido da superare l'intensità della interazione forte impedendo di fatto la formazione di un qualunque stato legato con quark top. La sua osservazione è quindi avvenuta attraverso lo studio delle interazioni deboli].

Si giunge in questo modo al quadro attuale che divide le particelle fondamentali in leptoni/antileptoni e quark/antiquark





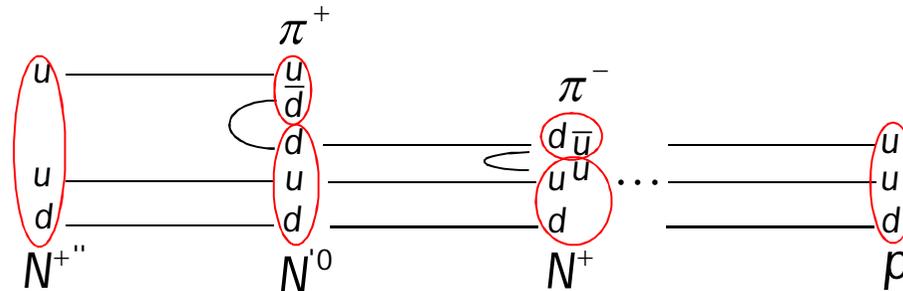
le interazioni forti conservano il sapore dei quark

Attraverso il concetto di quark e ad alcune semplici proprietà della Cromodinamica Quantistica la complessa fenomenologia delle interazioni forti diventa più comprensibile.

Ad esempio, il fatto che nei processi ad interazione forte certi adroni vengono sempre prodotti assieme (produzione associata) in accordo con certe regole empiriche di conservazione del sapore trova una semplice spiegazione nella **proprietà delle interazioni forti di conservare rigorosamente il sapore dei quark** il che significa che tale interazione non può trasformare un quark charm in un quark strange o un quark bottom in un quark up etc. etc.

Analogamente si trova che è possibile che nello stato **finale compaiano coppie quark-antiquark** non presenti in quello iniziale oppure che, nello stato finale **spariscano coppie quark-antiquark** presenti nello stato iniziale (la creazione/distruzione di coppie particella-antiparticella è una proprietà generale di tutte le interazioni). Tutto ciò, ovviamente, nel quadro delle leggi generali di conservazione per cui una coppia quark-antiquark potrà effettivamente comparire nello stato finale solo se l'energia è sufficiente.

In questo modo si comprendono facilmente molti processi adronici. Ad esempio un barione pesante (N^+) della serie N (formata dagli stati eccitati di protoni e neutroni) che è lo stato eccitato di un protone avendo la su stessa composizione di quark , può decadere in una serie di barioni più leggeri della stessa serie fino a giungere allo stato fondamentale che si identifica appunto con il protone (lo stesso accade con il barione N^0 che è uno stato eccitato del neutrone) con concomitante produzione di mesoni formati da quark up e down detti pioni



i numeri quantici di sapore nel modello standard

Ciò rende conto del fatto osservato che le collisioni tra barioni sono accompagnate da una copiosa produzione di mesoni che in un certo senso vengono irradiati nel corso del processo di diseccitazione del barione come i fotoni vengono irradiati nel corso del processo di diseccitazione dell'atomo. E' naturale attendersi che tutti gli stati barionici del processo di diseccitazione abbiano una cortissima vita media, data la intensità della interazione forte, al contrario di quello fondamentale che, per quanto riguarda le interazioni forti, deve essere assolutamente stabile e durare in eterno e può essere attaccato dalle sole interazioni deboli e/o elettromagnetiche.

Attribuendo i numeri quantici di sapore dei quark in modo oculato questi semplici processi possono essere espressi attraverso *leggi di conservazione di specifici numeri quantici di sapore* da parte della interazione forte. La convenzione adottata nel Modello Standard, in gran parte risultato della storia, assume che

- i **quark fondamentali** possiedono i seguenti **numeri quantici di sapore**

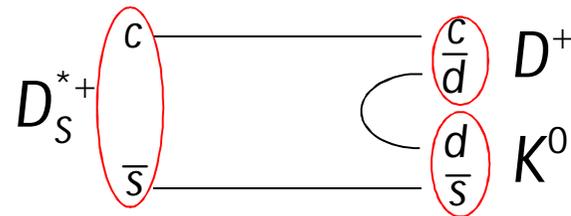
		Numeri di sapore dei quark					
		u	d	c	s	t	b
I, I₃	Isospin	1, 1/2	0	0	0	0	0
I, I₃	Isospin	0	1, -1/2	0	0	0	0
C	Charm	0	0	1	0	0	0
S	Strangeness	0	0	0	-1	0	0
T	Topness	0	0	0	0	1	0
B	Bottomness	0	0	0	0	0	-1

- gli **antiquark fondamentali** possiedono **numeri quantici di sapore opposti in segno a quelli dei quark**, dunque **C=-1, S=1, T=-1, B=1** nel caso degli **antiquark charm, strange, top, e bottom** rispettivamente (un discorso a parte va fatto per l'isospin come accenneremo tra breve);

- **i numeri quantici di sapore** sono additivi, il che significa che i numeri quantici di sapore C, S, B e T presenti in uno stato si sommano algebricamente (un discorso a parte va fatto per l'isospin come accenneremo tra breve);
- **i numero quantici di sapore si conservano nel corso di un processo governato dalla interazione forte** il che significa che il sapore dello stato iniziale è sempre uguale a quello dello stato finale quando la trasformazione è avvenuta per mezzo di tale interazione.

Esempio

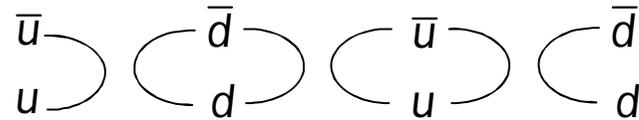
Con queste convenzioni la semplice dinamica cui abbiamo accennato risulta garantita. Infatti, consideriamo il seguente decadimento del mesone D_S^{*+} (2573)



lo stato iniziale ha $C=1$ ed $S=1$, lo stato finale ha $C=1$ ed $S=1$, dunque la conservazione del sapore complessivo descrive correttamente il fatto che i quark charm e antistrange vengono conservati dalla interazione forte. Il fatto che nello stato finale venga creata la coppia down-antidown è sempre in accordo con la legge di conservazione proprio perché abbiamo scelto di attribuire numeri quantici di sapore opposti alle antiparticelle. Inoltre l'isospin, topness e bottomness dello stato iniziale sono nulli come quelli dello stato finale.

Il numero quantico d'isospin

Accenniamo ora al numero quantico di sapore detto isospin. Per comprendere il problema concretamente, consideriamo i possibili stati legati mesonici che è possibile formare con i quark up e down. Questi sono gli stati (up-antiup), (up-antidown), (down-antiup) e (down-antidown). Tra questi consideriamo ad esempio lo stato (up-antiup). Ricordando che nel corso di una interazione forte si può avere la creazione o distruzione di una coppia quark-antiquark possiamo pensare che tale coppia potrebbe annichilarsi per creare una coppia top-antitop. Un attimo di riflessione chiarisce però che un tale processo, pur in accordo con la conservazione del sapore, non è energeticamente possibile a causa della forte differenza di massa tra i quark up e top. Se le cose stanno in questo modo però, nulla può impedire alla coppia up-antiup di convertirsi in una coppia down-antidown **data la prossimità delle loro masse**. D'altra parte la coppia down-antidown potrà convertirsi nuovamente in una coppia up-antiup e così via, dando luogo al processo di oscillazione tra up-antiup e down-antidown indicato nella figura seguente



In questa situazione non possiamo dire che lo stato legato sia up-antiup o down-antidown, una ipotetica misura avrebbe eguali probabilità di misurare una coppia up-antiup o down-antidown per cui, secondo la meccanica quantistica, un tale stato si deve descrivere con una *sovrapposizione lineare coerente di eguale peso* delle due coppie, ovvero con una delle due combinazioni seguenti

$$\frac{u\bar{u} + d\bar{d}}{\sqrt{2}} \quad \frac{u\bar{u} - d\bar{d}}{\sqrt{2}} \quad (10)$$

La conservazione del sapore evidentemente impedisce che un tale fenomeno avvenga nel caso dei rimanenti stati legati

$$u\bar{d} \quad d\bar{u} \quad (11)$$

Se non fosse per l'accidentale coincidenza delle masse tra i quark up e down il succitato fenomeno di oscillazione non avrebbe luogo e si osserverebbero gli stati derivanti dalla semplice combinazione dei differenti quark ovvero

$$u\bar{u} \quad d\bar{d} \quad u\bar{d} \quad d\bar{u} \quad (12)$$

(in effetti questo è ciò che accade alle combinazioni di quark con massa diversa. Ad esempio nel caso dei quark s e c si osservano tutte le combinazioni s-antis, s-antic, c-antis, c-antic).

Tutto ciò ci fa capire che a causa: i) della prossimità delle masse tra quark up e down; ii) della possibilità di processi di creazione/distruzione di coppie quark-antiquark (possibile in tutte le interazioni di gauge); **le regole di composizione degli stati legati a partire dai quark non sono più quelle semplicemente combinatorie** (che porterebbero alle 12) ma diventano più complicate dovendo portare alla formazione di stati come quelli indicati dalle (11) e (10). Quali sono queste nuove regole? Un minimo di conoscenza della teoria dei gruppi continui suggerisce la risposta che si articola nei seguenti passi:

- disporre i quark up, down e anti-up, anti-down nelle componenti di due vettori complessi di \mathbb{C}^2

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix}$$

- ricordare che l'osservabile in meccanica quantistica è sempre il modulo quadrato della funzione d'onda per cui posto $\vec{v} = (u, d)$ si ha che tutti i vettori di \mathbb{C}^2 che soddisfano la relazione seguente sono associati allo stesso stato fisico

$$\vec{v}^* \vec{v}' = \vec{v}^* \vec{v}$$

da cui

$$\vec{v}^* \vec{v}' = (R\vec{v})^* (R\vec{v}') = \vec{v}^* (R^\dagger R) \vec{v}' = \vec{v}^* \vec{v}' \quad \text{solo se} \quad R^\dagger R = I$$

dunque, una qualunque trasformazione lineare, unitaria e unimodulare su tali vettori, ovvero una trasformazione del gruppo $SU(2)$, porta a nuovi vettori associabili agli stessi stati il che significa che dobbiamo sviluppare le nostre considerazioni fisiche in accordo con la **simmetria rispetto al gruppo di trasformazioni $SU(2)$ sui 'vettori' di quark**;

- costruire il prodotto tensoriale tra questi due vettori ovvero la seguente matrice (tensore misto di rango 2)

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\bar{u} & u\bar{d} \\ d\bar{u} & d\bar{d} \end{pmatrix}$$

- estrarre dalla matrice i sottospazi invarianti rispetto a trasformazioni del gruppo $SU(2)$. Dato che i vettori (up,down) e (antiup, antidown) si trasformano diversamente per trasformazioni di $SU(2)$ (si tratta di vettori 2 e 2^*) dobbiamo ridurre la matrice sfruttando l'invarianza della traccia e non la simmetria o antisimmetria che non è una proprietà invariante nel caso di tensori $2 \otimes 2^*$. Otteniamo allora

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u\bar{u} & u\bar{d} \\ d\bar{u} & d\bar{d} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{u\bar{u} - d\bar{d}}{2} & u\bar{d} \\ d\bar{u} & -\frac{u\bar{u} - d\bar{d}}{2} \end{pmatrix} + \frac{u\bar{u} + d\bar{d}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{u\bar{u} - d\bar{d}}{\sqrt{2}} & u\bar{d} \\ d\bar{u} & -\frac{u\bar{u} - d\bar{d}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{u\bar{u} + d\bar{d}}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

negli stati cerchiati riconosciamo in effetti quelli delle (10) e (11).

