Acceleratori Circolari I