Riassumendo, nel caso dei quark up e down la prossimità delle loro masse, unita alla possibilità di processi di creazione/distruzione di coppie quark-antiquark, determina un **sapore dello stato legato che può essere determinato calcolando le rappresentazioni irriducibili del gruppo di trasformazioni SU(2) dei vettori bidimensionali complessi contenenti i sapori dei quark up e down dette trasformazioni di isospin**. E' questo il motivo per cui, nel modello standard, i **quark up e down sono presentati in un doppietto di stati** e non come quark singoli come invece accade nel caso dei quark **c, s, t e b** le cui masse sono molto differenti. La nomenclatura degli stati ed il relativo formalismo ricalca alla lettera quella dello spin cui rimandiamo.

La costruzione di una teoria di gauge delle interazioni forti

Il comportamento delle interazioni forti rispetto al sapore dei quark è determinante nel fissare la struttura della sottostante teoria di gauge. Infatti costruire una teoria di gauge delle interazioni forti significa in prima battuta: i) ammettere che l'interazione forte, analogamente a quella elettromagnetica, è dovuta all'accoppiamento tra i campi di certe particelle materiali elementari di spin 1/2, portatrici di un certo numero di cariche di gauge, con un certo numero di campi di gauge di spin 1 (in questo modo, attraverso il meccanismo dei quanti virtuali di tali campi di gauge, ha luogo l'interazione forte tra le particelle); ii) individuare i portatori delle cariche di gauge; iii) individuare il numero di cariche di gauge necessarie ; iv) verificare la consistenza interna della teoria (rinormalizzabilità, etc.etc.) ed ovviamente la consistenza con i dati sperimentali. Naturalmente diremo qualche parola solo sui punti ii) e iii).

Per quanto riguarda ii), accettando l'indicazione del modello a quark, secondo il quale l'interazione forte tra adroni, che è quella che si osserva sperimentalmente, è in realtà il risultato della interazione forte primaria tra i quark costituenti, **i portatori delle cariche forti devono essere i quark** stessi. Tuttavia dobbiamo osservare che in una teoria di gauge, l'interazione, ovvero il processo di irradiazione del campo accoppiato, cambia la carica irradiante. D'altra parte sappiamo che l'interazione non modifica il sapore dei quark, per cui dobbiamo concludere che le cariche di gauge sono 'interne' al sapore. Ciò significa che **ciascun sapore di quark di data massa e spin $s=1/2$ deve esistere in un numero di versioni pari al numero di cariche di gauge necessarie per descrivere l'interazione forte**.

Per quanto riguarda iii) il numero di cariche di gauge necessarie per descrivere l'interazione forte non è deducibile sulla base di una argomentazione semplice e diretta. E' invece necessario fondarsi sulle indicazioni provenienti da processi di collisione tra adroni e da considerazioni sulla struttura degli adroni le quali indicano che **il numero di cariche necessario è 3**, vengono dette **cariche di colore** e nominate con i colori rosso, blu e verde. Va da se ovviamente che **i leptoni non possiedono cariche di colore**.

libertà asintotica e confinamento

Se le cariche di gauge sono le tre cariche di colore ciò comporta che l'interazione forte venga mediata da ben **$3 \times 3 - 1 = 8$** diversi campi di forza detti ***campi gluonici dotati essi stessi di carica di colore***. Questi sono i presupposti basilari della ***Cromodinamica Quantistica*** (QCD), la teoria di campo quantizzato della interazione forte, costruita postulando ***l'invarianza della teoria rispetto a trasformazioni di gauge di rango SU(3) delle cariche di colore***.

Come già accennato in precedenza, il fatto che i campi gluonici abbiano carica di colore comporta una dinamica ben più complessa di quella del campo elettromagnetico che, invece, non possiede carica elettrica.

Completamente diverso è l'andamento dei campi con la distanza. Mentre i campi elettromagnetici decrescono con la distanza secondo la legge $1/r^2$, i corrispondenti campi gluonici aumentano con la distanza (in certi regimi quasi linearmente). In particolare la loro ***intensità è piccola in prossimità della carica di colore mentre aumenta allontanandosi***. In questo modo le particelle dotate di carica di colore possono essere considerate quasi libere a piccole distanze (ovvero alle corte lunghezze d'onda di De Broglie ovvero alle alte energie), una proprietà riferita come ***libertà asintotica***, osservata sperimentalmente e spiegata teoricamente per mezzo della QCD da D. Gross, D. Politzer e F. Wilczek a metà degli anni '70.

Allo stesso tempo si può pensare che l'aumento della intensità della forza con la distanza renda di fatto i quark non separabili spiegando il fatto empirico che i quark non si osservano liberi ma solo legati negli adroni dando luogo a quella proprietà nota con il nome di ***confinamento***. E' possibile che tutto ciò sia corretto tuttavia è bene precisare che a tutt'oggi non esiste una prova rigorosa che a partire dalla QCD si possa dedurre il confinamento dei quark (uno dei Millennium Prize Problems, proposto da A. Jaffe ed E. Witten). Ad ogni modo è accettato da tutti che sia proprio a causa del ***confinamento*** che ***non risulti possibile osservare quark liberi*** ma solo legati all'interno di sistemi aventi ***carica di colore complessiva nulla*** (detti di colore 'neutro' o 'bianco' ed analoghi ai sistemi elettromagnetici di carica elettrica totale nulla come gli atomi).

il corto raggio della interazione forte

Il confinamento ci permette anche di capire per quale motivo la forza nucleare è una forza a corto raggio operante essenzialmente all'interno del nucleo. A causa del confinamento, infatti, i quark risultano chiusi all'interno del protone e del neutrone a formare un sistema neutro di colore. I campi gluonici percepibili al di fuori degli adroni avranno un tipico andamento multipolare ***dipendenti in modo complesso dalla posizione*** (come in effetti accade nel caso della forza nucleare) e ***tendenti ad estinguersi rapidamente***. Da questo punto di vista, ***il corto raggio delle interazioni forti risulta essere una conseguenza del confinamento*** che maschera la natura a lungo raggio della interazione stessa.

Per quanto detto, è naturale identificare gli ***adroni osservati sperimentalmente*** con gli ***stati legati di colore nullo*** previsti dalla QCD. Nel compiere questa identificazione sorge però un problema.

gli stati bianchi della QCD

L'esistenza di tre diverse cariche di colore rende possibile la formazione di numerosi sistemi con carica di colore nulla o bianca. Sulla base dei metodi della teoria dei gruppi, si può mostrare che risulta possibile formare **sistemi di colore nullo** combinando **quark-antiquark** (analoghi agli stati neutri dell'elettromagnetismo formati da due cariche opposte +1 e -1), **quark-quark-quark** o **antiquark-antiquark-antiquark** (possibilità che invece non esistono in elettromagnetismo) ma anche stati a **4-quark, 4-antiquark, 5-quark, 5-antiquark** e molte altre combinazioni ancora. Infine è possibile formare stati di colore nullo, detti **glueballs**, combinando solo campi gluonici (si ricordi che essendo carichi, i gluoni possono formare stati legati autonomi, anche questa una possibilità che non esiste in elettromagnetismo poiché non risulta possibile costruire uno stato legato con il solo campo elettromagnetico!).

Ragionando sugli adroni osservati e sulle loro proprietà (spin, masse, numeri quantici di sapore, ed altri numeri quantici quali parità spaziale, parità di carica etc. etc.) si riesce ad individuare la possibile composizione degli adroni in termini di quark elementari (ad esempio, lo spin pari dei mesoni può essere ottenuto solo combinando coppie di quark, i numeri quantici di sapore richiedono poi che si tratti di un quark ed un antiquark. Analogamente lo spin dispari dei barioni può essere ottenuto combinando tre quark, i numeri quantici di sapore richiedono poi che si tratti di tre quark o tre antiquark). Si scopre allora che la ricchissima varietà di stati legati di colore nullo prevista dalla QCD trova una corrispondenza negli adroni osservati solo nel caso degli stati **quark-antiquark (mesoni)**, **quark-quark-quark (barioni)** o **antiquark-antiquark-antiquark (antibarioni)**. Degli stati rimanenti, benché cercati lungamente anche con esperimenti dedicati, non esiste a tutt'oggi una evidenza certa, un fatto probabilmente legato alla difficoltà sperimentale di individuare tali stati altamente instabili dalla brevissima vita media.

la spettroscopia adronica

Un aspetto delle interazioni forti che lo schema delineato è perfettamente in grado di descrivere riguarda il numero di diversi tipi di mesoni, barioni e antibarioni instabili e quasi stabili che ci si deve attendere.

Per quanto riguarda gli **adroni quasi stabili dello stato fondamentale**, tenuto conto che i quark hanno sei differenti sapori, spin $s=1/2$ e masse molto differenti, possiamo formare $6 \times 6 = 36$ combinazioni quark-antiquark di diverso sapore, spin $s=0$ e diversa massa le quali, tenuto conto di alcuni effetti (la grande massa del quark top rende l'interazione debole più intensa di quella forte impedendo la formazione di mesoni dotati di topness mentre la struttura d'isospin del sapore degli stati cambia la costruzione ed il conteggio degli stessi) portano comunque a **24 mesoni nello stato fondamentale di spin $s=0$ e diverso sapore e massa**.

Con simili conteggi si aggiungono circa 40 combinazioni quark-quark-quark e 40 combinazioni antiquark-antiquark-antiquark che portano a circa **40 barioni e 40 antibarioni nello stato fondamentale di diverso sapore e massa!**

Dunque, in totale, **oltre 100 diversi tipi o sapori di adroni nello stato fondamentale, neutri di colore e di massa diversa!**

Una grande varietà di sapori e masse della materia stabile?

Come ogni sistema legato (si pensi all'atomo), gli adroni di diverso sapore possono poi esistere sia nello **stato fondamentale** che in un qualunque **stato eccitato** (quando vengono prodotti nelle collisioni di alta energia moltissimi adroni vengono in effetti prodotti in stati risonanti altamente eccitati).

Da questi, attraverso una fitta e complessa rete di decadimenti passanti per gli stati eccitati intermedi (risonanze), discendono in **tempi rapidissimi** (a causa della intensità della interazione forte) verso gli oltre 100 sapori di adroni quasi stabili del livello fondamentale. Tutti questi stati vanno a costituire una ricchissima ed articolatissima **spettroscopia adronica** che è la tipica manifestazione della interazione forte emersa in modo dirompente con il fenomeno della proliferazione degli adroni.

Gli adroni corrispondenti allo **stato fondamentale** siano essi mesoni che barioni o antibarioni, sono stati tutti individuati sperimentalmente con le caratteristiche attese. Per quanto riguarda gli **stati eccitati**, quasi sempre il **primo stato eccitato risulta ben identificato** con le caratteristiche attese ma **gli stati successivi sono pieni di lacune** essenzialmente a causa di fenomeni fisici inevitabili quali, ad esempio, *l'elevata instabilità* che rende i decadimenti così rapidi che, a causa del principio di indeterminazione, la distribuzione dei valori della massa misurata si allarga a tal punto da rendere difficilmente riconoscibile lo stato stesso.

Proviamo a trarre qualche conclusione di ordine generale da questo stato di cose. In primo luogo la **conservazione del sapore** assicura che **gli oltre 100 adroni di diverso sapore e massa dello stato fondamentale devono essere stabili rispetto alle interazioni forti**. Nulla impedisce a tali adroni stabili di interagire fortemente legandosi a formare *'nuclei' stabili* in una enorme varietà di sapori e masse. Tali *'nuclei' stabili* potrebbero infine catturare elettroni per formare *'atomi' stabili* di una altrettanto enorme varietà di sapori e masse. **La materia stabile dovrebbe quindi avere una enorme varietà di tipologie!**

In realtà le cose non stanno così. Infatti nessuno ha mai trovato 24 tipi di materia mesonica stabile e nemmeno 80 diversi sapori di materia barionica e antibarionica stabile, oppure una materia altamente esotica con nuclei formati da mesoni e barioni! **La realtà sembra essere molto più semplice** poiché la materia osservata contiene nuclei costituiti dai soli **due barioni più leggeri**: il **protone stabile** (molto longevo se non eterno) ed il **neutrone quasi stabile** (ovvero stabile all'interno del nucleo atomico ma instabile, con vita media del quarto d'ora, nello stato libero).

Come mai allora non esiste questa grande varietà nella materia adronica? Dato che *la conservazione del sapore nelle interazioni forti è fuori di dubbio* dobbiamo concludere che la quasi totalità della suddetta materia adronica non esiste a causa di altre **interazioni che violano la conservazione del sapore**. In effetti sperimentalmente si vede che gli adroni di diverso sapore dello stato fondamentale sono sì instabili ma con vite medie assai più lunghe di quelle degli stati adronici eccitati, un fatto che indica che *il loro decadimento è determinato da una interazione meno intensa di quella forte*.

**L'interazione debole
viola la conservazione
del sapore**

Ora, l'interazione elettromagnetica non può violare la conservazione del sapore (quando una carica elettrica irradia un campo elettromagnetico modifica solo il proprio stato cinematico e non la propria identità, dunque nemmeno il proprio sapore). Concludiamo allora che **non esiste una grande varietà di materia adronica a causa della interazione debole che viola la conservazione del sapore.**

Ora immaginiamo che la violazione del sapore nella interazione debole avvenga per mezzo della trasformazione diretta di quark in leptoni



Una volta raggiunti per interazione forte gli adroni dello stato fondamentale, questi sparirebbero tutti (sia i mesoni che i barioni e antibarioni) a causa della suddetta interazione. Ciò sarebbe corretto per i mesoni ma non per i barioni e gli antibarioni poiché sappiamo che il protone e l'antiprotone sono stabili. Concludiamo allora che **l'interazione debole pur violando la conservazione del sapore non lo fa nel modo drastico indicato dal processo (1).**

Per risolvere il problema bisogna valutare con più precisione la situazione. Un pione, come tutti mesoni, è uno stato legato quark-antiquark mentre un protone uno stato legato quark-quark-quark. Si deve allora concludere che **l'interazione debole viola la conservazione del sapore in modo tale da permettere la conversione in leptoni di una coppia quark-antiquark ma non di un sistema quark-quark-quark** per cui a livello elementare abbiamo i seguenti processi vietati e permessi



Questa situazione rappresenta un dato di fatto che possiamo cercare di descrivere, come al solito, introducendo un **nuovo numero quantico di sapore**. E' allora sufficiente postulare l'esistenza di **numero quantico**:

il numero barionico

- i) B tale che B=1/3 per i quark, B=-1/3 per gli antiquark e B=0 per il leptoni;**
- ii) conservato da tutte le interazioni naturali;**
- iii) tale da essere additivo.**

In questo modo la conservazione di B non impedirà ai barioni (antibarioni) più pesanti (B=1) dello stato fondamentale di decadere via interazione debole (dunque con lunghi tempi di decadimento) nel barione (antibarione) dello stato fondamentale più leggero, ovvero nel protone (B=1). Mentre impedirà al protone (B=1) di decadere in leptoni (B=0) in accordo con la sua stabilità osservata. Nel caso dei mesoni, invece, le cose vanno diversamente. Non solo i mesoni più pesanti (B=0) dello stato fondamentale potranno decadere via interazione debole (dunque con lunghi tempi di decadimento) nel mesone dello stato fondamentale più leggero, ovvero nel pione (B=0), ma anche il pione (B=0) potrà decadere debolmente in leptoni (B=0), in accordo con la sua instabilità osservata.

Si noti che le regole di attribuzione del numero quantico B fanno sì che i mesoni abbiano $B=0$ (come i leptoni), i barioni $B=1$ e gli antibarioni $B=-1$, un fatto che spiega perché il numero quantico B venga chiamato **numero barionico** (per fare in modo che ai barioni abbiano $B=1$ si sceglie di attribuire $B=1/3$ a ciascun quark).

Nel modello standard, l'assegnazione dei numeri quantici dei quark è allora riassunta dalla seguente tabella

Numeri quantici dei quark							
		u	d	c	s	t	b
I, I₃	Isospin	1, 1/2	0	0	0	0	0
I, I₃	Isospin	0	1, -1/2	0	0	0	0
C	Charm	0	0	1	0	0	0
S	Strangeness	0	0	0	-1	0	0
T	Topness	0	0	0	0	1	0
B	Bottomness	0	0	0	0	0	-1
B	Barionico	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3

con la convenzione di attribuire agli antiquark numeri quantici opposti.

NOTA: il numero barionico riflette semplicemente una sottostante struttura di sapore della interazione debole.

La struttura a quark dei mesoni

I quark hanno spin, momento angolare, carica elettrica e numeri quantici di sapore. Formare un mesone legando un quark ed un antiquark significa calcolare lo spin totale (che nel quadro di un modello non relativistico si assume essere la somma del momento angolare relativo e di spin dei quark), la carica elettrica totale ed i numeri quantici di sapore totali. Quest'ultima operazione non comporta difficoltà di alcun tipo nel caso di quantità additive (carica elettrica ed anche quattro dei sei sapori dei quark) mentre richiede un minimo di attenzione nel caso dei momenti angolari o dell'isospin che si sommano secondo regole più complesse.

□ I numeri quantici spaziotemporali dei mesoni

Osserviamo subito che per potere fare affermazioni anche solo generali sulle caratteristiche degli stati legati quark-antiquark sarebbe necessario avere certe informazioni sulle proprietà forza forte che li tiene uniti. In mancanza di queste informazioni si procede ipotizzando che **il potenziale sia centrale ed il sistema non relativistico** (soprattutto quest'ultima ipotesi pone dei problemi nel caso dei quark leggeri!). In questo caso possiamo affermare che **un generico stato del sistema legato quark-antiquark ha un certo numero quantico principale n , un momento angolare orbitale relativo l ed uno spin totale s pari alla somma degli spin dei quark componenti.**

In particolare **il momento angolare totale dello stato legato vale $J=l+S$** . Richiamando l'azione di P sulla parte orbitale della funzione d'onda abbiamo

$$P \psi_{L,M}(\vec{r}_{12}) = \eta_{\vec{r}} \psi_{L,M}(-\vec{r}_{12}) = (-1)(-1)^L \psi_{L,M}(\vec{r}_{12}) = (-1)^{L+1} \psi_{L,M}(\vec{r}_{12})$$

dalla quale si ottiene che **la parità dello stato legato vale**

$$P = (-1)^{L+1}$$

Richiamando poi la

$$\begin{aligned} C \psi(1,2) &= C \psi(1, q_1; 2, q_2) = \eta \eta \psi(1, q_2; 2, q_1) = \\ &= (-1)^L (-1)^{s-s_1-s_2} \psi(2,1) = (-1)^L (-1)^{s-s_1-s_2} (-1) \psi(1,2) = \\ &= \eta_c \psi(1,2) \end{aligned}$$

otteniamo che **l'autovalore della coniugazione di carica dello stato legato vale**

$$\eta_c = (-1)^{L+S}$$

Queste relazioni ci permetteranno, tra poco, di calcolare i numeri quantici rilevanti degli stati legati quark-antiquark.

Come in uno stato legato atomico, il sistema quark-antiquark ammette tutta una serie di stati che da quello fondamentale si elevano in energia mano a mano che cresce il numero quantico principale e variano i momenti angolari orbitali e di spin. Ad esempio lo **stato fondamentale** si ha quando

$$L=0, s=0, J=L+S=0, P=(-1)^{L+1}=-1, C=(-1)^{L+S}=+1$$

da cui $J^{PC} = 0^{-+}$

che giustifica il nome a volte usato di **stati pseudoscalari**.

Il **primo stato eccitato** invece corrisponde ai momenti angolari

$$L=0, s=1, J=L+S=1, P=(-1)^{L+1}=-1, C=(-1)^{L+S}=-1$$

da cui $J^{PC} = 1^{--}$

che giustifica il nome a volte usato di **stati vettoriali**.

E' chiaro che questi stati non sono che i primi due, **esiste tutta una serie di stati energia via via crescente, e questo per ciascuno dei possibili sapori dello stato legato**. Capiamo allora quanto maggiore sia la complessità dello spettro adronico rispetto quello atomico.

□ I numeri quantici di sapore dei mesoni

Per il calcolo dei numeri quantici di sapore dei mesoni ci atterremo, quando necessario, al metodo tensoriale.

Se ordiniamo i quark in un vettore colonna seguendo i valori delle masse otteniamo

$$\begin{array}{l}
 I = 1/2 \\
 S = +1 \\
 C = -1 \\
 B = +1 \\
 T = -1
 \end{array}
 \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \\ \bar{s} \\ \bar{c} \\ \bar{b} \\ \bar{t} \end{pmatrix}
 \quad
 \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \\ c \\ b \\ t \end{pmatrix}
 \quad
 \begin{array}{l}
 I = 1/2 \\
 S = -1 \\
 C = +1 \\
 B = -1 \\
 T = +1
 \end{array}$$

dove con i colori abbiamo indicato il fatto che i quark up e down si differenziano solo nella terza componente dell'isospin ($u=1/2, 1/2$; $d=1/2, -1/2$) poiché sono pensati come due stati diversi della stessa particella a causa della prossimità della loro massa (simmetria approssimata di isospin), mentre i rimanenti quark si comportano come particelle differenti a causa della grande differenza nel valore delle loro masse.

La struttura di sapore dei mesoni si ottiene facendo il prodotto tensoriale dei due 'vettori'

$$\begin{array}{l}
 I = 1/2 \\
 S = +1 \\
 C = -1 \\
 B = +1 \\
 T = -1
 \end{array}
 \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \\ \bar{s} \\ \bar{c} \\ \bar{b} \\ \bar{t} \end{pmatrix}
 \otimes
 \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \\ c \\ b \\ t \end{pmatrix}
 \quad
 \begin{array}{l}
 I = 1/2 \\
 S = -1 \\
 C = +1 \\
 B = -1 \\
 T = +1
 \end{array}$$

da cui risulta evidente che si ottengono 36 diverse combinazioni, che identifichiamo con i mesoni, ripartiti in famiglie identificate da specifici valori del sapore (isospin, stranezza, incanto, etc. etc.)

$$\begin{array}{c}
 I=1/2 \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \\
 S=+1 \begin{pmatrix} \bar{s} \\ \bar{c} \end{pmatrix} \\
 C=-1 \begin{pmatrix} \bar{b} \\ \bar{t} \end{pmatrix} \\
 B=+1 \\
 T=-1
 \end{array}
 \otimes
 \begin{array}{c}
 I=1/2 \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \\
 S=-1 \begin{pmatrix} s \\ c \end{pmatrix} \\
 C=+1 \begin{pmatrix} b \\ t \end{pmatrix} \\
 B=-1 \\
 T=+1
 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}u & \bar{u}d \\ \bar{d}u & \bar{d}d \end{pmatrix}^{**} \quad I=0,1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}s \\ \bar{d}s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K^- \\ \bar{K}^0 \end{pmatrix} \quad I=1/2 \quad S=-1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{s} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\bar{s} \\ d\bar{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix} \quad I=1/2 \quad S=+1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}c \\ \bar{d}c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D^- \\ \bar{D}^0 \end{pmatrix} \quad I=1/2 \quad C=+1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{c} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\bar{c} \\ d\bar{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D^+ \\ D^0 \end{pmatrix} \quad I=1/2 \quad C=-1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}b \\ \bar{d}b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^- \\ \bar{B}^0 \end{pmatrix} \quad I=1/2 \quad B=-1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{b} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\bar{b} \\ d\bar{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^+ \\ B^0 \end{pmatrix} \quad I=1/2 \quad B=+1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}t \\ \bar{d}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix} \quad I=1/2 \quad T=+1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{t} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\bar{t} \\ d\bar{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix} \quad I=1/2 \quad T=-1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{s} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{s}s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix} \quad S=0$$

$$\begin{pmatrix} \bar{s} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{s}c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_s^+ \\ \end{pmatrix} \quad S=+1 \quad C=+1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{c} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{c}s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_s^- \\ \end{pmatrix} \quad S=-1 \quad C=-1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{s} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{s}b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_s^0 \\ \end{pmatrix} \quad S=+1 \quad B=-1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{b} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b}s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{B}_s^0 \\ \end{pmatrix} \quad S=-1 \quad B=+1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{s} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{s}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ \end{pmatrix} \quad S=+1 \quad T=+1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{t} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{t}s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ \end{pmatrix} \quad S=-1 \quad T=-1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{c} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{c}c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_c \\ \end{pmatrix} \quad C=0$$

$$\begin{pmatrix} \bar{c} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{c}b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_c^- \\ \end{pmatrix} \quad C=-1 \quad B=-1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{b} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b}c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_c^+ \\ \end{pmatrix} \quad C=+1 \quad B=+1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{c} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{c}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ \end{pmatrix} \quad C=+1 \quad T=+1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{t} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{t}c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ \end{pmatrix} \quad C=-1 \quad T=-1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{b} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b}b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Upsilon \end{pmatrix} \quad B=0$$

$$\begin{pmatrix} \bar{b} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ \end{pmatrix} \quad B=+1 \quad T=+1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{t} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{t}b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ \end{pmatrix} \quad B=-1 \quad T=-1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{t} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{t}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ \end{pmatrix} \quad T=0$$

Le lettere si riferiscono al nome del mesone corrispondente allo stato legato fondamentale $J^{PC}=0^+$.

Tutti gli stati sono osservati, e molti studiati a fondo.

Quelli indicati con * sono stati che è noto non possano esistere a causa della enorme **massa del quark top** che rende l'interazione debole così intensa che il top decade debolmente prima di potere formare uno stato legato via interazione forte.

Infine gli stati indicati con ** hanno una struttura di sapore tensoriale e richiedono considerazioni aggiuntive che faremo tra poco.

Ci sono alcuni commenti che vale la pena fare sullo schema delineato nella pagina precedente

- il fatto che i quark up e down risultino disposti in un doppietto d'isospin (spinore d'isopin) con masse molto determina una **corrispondente ripartizione dei mesoni in doppietti di isospin di massa prossima**. Naturalmente sono possibili anche molti singoletti d'isospin ($I=0$) come pure tensori d'isospin ($I=1$) che discuteremo tra poco. In questo modo si spiega il fatto, sperimentalmente osservato sin dagli inizi, che i mesoni (come del resto anche i barioni) spesso si presentano in famiglie di massa molto prossima e carica differente;
- lo schema prevede l'esistenza di un certo numero di **mesoni realmente neutri** (autostati della coniugazione di carica). In linea di principio dovremmo attenderci 6 mesoni realmente neutri formati dalle coppie $u\bar{u}, d\bar{d}, \dots, t\bar{t}$, tuttavia la coppia del quark top è esclusa a causa della grande massa (vedi pag. prec.), quelle dei quark up, down e strange sono soggette a fenomeni di miscelamento particolari e per ora le escludiamo, rimangono allora le coppie dei quark charm (η_c) e beauty (Y). Tutti **gli altri mesoni non sono realmente neutri ma, al più, elettricamente neutri** e risultano corrispondersi in **sistemi particella-antiparticella sia che si tratti di singoletti d'isospin che di doppietti**. Tra i singoletti abbiamo allora le corrispondenze $D_S^+ D_S^-$, $B_S^0 \bar{B}_S^0$, $B_c^+ B_c^-$ mentre tra i doppietti abbiamo le caratteristiche corrispondenze dei doppietti di **K, D e B**

(mancano al solito quelli associati al top);

- si noti che i doppietti del **K, D e B** contengono altre particelle elettricamente neutre ma non realmente neutre come le coppie $K^0 \bar{K}^0, D^0 \bar{D}^0, B^0 \bar{B}^0$, che vanno ad aggiungersi alla coppia $B_S^0 \bar{B}_S^0$. Queste quattro coppie sono di eccezionale interesse! Si tratta di stati fisici elettricamente neutri che si differenziano dal solo punto di vista del sapore ($S=\pm 1, C=\pm 1$ e $B=\pm 1$ rispettivamente). Dato che solo le interazioni forti conservano il sapore dobbiamo attenderci che la loro identità sia differente solo dal punto di vista di queste interazioni: nulla impedisce che altre interazioni non percepiscano questa differenza! In questo caso, dato che la carica elettrica è la stessa, si osserverebbero fenomeni di interferenza tra le due identità ideali per **lo studio di aspetti fondamentali della fisica delle particelle e della meccanica quantistica**.
- dobbiamo attenderci che le masse dei mesoni aumentino mano a mano che entrano i quark strange, charm e bottom. Un criterio orientativo per ottenere la massa del mesone è quello di sommare le masse dei quark costituenti e di sottrarre il contributo della energia di legame. Le prime sono riportate all'inizio del capitolo, la seconda ha un valore che va da 100 a 300 MeV (di più, a questo livello, non si può fare!);

I mesoni con i quark leggeri u,d,s

Per quanto riguarda il sapore, gli effetti più rilevanti avvengono, come è facile attendersi, dai quark leggeri *up* e *down* che formano gli stati mesonici attraverso **il prodotto tensoriale di isospinori $\bar{2} \otimes 2$**

$$\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

Si potrebbe pensare che, in accordo con quanto avviene nei mesoni formati da quark pesanti (pagina precedente), la struttura degli stati fisici sia quella derivante dal prodotto tensoriale dei due isospinori

$$\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}u & \bar{u}d \\ \bar{d}u & \bar{d}d \end{pmatrix}$$

ma in realtà le cose non vanno in questo modo! Non dobbiamo infatti dimenticare che **per assicurare che affinché sia assicurata l'invarianza delle interazioni forti rispetto alle rotazioni nello spazio d'isospin** (a sua volta legata alla indipendenza delle interazioni forti dallo scambio dei quark up e down) è **necessario che gli stati fisici corrispondano alle rappresentazioni irriducibili del**

gruppo di trasformazioni, in questo caso di SU(2). Non è sufficiente, quindi, eseguire il prodotto tensoriale, è necessario anche procedere alla riduzione del tensore.

Ricordiamo allora che le rappresentazioni irriducibili del gruppo delle rotazioni nello spazio d'isospin, analogamente a quelle delle rotazioni nello spazio tridimensionale ordinario, si costruiscono formando tensori che abbiano proprietà invarianti rispetto al gruppo di trasformazioni. In generale tali proprietà sono la simmetria, antisimmetria e traccia.

Come abbiamo visto, nel caso di tensori $\bar{2} \otimes 2$ l'unico invariante esistente è la traccia per cui abbiamo la seguente separazione invariante della matrice

$$\begin{pmatrix} \bar{u}u & \bar{u}d \\ \bar{d}u & \bar{d}d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\bar{u}u - \bar{d}d)/2 & \bar{u}d \\ \bar{d}u & -(\bar{u}u - \bar{d}d)/2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(\bar{u}u + \bar{d}d) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(si ricordi che il gruppo nel caso del gruppo SU(2) è possibile stabilire una corrispondenza tra gli spinori $\bar{2}$ e 2 ed operare con tensori $2 \otimes 2$. In questo caso l'invariante sarebbe la simmetria e non la traccia ma si verrebbe agli stessi risultati).

Come già detto in precedenza, dagli elementi delle due matrici si ottengono i multipletti corrispondenti alle rappresentazioni irriducibili associate ai tensori $\bar{2} \otimes 2$ e quindi dei mesoni leggeri. Abbiamo allora i tre stati di sapore definito

$$\bar{d}u \quad (\bar{u}u - \bar{d}d)/2 \quad \bar{u}d$$

che hanno evidentemente isospin $3=2I+1$ da cui $I=1$, numero barionico $B=0$ e carica elettrica $Q=1, 0, -1$. Abbiamo poi lo stato

$$\bar{u}u + \bar{d}d$$

di isospin $1=2I+1$ da cui $I=0$, numero barionico $B=0$ e carica elettrica $Q=0$.

Se ora consideriamo gli stati mesonici al livello fondamentale $J^{PC}=0^+$ gli stati di isospin $I=1$ corrispondono perfettamente ai primi mesoni che furono scoperti, **la famiglia dei pioni** $\pi^+\pi^0\pi^-$ di massa **139.6, 135.0, 139.6 MeV** rispettivamente.

Data questa identificazione, anche lo stato di isospin $I=0$ dovrebbe avere una massa simile, poiché composto con gli stessi quark tenuti insieme dalla stessa forza (dato che la forza forte non dipende dal sapore, anche il contributo del potenziale d'interazione al bilancio della massa dovrebbe essere lo stesso). **Il problema è che i mesoni $I=0, J^{PC}=0^+$ noti sperimentalmente sono la η che ha una massa di 548 MeV e la η' che ha una massa di 958 MeV** dunque molto più alte dei 140 MeV previsti dal modello a quark.

□ Il miscelamento dei quark $J^{PC}=0^+$

Per spiegare questa forte discrepanza, l'unica possibilità, all'interno del modello a quark, è ammettere che, per qualche motivo, all'interno della η , oltre ai quark leggeri up e down vi siano anche quark di massa superiore.

Dato che la simmetria di isospin è verificata in modo soddisfacente l'eventuale contributo di quark pesanti deve avvenire in accordo con la sua conservazione e quindi **può provenire solo da stati quark-antiquark di isospin $I=0$ e numeri quantici di sapore tutti nulli.**

Nel modello a quark esistono altre combinazioni quark-antiquark con isospin $I=0$ e numeri quantici di sapore nulli. Queste sono (vedi tabella pagine precedenti)

$$\bar{s}s \quad \bar{c}c \quad \bar{b}b$$

ma le ultime due devono essere scartate poiché contribuirebbero con masse troppo elevate (si noti dell'ordine di 3 e 10 GeV!) per cui non rimane che **ipotizzare che la η contenga anche frazioni dello stato legato $\bar{s}s$.**

Comprendiamo allora che il miscelamento dei quark è un fenomeno che coinvolge non solo i quark up e down ma anche il più pesante quark strano. Fenomeni di miscelamento a carico dei quark ancora più pesanti non sono noti (per cui il fenomeno del miscelamento può essere utilmente affrontato nel più ampio contesto della simmetria SU(3), ma noi seguiremo una strada un po' diversa!).

Seguendo le idee appena esposte ammetteremo allora che i due stati del modello a quark

$$\eta_a = \frac{(\bar{u}u + \bar{d}d)}{\sqrt{2}} \quad \eta_b = (\bar{s}s) \quad (1)$$

possano miscelarsi tra loro (si noti che il primo è stato normalizzato). Conviene introdurre il miscelamento in modo tale che venga preservata l'ortonormalità degli stati e questo può essere fatto attraverso una trasformazione ortogonale

$$\begin{aligned} \eta'_a &= \cos \vartheta \eta_a - \sin \vartheta \eta_b \\ \eta'_b &= \sin \vartheta \eta_a + \cos \vartheta \eta_b \end{aligned} \quad (2)$$

vediamo allora che compare un secondo stato, quale è il suo significato? Ragioniamo come segue. Il modello a quark prevede due stati $I=0, J^{PC}=0^+$ di massa circa 140 MeV indicati con η_a e η_b . Sperimentalmente, invece, si osservano due stati η ed η' di massa più elevata. L'idea è che gli stati η ed η' possano essere identificati con quelli 'ruotati' η'_a e η'_b il che comporta che l'angolo di miscelamento debba essere tale da riprodurre le masse osservate.

Il problema ora è quello di estrarre dagli stati le rispettive masse, come si fa? In generale sappiamo che gli stati con massa definita sono gli autostati dell'hamiltoniano del sistema

$$H|\phi\rangle = M|\phi\rangle$$

da cui

$$\langle \phi | H | \phi \rangle = M$$

un punto problematico nel modello a quark è che facendo questa assunzione, che appare la più naturale, non si riesce a riprodurre le corrette masse dei mesoni.

L'ipotesi che invece lavora correttamente è la seguente

$$\langle \phi | H | \phi \rangle = M^2 \quad (3)$$

ovvero che l'elemento di matrice dell'hamiltoniano di uno stato mesonico fornisce il quadrato della sua massa.

Facendo questa assunzione dalla (2) otteniamo

$$\begin{aligned} \langle \eta'_a | H | \eta'_a \rangle &= M_a^2 = \langle \cos \vartheta \eta_a - \sin \vartheta \eta_b | H | \cos \vartheta \eta_a - \sin \vartheta \eta_b \rangle = \\ &= \cos^2 \vartheta M_a^2 + \sin^2 \vartheta M_b^2 - 2 \sin \vartheta \cos \vartheta M_{ab}^2 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \langle \eta'_b | H | \eta'_b \rangle &= M_b^2 = \langle \sin \vartheta \eta_a + \cos \vartheta \eta_b | H | \sin \vartheta \eta_a + \cos \vartheta \eta_b \rangle \\ &= \sin^2 \vartheta M_a^2 + \cos^2 \vartheta M_b^2 + 2 \sin \vartheta \cos \vartheta M_{ab}^2 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \langle \eta'_a | H | \eta'_b \rangle &= 0 = \langle \cos \vartheta \eta_a - \sin \vartheta \eta_b | H | \sin \vartheta \eta_a + \cos \vartheta \eta_b \rangle = \\ &= \sin \vartheta \cos \vartheta M_a^2 - \sin \vartheta \cos \vartheta M_b^2 + \cos^2 \vartheta M_{ab}^2 - \sin^2 \vartheta M_{ab}^2 \end{aligned} \quad (6)$$

dove nell'ultima espressione si è tenuto conto della ortonormalità degli stati a' e b' . Dalla (6) otteniamo

$$M_{ab}^2 = \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta)} (M_b^2 - M_a^2) \quad (7)$$

che sostituita nelle (4) e (5) fornisce le relazioni

$$M_a^2 = \cos^2 \vartheta M_a^{\prime 2} + \sin^2 \vartheta M_b^{\prime 2} - 2 \frac{\sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta}{(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta)} (M_b^{\prime 2} - M_a^{\prime 2})$$

$$M_b^2 = \sin^2 \vartheta M_a^{\prime 2} + \cos^2 \vartheta M_b^{\prime 2} + 2 \frac{\sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta}{(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta)} (M_b^{\prime 2} - M_a^{\prime 2})$$

In queste espressioni conviene lavorare con la differenza $M_b^2 - M_a^2$ per cui scriveremo

$$M_a^2 = (1 - \sin^2 \vartheta) M_a^{\prime 2} + \sin^2 \vartheta M_b^{\prime 2} - 2 \frac{\sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta}{(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta)} (M_b^{\prime 2} - M_a^{\prime 2})$$

$$M_b^2 = (1 - \cos^2 \vartheta) M_a^{\prime 2} + \cos^2 \vartheta M_b^{\prime 2} + 2 \frac{\sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta}{(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta)} (M_b^{\prime 2} - M_a^{\prime 2})$$

da cui

$$M_a^2 - M_b^2 = \sin^2 \vartheta (M_b^{\prime 2} - M_a^{\prime 2}) - 2 \frac{\sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta}{(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta)} (M_b^{\prime 2} - M_a^{\prime 2})$$

$$M_b^2 - M_a^2 = \cos^2 \vartheta (M_b^{\prime 2} - M_a^{\prime 2}) + 2 \frac{\sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta}{(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta)} (M_b^{\prime 2} - M_a^{\prime 2})$$

$$M_a^2 - M_b^2 = \left[\sin^2 \vartheta - 2 \frac{\sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta}{(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta)} \right] (M_b^{\prime 2} - M_a^{\prime 2})$$

$$M_b^2 - M_a^2 = \left[\cos^2 \vartheta + 2 \frac{\sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta}{(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta)} \right] (M_b^{\prime 2} - M_a^{\prime 2})$$

passando ora al quoziente di queste espressioni otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{M_a^2 - M_b^2}{M_b^2 - M_a^2} &= \frac{(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) \sin^2 \vartheta - 2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta}{(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) \cos^2 \vartheta + 2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta} = \\ &= -\frac{\sin^4 \vartheta + \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta}{\cos^4 \vartheta + \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta} = -\text{tg}^2 \vartheta \end{aligned}$$

e quindi la seguente relazione che fornisce l'angolo di miscelamento tra gli stati a e b in funzione delle masse degli stati a', b' ed a

$$\text{tg}^2 \vartheta = \frac{M_a^2 - M_b^2}{M_b^2 - M_a^2} \quad (8)$$

In questa formula le masse degli stati a' , b' sono date sperimentalmente mentre la massa dello stato a non è nota poiché a non è uno stato fisicamente osservato. La sua massa deve essere calcolata nel modo seguente.

Dalla (1) si ha

$$\eta_a = \frac{(\bar{u}u + \bar{d}d)}{\sqrt{2}}$$

e quindi

$$\begin{aligned} M_a^2 &= \langle \eta_a | H | \eta_a \rangle = \left\langle \frac{(\bar{u}u + \bar{d}d)}{\sqrt{2}} \left| H \right| \frac{(\bar{u}u + \bar{d}d)}{\sqrt{2}} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} (2m_u^2 + w^2 + 2m_d^2 + w^2) = 2m_u^2 + w^2 \quad (9) \end{aligned}$$

dove si è posto $m_u = m_d$ e si è rappresentata la massa dello stato legato come somma delle masse dei quark e della inerzia w^2 associata alla energia di legame che è indipendente dal sapore.

Per connettere la (9) alle masse degli stati fisici possiamo osservare che

$$M_\pi^2 = \langle \bar{u}d | H | \bar{u}d \rangle = 2m_u^2 + w^2 \quad m_u \sim m_d$$

$$M_K^2 = \langle \bar{u}s | H | \bar{u}s \rangle = m_u^2 + m_s^2 + w^2$$

le quali ci dicono che nella (9) lo stato a coincide con il pione di cui sappiamo la massa $m_\pi \sim 140 \text{ MeV}$.

Dunque, tornando alla formula (8) abbiamo

$$M_a^2 = 548^2 \quad M_b^2 = 958^2 \quad M_a^2 = 140^2 \quad tg^2 \vartheta = \frac{M_a^2 - M_b^2}{M_b^2 - M_a^2}$$

da cui

$$\vartheta \sim 29^\circ$$

Richiamando le (1) e (2) otteniamo

$$\eta'_a = \cos \vartheta \frac{(\bar{u}u + \bar{d}d)}{\sqrt{2}} - \sin \vartheta (\bar{s}s) = 0.87 \frac{(\bar{u}u + \bar{d}d)}{\sqrt{2}} - 0.48 (\bar{s}s)$$

$$\eta'_b = \sin \vartheta \frac{(\bar{u}u + \bar{d}d)}{\sqrt{2}} + \cos \vartheta (\bar{s}s) = 0.48 \frac{(\bar{u}u + \bar{d}d)}{\sqrt{2}} + 0.87 (\bar{s}s)$$

le quali forniscono la composizione a quark dei mesoni η ed η' . Tali formule rendono evidente il meccanismo del miscelamento dei quark che innalza la massa della η ed η' ben al di sopra della massa del pione attraverso frazioni consistenti di quark strani.

□ I mesoni $J^{PC}=0^{-+}$ con i quark u, d, s

Il fenomeno del miscelamento dei quark complica un poco la configurazione degli stati fisici nel cosiddetto settore dei quark leggeri u, d ed s mentre non interessa in nessun modo quello

dei quark pesanti c, b e t (è questo uno dei motivi per cui, spesso, la trattazione dei mesoni contenenti i quark u, d ed s è separata da quella dei mesoni formati con i quark pesanti). Per questo può non essere inutile uno schema riassuntivo dei risultati ottenuti.

Come più volte detto, il sapore dei mesoni formati da quark leggeri si ottiene attraverso il prodotto tensoriale

$$\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \\ \bar{s} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}$$

che da origine alle seguenti combinazioni (separate in isospin)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \bar{u}u & \bar{u}d \\ \bar{d}u & \bar{d}d \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (\bar{u}u - \bar{d}d)/2 & \bar{u}d \\ \bar{d}u & -(\bar{u}u - \bar{d}d)/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\bar{u}u + \bar{d}d)/2 & 0 \\ 0 & (\bar{u}u + \bar{d}d)/2 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} \bar{d}u, (\bar{u}u - \bar{d}d)/\sqrt{2}, \bar{u}d \\ (\pi^+, \pi^0, \pi^-) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (\bar{u}u + \bar{d}d)/\sqrt{2} \\ (\bar{u}u + \bar{d}d)/\sqrt{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \otimes (s) &= \begin{pmatrix} \bar{u}s \\ \bar{d}s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K^- \\ \bar{K}^0 \end{pmatrix} \\ (\bar{s}) \otimes \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \bar{s}u \\ \bar{s}d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix} \\ (\bar{s}) \otimes (s) &= (\bar{s}s) \end{aligned}$$

$(\bar{u}u + \bar{d}d)/\sqrt{2}, (\bar{s}s) \rightarrow \eta, \eta'$

Dei nove mesoni attesi, la famiglia dei π e dei K emerge direttamente da queste combinazioni mentre η ed η' emergono solo dopo il miscelamento.

Come abbiamo già commentato la famiglia di mesoni carichi di isospin $I=1$ è chiaramente identificata con la famiglia dei pioni che hanno massa rispettivamente 139.6, 135.0, 139.6 MeV. Vi sono poi due doppietti di mesoni con isospin $I=1/2$, stranezza $S=-1$ ed $S=+1$. Si tratta dei Kaoni di massa superiore poiché contengono il quark s che è più massivo dei quark u e d . La loro massa è 493.7 e 497.6 MeV per ogni doppietto. Si noti inoltre che abbiamo due mesoni elettricamente neutri \bar{K}^0 e K^0 ma non realmente neutri. Come vedremo le interazioni deboli determinano una serie di sorprendenti fenomeni in questa coppia di mesoni. Vi sono infine i due stati $I=0$, uno di massa prossima al pione, l'altro di massa molto più elevata, che, attraverso il miscelamento danno luogo ai mesoni η ed η' che hanno masse di 548 e 958 MeV.

I 9 mesoni appena discussi rappresentano gli stati fisici della interazione forte identificati da numeri quantici di sapore che l'interazione forte stessa conserva. Se a questo aggiungiamo che i 9 mesoni $J^{PC}=0^+$ sono i più leggeri (essendo formati da coppie quark-antiquark nello stato fondamentale di più bassa energia) giungiamo facilmente ad alcune interessanti conclusioni di ordine generale che è facile sottoporre a verifica sperimentale

- **se il mesone ha almeno un numero quantico di sapore non nullo** (quindi la maggior parte dei mesoni π , K , D , B etc. etc.) allora non può decadere attraverso l'interazione forte poiché dovrebbe esistere un mesone più leggero con lo stesso sapore. **Tali mesoni possono decadere solo via interazione debole e quindi hanno vite medie nell'intervallo 10^{-8} - 10^{-12} s;**

- **se il mesone ha tutti i numeri quantici di sapore nulli** (η , η' , η_c , Y) allora la stabilità non è immediatamente garantita perché con due o più mesoni è possibile formare molti stati finali con numeri quantici di sapore nulli, quindi accessibili alle interazioni forti. In particolare è facile formare numeri quantici di sapore nulli combinando due o più pioni (ma anche in coppie $K\bar{K}$ etc. etc.) i quali, essendo di piccola massa, rendono instabili, rispetto alle interazioni forti, tutta la serie di mesoni η , η' , η_c , Y . **Tali mesoni quindi tendono perlopiù a decadere alla fine in sistemi di pioni (ed anche kaoni) i quali, come già detto, decadono solo debolmente.**

□ I mesoni $J^{PC}=1^-$ con i quark u , d , s

Secondo il modello a quark, i 9 mesoni $J^{PC}=0^+$ ($L=0$, $S=0$) considerati nel paragrafo precedente devono avere una esatta corrispondenza in 9 mesoni $J^{PC}=1^-$ ($L=0$, $S=1$) che si differenziano solo per l'orientazione dello spin dei due quark, antiparalleli nel primo caso e paralleli nel secondo.

In effetti, sono noti da molto tempo i seguenti mesoni $J^{PC}=1^-$ che corrispondono perfettamente a quelli $J^{PC}=0^+$

$$\begin{array}{ll}
 (\pi^+, \pi^0, \pi^-) & \rightarrow (\rho(770)^+, \rho(770)^0, \rho(770)^-) \\
 (K^+, K^0) & \rightarrow (K^{*+}(892), K^{*0}(892)) \\
 (K^-, \bar{K}^0) & \rightarrow (K^{*-}(892), \bar{K}^{*0}(892)) \\
 \eta & \rightarrow \omega(782) \\
 \eta' & \rightarrow \phi(1020) \quad \text{stati miscelati di } \frac{(\bar{u}u + \bar{d}d)}{\sqrt{2}} \text{ e } (\bar{s}s)
 \end{array}$$

Per quanto riguarda l'angolo di miscelamento, nel caso di questa serie mesonica si ha

$$M_a^2 = 782^2 \quad M_b^2 = 1020^2 \quad M_c^2 = 770^2 \quad \text{tg}^2 \vartheta = \frac{M_a^2 - M_c^2}{M_c^2 - M_b^2}$$

da cui ottiene il seguente **angolo di miscelamento per i mesoni ω e ϕ**

$$\vartheta \sim 11^\circ$$

e quindi la seguente struttura di sapore degli stati

$$\begin{aligned} \omega(782) &= \cos \vartheta \frac{(\bar{u}u + \bar{d}d)}{\sqrt{2}} - \sin \vartheta (\bar{s}s) = 0.98 \frac{(\bar{u}u + \bar{d}d)}{\sqrt{2}} - 0.20 (\bar{s}s) \\ \phi(1020) &= \sin \vartheta \frac{(\bar{u}u + \bar{d}d)}{\sqrt{2}} + \cos \vartheta (\bar{s}s) = 0.20 \frac{(\bar{u}u + \bar{d}d)}{\sqrt{2}} + 0.98 (\bar{s}s) \end{aligned}$$

la quale mostra che il mesone ω ha una struttura di sapore costituita quasi solamente da quark leggeri u e d mentre la ϕ quasi solamente da quark s . Dato che di solito si indica con il termine **miscelamento ideale** la perfetta separazione della componente $(s\bar{s})$ da quella $(u\bar{u} + d\bar{d})$ spesso si dice che **ω e ϕ sono prossime al miscelamento ideale**.

Per quanto riguarda la stabilità, dobbiamo ricordare che questa serie mesonica contiene coppie quark-antiquark che si trovano nel primo stato eccitato (spin paralleli, detto stato di tripletto) per cui dobbiamo attenderci che pur, in accordo con la conservazione del sapore, via interazione forte sia possibile produrre mesoni della serie fondamentale $J^{PC} = 0^{++}$. In effetti i dati sperimentali confermano questo stato di cose: l'intensità della interazione forte è tale che i mesoni

$J^{PC} = 1^-$ possono sussistere solo per tempi brevissimi che, a causa del principio di indeterminazione, determinano ampie fluttuazioni nel valore della massa di questi mesoni

$$\Delta E \Delta t \approx \hbar \quad \Delta m \approx \frac{\hbar}{\Delta t c^2}$$

Le larghezze del picco di massa di questi stati misurate sperimentalmente (queste possono facilmente essere convertite in tempi) sono di 150 MeV nel caso delle $\rho(770)$, 50 MeV per le $K^*(892)$, 8 e 4 MeV per le $\omega(782)$ e $\phi(1020)$. E' chiaro che con questi tempi, dell'ordine di 10^{-19} s o anche più, tali particelle non possono raggiungere nessun apparato di misura per cui la loro osservazione avviene attraverso l'osservazione dei prodotti di decadimento (raccolgendo un numero elevato di prodotti di decadimento e costruendo poi la loro massa invariante si formano addensamenti di eventi in corrispondenza di certe masse che sono l'unica segnatura fisica possibile di questi stati altamente instabili).

Quanto detto dovrebbe chiarire che altre serie mesoniche devono essere possibili a valori di massa ancora più elevati, corrispondenti a stati legati quark-antiquark ancora più eccitati. Altrettanto chiaro dovrebbe risultare il fatto che, aumentando il numero di canali accessibile via interazione forte, tali stati risulteranno ancora più instabili e di durata ancora più breve e dunque, alla fine, con picchi di massa ancora più larghi. E' proprio questo il fatto che impedisce alla spettroscopia mesoni di essere precisa e conclusiva come la spettroscopia atomica.

La struttura a quark dei barioni

Secondo il modello a quark i barioni risultano composti da tre quark per cui dobbiamo attenderci che siano assai più complessi dei mesoni sia dal punto di vista cinematico che della struttura di sapore. A questo si aggiunge poi il fatto che nei barioni sono ricorrenti coppie o addirittura terne di quark identici che sono soggetti alle limitazioni imposte dal principio di Pauli e che ne complicano notevolmente la costruzione. In quel che segue per contenere la complessità del problema limiteremo le nostre considerazioni alle sole combinazioni dei quark u, d, s.

□ I numeri quantici spaziotemporali dei barioni

Come nel caso dei mesoni ipotizzeremo che anche i barioni siano uniti da una forza trattabile con un **potenziale centrale e che il sistema sia non relativistico** (quest'ultima ipotesi pone dei problemi nel caso dei quark leggeri!). Possiamo allora affermare che **un generico stato del sistema legato quark-antiquark ha un certo numero quantico principale n, un momento angolare orbitale relativo L ed uno spin totale S** pari alla somma degli spin dei quark componenti. In particolare **il momento angolare totale dello stato legato vale $J=L+S$** .

Osserviamo che il momento angolare orbitale non può che essere intero mentre il momento angolare di spin non può che essere semintero per cui concludiamo che il momento angolare totale dello stato deve essere semintero e dunque **i barioni appartengono alla famiglia dei fermioni**.

Richiamando l'azione dell'operatore di parità sulla parte orbitale della funzione d'onda abbiamo

$$P\varphi(\vec{r}_{12}, \vec{r}_3) = \eta_1\eta_2\eta_3\varphi(-\vec{r}_{12}, -\vec{r}_3) \\ = \eta_1\eta_2\eta_3(-1)^{L_{12}}(-1)^{L_3}\varphi(\vec{r}_{12}, \vec{r}_3)$$

dalla quale, assumendo positiva la parità intrinseca dei quark, otteniamo la seguente espressione della **parità dei barioni**

$$P = (-1)^{L_{12}+L_3}$$

Si osservi che, dalla stessa espressione si ottiene anche l'espressione della **parità degli antibarioni**

$$P = -(-1)^{L_{12}+L_3}$$

che risulta in accordo con il fatto che la parità intrinseca di un fermione è opposta a quella di un antifermione.

Tenendo conto che la somma degli spin dei quark può valere $s=1/2 \otimes 1/2 \otimes 1/2 = 1/2 \oplus 3/2$ e che il minimo momento orbitale totale vale $L_{12}=L_3=0$ si ottiene che **lo stato fondamentale di un barione ha $L=0$, $s=1/2$ e $J=1/2$ e quindi anche $P=+1$. Il primo stato eccitato invece avrà $L=0$, $s=3/2$ e $J=3/2$ e sempre $P=+1$.**

□ I barioni formati dai quark u, d ed s

Un barione è uno stato legato di tre quark e, come tale, caratterizzato da una funzione d'onda spaziale, di spin e di sapore. Dato che vogliamo limitare le nostre considerazioni allo stato fondamentale ed al primo stato eccitato assumeremo il momento angolare totale $L=0$, lo spin totale $s=1/2, 3/2$ e quindi gli stati $J^P=1/2^+, 3/2^+$.

Per quanto riguarda il sapore possiamo utilizzare un procedimento simile a quello impiegato con i mesoni. Mettendo in evidenza la struttura in isospin dei tre quark il sapore del barione si ottiene dal prodotto tensoriale

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

$$(s) \quad (s) \quad (s)$$

che può essere scomposto nei seguenti prodotti

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \otimes (s)$$

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \otimes (s) \otimes (s)$$

$$(s) \otimes (s) \otimes (s)$$

Tenendo conto che i doppietti di quark up-down hanno isospin $I=1/2$ e stranezza $S=0$ e che i singoli quark strani hanno $I=0$ e $S=-1$ abbiamo i seguenti numeri quantici di sapore

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad I = \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = (1 \oplus 0) \otimes \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \oplus \frac{1}{2}$$

$$I = 3/2, 1/2 \quad S = 0$$

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \otimes (s) \quad I = \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 1 \oplus 0 \quad S = 0 + 0 - 1 = -1$$

$$I = 1, 0 \quad S = -1$$

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \otimes (s) \otimes (s) \quad S = 0 + -1 - 1 = -2$$

$$I = 1/2 \quad S = -2$$

$$(s) \otimes (s) \otimes (s) \quad S = -1 - 1 - 1 = -3$$

$$I = 0 \quad S = -3$$

Sarebbe naturale pensare che i barioni formati dai quark u, d ed s - arrangiati nei multipletti d'isospin indicati - si replicano in tutti gli stati di momento angolare come accade nel caso dei mesoni. Invece il confronto con i dati sperimentali disponibili mostra che le cose non stanno in questo modo. Infatti si osservano **8 barioni** $J^P=1/2^+$ e **10 barioni** $J^P=3/2^+$.

possibili multipletti d'isospin di un barione

qqq	S=0	I=3/2,1/2						
qqs	S=-1	I=1,0						
qss	S=-2	I=1/2						
sss	S=-3	I=0						

multipletti d'isospin $J^P=1/2^+$ sperimentalmente osservati

qqq	S=0	I=3/2,1/2					940	p	n
qqs	S=-1	I=1,0	1190	Σ^+	Σ^-	Σ^0	1115	Λ	
qss	S=-2	I=1/2	1315	Ξ^0	Ξ^-				
sss	S=-3	I=0							

multipletti d'isospin $J^P=3/2^+$ sperimentalmente osservati

qqq	S=0	I=3/2,1/2	1230	Δ^{++}	Δ^+	Δ^0	Δ^-		
qqs	S=-1	I=1,0	1385	Σ^{*+}	Σ^{*-}	Σ^{*0}			
qss	S=-2	I=1/2	1530	Ξ^{*0}	Ξ^{*-}				
sss	S=-3	I=0	1670	Ω^-					

Basta uno sguardo allo schema della pagina precedente per rendersi conto che i barioni $J^P=1/2^+$ e $J^P=3/2^+$ occupano solo alcuni degli stati di isospin accessibili ad un sistema di tre quark. **Per quale motivo certi stati d'isospin vengono esclusi?**

Per cercare qualche suggerimento, è necessario analizzare un poco più a fondo le proprietà degli stati dei quark all'interno dei barioni. Per rendere più semplici le nostre considerazioni **rappresenteremo graficamente la funzione d'onda** dei barioni nel modo seguente

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \chi_1, \chi_2, \chi_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \\ &= \varphi_{L=0}(1, 2, 3) \chi(1, 2, 3) \xi(1, 2, 3) = \\ &= \varphi_{L=0}(1, 2, 3) \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \downarrow \text{spin} \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ \uparrow & \downarrow & \downarrow \text{isospin} \end{array} \end{aligned}$$

dove abbiamo tenuto conto che **nei barioni $J^P=1/2^+$ e $J^P=3/2^+$ il momento angolare orbitale totale è nullo** (precisiamo inoltre che con questa notazione gli spin e gli isospin compaiono associati a specifici quark mentre in realtà esistono altre combinazioni. Ci convinceremo comunque che eventuali altre combinazioni non altererebbero le conclusioni cui perverremo).

Dato che nei barioni che stiamo considerando l'unico

contributo al momento angolare proviene dallo spin è evidente che **nei barioni $J^P=3/2^+$ lo spin dei singoli quark deve essere allineato** mentre **nei barioni $J^P=1/2^+$ lo spin di un quark deve essere opposto a quello degli altri due.** Conviene allora cominciare con i primi che, data la disposizione degli spin, sono certamente più semplici da analizzare.

La Ω^- , che è formata da tre quark identici ed ha numeri quantici $I=0$, $J^P=3/2^+$, è allora rappresentata nel modo seguente

$$\Omega^- = \varphi_{L=0}(1, 2, 3) \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ s & s & s \end{array}$$

Evidentemente **la funzione d'onda di spin è simmetrica rispetto allo scambio di due qualunque quark identici.** Dato poi che il momento angolare totale è nullo e la parità intrinseca dei singoli quark positiva anche **la funzione d'onda orbitale è simmetrica rispetto allo scambio di una qualunque coppia di quark identici.** Concludiamo allora che **la funzione d'onda completa della Ω^- è simmetrica rispetto allo scambio di due qualunque quark identici.**

Esaminiamo ora la Δ ($I=3/2$, $J^P=3/2^+$) anch'essa formata da tre quark identici. Si ha

$$\Delta = \varphi_{L=0}(1, 2, 3) \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ q & q & q \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{array}$$

Per quanto riguarda la funzione d'onda orbitale e di spin valgono esattamente le stesse considerazioni fatte prima, per l'isospin osserviamo che, valendo $I=3/2$, è necessario che gli isospin dei singoli quark sono allineati tra loro per cui *la funzione d'onda d'isospin è simmetrica rispetto allo scambio di una qualunque coppia di quark*. Giungiamo allora alla conclusione che anche **la funzione d'onda completa della Δ è simmetrica rispetto allo scambio di due qualunque quark identici**.

Consideriamo ora la Ξ^* ($I=1/2, J^P=3/2^+$) formata da due quark identici. Si ha

$$\Xi^* = \varphi_{L=0}(1,2,3) \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ q & s & s \\ \uparrow & & \end{array}$$

con gli stessi ragionamenti concludiamo immediatamente che **la funzione d'onda completa della Ξ^* è simmetrica rispetto allo scambio dei quark identici**.

Infine la Σ^* ($I=1, J^P=3/2^+$) formata anch'essa da due quark identici

$$\Sigma^* = \varphi_{L=0}(1,2,3) \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ q & q & s \\ \uparrow & \uparrow & \end{array}$$

evidentemente **la funzione d'onda completa della Σ^* è simmetrica rispetto allo scambio dei quark identici**.

Ora non ci sono altri barioni $J^P=3/2^+$ da analizzare tuttavia risulta molto utile rappresentare anche gli stati d'isospin non occupati. Cominciamo con lo stato di tre quark identici

$$\Psi_{I=\frac{1}{2}, J^P=\frac{3}{2}^+} = \varphi_{L=0}(1,2,3) \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ q & q & q \\ \uparrow & \downarrow & \uparrow \end{array}$$

e poi con quello con due quark identici

$$\Psi_{I=0, J^P=\frac{3}{2}^+} = \varphi_{L=0}(1,2,3) \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ q & q & s \\ \uparrow & \downarrow & \end{array}$$

è evidente che nel caso di questi stati la funzione d'onda completa non risulta in generale simmetrica rispetto allo scambio dei quark identici. Anzi, in alcuni casi (quando gli isospin sono contrapposti) essa deve risultare antisimmetrica. In questi stati, quindi, non risulta possibile soddisfare il criterio della simmetria rispetto allo scambio di due quark identici che, a quanto pare, deve essere un requisito fondamentale affinché un barione $J^P=3/2^+$ possa sussistere.

Giungiamo allora alla conclusione che **i barioni $J^P=3/2^+$ osservati sperimentalmente sono descritti da funzioni d'onda complessivamente simmetriche rispetto allo scambio dei quark identici**.

Senza cercare per ora di comprenderne il significato, vogliamo ora analizzare i barioni $J^P=1/2^+$ nella speranza che quello appena enunciato sia il principio capace di riassumere le peculiarità di tutti gli stati barionici.

Come osservato, nei barioni $J^P=1/2^+$ lo spin di un quark deve essere opposto a quello degli altri due. Consideriamo allora il doppietto nucleonico N ($I=1/2, J^P=1/2^+$) formato da tre quark identici ed immaginiamo che spin ed isospin sia disposti come indicato

$$N = \varphi_{L=0}(1,2,3) \begin{array}{ccc} \uparrow & \downarrow & \uparrow \\ q & q & q \\ \uparrow & \downarrow & \uparrow \end{array}$$

Consideriamo poi la Σ ($I=1, J^P=1/2^+$), formata da due quark identici di cui ipotizziamo la seguente disposizione di spin ed isospin

$$\Sigma = \varphi_{L=0}(1,2,3) \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \downarrow \\ q & q & s \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{array}$$

la Λ ($I=0, J^P=1/2^+$), pure formata da due quark identici con la seguente possibile disposizione di spin ed isospin

$$\Lambda = \varphi_{L=0}(1,2,3) \begin{array}{ccc} \uparrow & \downarrow & \uparrow \\ q & q & s \\ \uparrow & \downarrow & \uparrow \end{array}$$

ed infine la Ξ ($I=1/2, J^P=1/2^+$), con la seguente possibile disposizione di spin ed isospin

$$\Xi = \varphi_{L=0}(1,2,3) \begin{array}{ccc} \downarrow & \uparrow & \uparrow \\ q & s & s \\ \downarrow & & \end{array}$$

In tutti questi barioni è risultato possibile riprodurre i corretti numeri quantici, mantenendo, al tempo stesso, la funzione d'onda complessiva simmetrica rispetto allo scambio di due quark identici (si noti che nel caso di N e della Λ si ha che sia la funzione d'onda di spin che di isospin sono antisimmetriche rispetto allo scambio dei quark identici il che assicura che la funzione d'onda completa debba essere simmetrica). Non risulta invece possibile assicurare questa proprietà nel caso degli stati formati da quark tutti identici $I=3/2, J^P=1/2^+$ e $I=0, J^P=1/2^+$

$$\Psi_{I=3/2, J^P=1/2^+} = \varphi_{L=0}(1,2,3) \begin{array}{ccc} \uparrow & \downarrow & \uparrow \\ q & q & q \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{array}$$

$$\Psi_{I=0, J^P=1/2^+} = \varphi_{L=0}(1,2,3) \begin{array}{ccc} \uparrow & \downarrow & \uparrow \\ s & s & s \\ \uparrow & \downarrow & \uparrow \end{array}$$

Concludiamo allora che anche per i barioni $J^P=1/2^+$ la simmetria della funzione d'onda complessiva rispetto allo scambio di due quark identici è un requisito necessario affinché lo stato possa sussistere.

Riassumendo, possiamo allora affermare in generale che **affinchè un barione $J^P=1/2^+$ e $3/2^+$ possa sussistere è necessario che la funzione d'onda completa sia simmetrica rispetto allo scambio dei quark identici.** Rimane ora da stabilire il significato di questa restrizione.

□ Un nuovo grado di libertà dei quark

La conclusione appena riassunta contiene un grave paradosso poiché **apparentemente viola il fondamentale teorema spin- statistica** il quale richiede che la funzione d'onda di due fermioni identici (quali sono i quark di cui stiamo parlando) sia complessivamente antisimmetrica rispetto allo scambio delle particelle.

Non ci sono alternative, o il teorema spin-statistica fallisce nel caso dei barioni, oppure abbiamo omissso qualche fatto fisico sostanziale.

Se ripensiamo con attenzione a ciò che abbiamo fatto nel precedente paragrafo comprendiamo che **ciò che abbiamo realmente dimostrato è che la funzione d'onda di un barione è simmetrica quando scambiamo la posizione, lo spin e l'isospin di due quark identici.** Se scartiamo l'ipotesi che il teorema spin-statistica sia sbagliato, l'unica possibilità è ammettere che **tali scambi non coincidano con lo scambio delle due particelle e questo è possibile solo se nei quark esiste un grado di libertà interno fino ad ora non considerato.** Secondo i principi generali della meccanica

quantistica tale grado di libertà dovrà essere descritto da **un nuovo 'pezzo' di funzione d'onda** che dovrà essere **antisimmetrica rispetto allo scambio dei quark** in modo da ripristinare la **complessiva antisimmetria della funzione d'onda quando si scambiano quark identici** in accordo con il teorema spin-statistica.

Questo nuovo grado di libertà interno può essere introdotto per ora nella forma di un nuovo **numero quantico interno** che viene **conservato dalle interazioni forti** e che chiameremo **colore**. Come già osservato il colore di un barione deve essere antisimmetrico rispetto allo scambio dei quark per cui deve possedere **una struttura algebrica non banale** quale quella di un **vettore in un spazio interno complesso di dimensione N** che chiameremo **spazio di colore**. Per assicurare la **conservazione del colore** sarà sufficiente rappresentare gli **stati fisici** per mezzo delle **rappresentazioni irriducibili del gruppo di trasformazioni** su questi vettori che assumeremo essere unitarie ed unimodulari, dunque **trasformazioni di SU(N).**

Le proprietà dei vettori di colore devono essere tali da assicurare **l'antisimmetria della funzione d'onda di colore** non solo **rispetto allo scambio di due quark** ma anche **di tre quark come richiedono i barioni Δ ed Ω .**

Se il colore di un quark viene descritto dal vettore complesso ad N componenti

$$c_j$$

il colore di due quark, secondo le regole generali della meccanica quantistica, è descritto dal tensore di rango 2

$$c_j c_k$$

ed **il colore di tre quark** dal tensore di rango 3

$$C_{jkl} = C_j^i C_k^{\prime\prime} C_l^{\prime\prime\prime}$$

il quale **per spiegare le proprietà dei barioni deve essere antisimmetrico rispetto allo scambio di una qualunque coppia di vettori (ovvero di indici)**

$$C_{jkl} = -C_{kjl} \quad C_{jkl} = -C_{lkj} \quad C_{jkl} = -C_{jlk}$$

Ora si noti che questa condizione richiede che le componenti del tensore con due indici uguali debbano essere tutte nulle

$$C_{jjl} = -C_{jjl} = 0$$

per cui le uniche componenti non nulle sono quelle con valori distinti dei tre indici. E' chiaro che affinché ciò sia possibile è necessario che **il vettore di colore abbia tre o più componenti**.

- **Se il vettore di colore ha 3 componenti** il tensore C_{jkl} completamente antisimmetrico può avere 6 componenti non nulle

$$C_{123} \quad C_{132} \quad C_{213} \quad C_{231} \quad C_{312} \quad C_{321}$$

di cui una sola indipendente in virtù dell'antisimmetria. Dunque **se il vettore di colore ha dimensione 3 il colore di un sistema di tre quark è rappresentato da un tensore**

con una sola componente indipendente ovvero da uno scalare.

Immediata conseguenza di questo fatto è che non si può formare un tensore di rango 4

$$C_{jklm} = C_j^i C_k^{\prime\prime} C_l^{\prime\prime\prime} C_m^{\prime\prime\prime\prime}$$

che sia antisimmetrico rispetto allo scambio di una qualunque coppia di quark. Questo fatto, a sua volta, comporta che non sia possibile attribuire un colore ad uno stato legato di 4 quark il che equivale ad affermare che non possono esistere stati legati di 4 quark. Dunque **se il vettore di colore ha 3 componenti si possono formare stati legati di 3 quark ma non di 4 quark.**

Altrettanto immediata è la conseguenza che stati legati di due quark devono avere un colore rappresentato da un tensore di rango 2 antisimmetrico

$$C_{jk} = C_j^i C_k^{\prime\prime}$$

che ha 3 componenti indipendenti. Dunque se **il vettore di colore ha 3 componenti il colore di un sistema di 2 quark è rappresentato da un tensore antisimmetrico con 3 componenti indipendenti.**

- **Se il vettore di colore ha 4 componenti**, il colore di uno stato di tre quark è rappresentato dal tensore

$$C_{jkl} = C_j^i C_k^{\prime\prime} C_l^{\prime\prime\prime}$$

con 4 componenti indipendenti, mentre il colore di uno stato legato di 4 quark viene rappresentato dal tensore

$$C_{jklm} = C_j^i C_k^{\prime\prime} C_l^{\prime\prime\prime} C_m^{\prime\prime\prime\prime}$$

che, in questo caso ha una componente indipendente (è facile mostrarlo con prova diretta). Dunque risulta possibile attribuire un colore ad uno stato legato di 4 quark il che equivale ad affermare che possono esistere stati legati di 4 quark. Giungiamo allora alla conclusione che **se il vettore di colore ha 4 componenti si possono formare stati legati sia di 3 quark che di 4 quark.**

Immediata è anche l'affermazione seguente: se **il vettore di colore ha 4 componenti il colore di un sistema di 2 quark è rappresentato da un tensore antisimmetrico con 6 componenti indipendenti.**

- **Se il vettore di colore ha 3, 4 o più componenti**, il colore di uno stato quark-antiquark (mesone) è rappresentato dal tensore

$$C_{jk} = C_j^i C_k^{\prime\prime\prime}$$

dove abbiamo tenuto conto che, secondo le regole generali, dobbiamo attribuire il vettore di colore c_j^* agli antiquark.

Si deve ora ricordare che abbiamo assunto che la dinamica sia invariante per trasformazioni lineari, unitarie ed unimodulari nello spazio di colore. In particolare la condizione di unitarietà assicura che la traccia del tensore di colore del mesone

$$C_{jj} = C_j^i C_j^{\prime\prime\prime}$$

sia uno scalare per cui abbiamo la possibilità di associare uno scalare di colore non solo ai barioni ma anche ai mesoni. Si sottolinea che questa possibilità non ha alcuna relazione con la dimensionalità del vettore di colore ma solo con il fatto che le trasformazioni nello spazio di colore sono unitarie. Dunque affermeremo semplicemente che **poiché le trasformazioni nello spazio di colore sono unitarie risulta possibile rappresentare il colore di un sistema quark-antiquark con uno scalare.**

Dato che le conseguenze che discendono dalle diverse opzioni sul numero di dimensioni del vettore di colore sono tutte fisicamente ragionevoli si capisce che **la scelta non può che essere demandata agli esperimenti**.

Ora, gli esperimenti affermano in primo luogo che non esistono barioni formati da 4 quark. Questo significa che il vettore di colore e con esso **lo spazio di colore deve avere dimensione 3**. Gli esperimenti affermano anche che si osservano stati legati di 2 quark del tipo quark-antiquark (mesoni) o stati legati di 3 quark (barioni) ma non stati legati di 2 quark del tipo quark-quark. Questo significa che **il colore degli adroni esistenti in natura è sempre rappresentato da uno scalare** (quest'ultima condizione viene spesso affermata dicendo che gli stati legati esistenti in natura sono bianchi).

□ La funzione d'onda di colore

Riassumendo, esiste un nuovo grado di libertà interno nei quark chiamato colore cui è associato **lo spazio di colore**. I vettori di stato e con essi lo spazio di colore ha 3 dimensioni il che significa **esistono 3 diversi colori**.

Come conseguenza, **per ciascun sapore esistono tre quark di colore differente** e quindi in totale $6 \times 3 = 18$ differenti tipi di quark nel modello standard.

Per essere in accordo con la esistenza dei mesoni e dei barioni si deve **ipotizzare che possono esistere solo gli adroni il cui colore è uno scalare** (nello spazio del colore). In

questo modo la struttura di colore degli adroni risulta essere definita nel modo seguente.

Nel caso dei **mesoni** il colore è definito dalla traccia del tensore

$$C_{jj} = c_j' c_j''^* = c_1' c_1''^* + c_2' c_2''^* + c_3' c_3''^*$$

ovvero dalla somma dei contributi delle coppie quark-antiquark di ciascun colore (coppie quark-antiquark colorate). Giungiamo allora alla conclusione che la parte di colore della funzione d'onda di un mesone può essere scritta in forma normalizzata

$$C_{12} = \frac{c_1' c_1''^* + c_2' c_2''^* + c_3' c_3''^*}{\sqrt{3}}$$

dove C_{12} è un numero complesso. La funzione d'onda completa di un quark up o down (con isospin) è data allora dalla espressione

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \chi_1, \chi_2, \xi_1, \xi_2, c_1, c_2) = \varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \chi_{12} \xi_{12} C_{12}$$

mentre quella di un quark con un qualunque altro sapore s

$$\psi_s(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \chi_1, \chi_2, c_1, c_2) = \varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \chi_{12} l_{12} C_{12}$$

Nel caso dei **barioni** il colore è definito dal tensore completamente antisimmetrico

$$C_{jkl} = c_j^{\prime} c_k^{\prime\prime} c_l^{\prime\prime\prime}$$

che ha una componente indipendente. Per ottenere le componenti di questo tensore si può ricorrere ad una ben nota proprietà del determinante il quale cambia di segno quando vengono scambiate due colonne (o righe) qualunque. In questo modo, se disponiamo i vettori c^{\prime} , $c^{\prime\prime}$ e $c^{\prime\prime\prime}$ nelle colonne di una matrice quadrata 3x3, dal semplice sviluppo del determinante otteniamo la corretta struttura del colore di un barione

$$C = \det \begin{pmatrix} c_1^{\prime} & c_1^{\prime\prime} & c_1^{\prime\prime\prime} \\ c_2^{\prime} & c_2^{\prime\prime} & c_2^{\prime\prime\prime} \\ c_3^{\prime} & c_3^{\prime\prime} & c_3^{\prime\prime\prime} \end{pmatrix} =$$

$$c_1^{\prime} c_2^{\prime\prime} c_3^{\prime\prime\prime} - c_1^{\prime} c_2^{\prime\prime\prime} c_3^{\prime\prime} - c_1^{\prime\prime} c_2^{\prime} c_3^{\prime\prime\prime} + c_1^{\prime\prime} c_2^{\prime\prime\prime} c_3^{\prime} + c_1^{\prime\prime\prime} c_2^{\prime} c_3^{\prime\prime} - c_1^{\prime\prime\prime} c_2^{\prime\prime} c_3^{\prime}$$

Si vede allora che la struttura di colore di un barione è ben più complessa. Essa è data dalla somma o differenza di termini ciascuno formato dai tre quark di differente colore che può essere scritta in forma normalizzata

$$C_{123} = \frac{c_1^{\prime} c_2^{\prime\prime} c_3^{\prime\prime\prime} - c_1^{\prime} c_2^{\prime\prime\prime} c_3^{\prime\prime} - c_1^{\prime\prime} c_2^{\prime} c_3^{\prime\prime\prime} + c_1^{\prime\prime} c_2^{\prime\prime\prime} c_3^{\prime} + c_1^{\prime\prime\prime} c_2^{\prime} c_3^{\prime\prime} - c_1^{\prime\prime\prime} c_2^{\prime\prime} c_3^{\prime}}{\sqrt{6}}$$

La funzione d'onda complessiva di un barione formato da quark con isospin potrà essere scritta nella seguente forma

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \chi_1, \chi_2, \chi_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3, c_1, c_2, c_3) = \\ = \varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) \chi_{123} \xi_{123} C_{123} \end{aligned}$$

mentre se uno o più quark hanno un altro sapore, in luogo della funzione d'isospin si può usare un pedice nella funzione d'onda come fatto nel caso dei mesoni. Al di là di questi dettagli il punto essenziale è che **con l'introduzione del colore risulta stabilita l'antisimmetria complessiva della funzione d'onda dei barioni rispetto allo scambio di due quark identici** come richiesto dal teorema spin-statistica.

FINE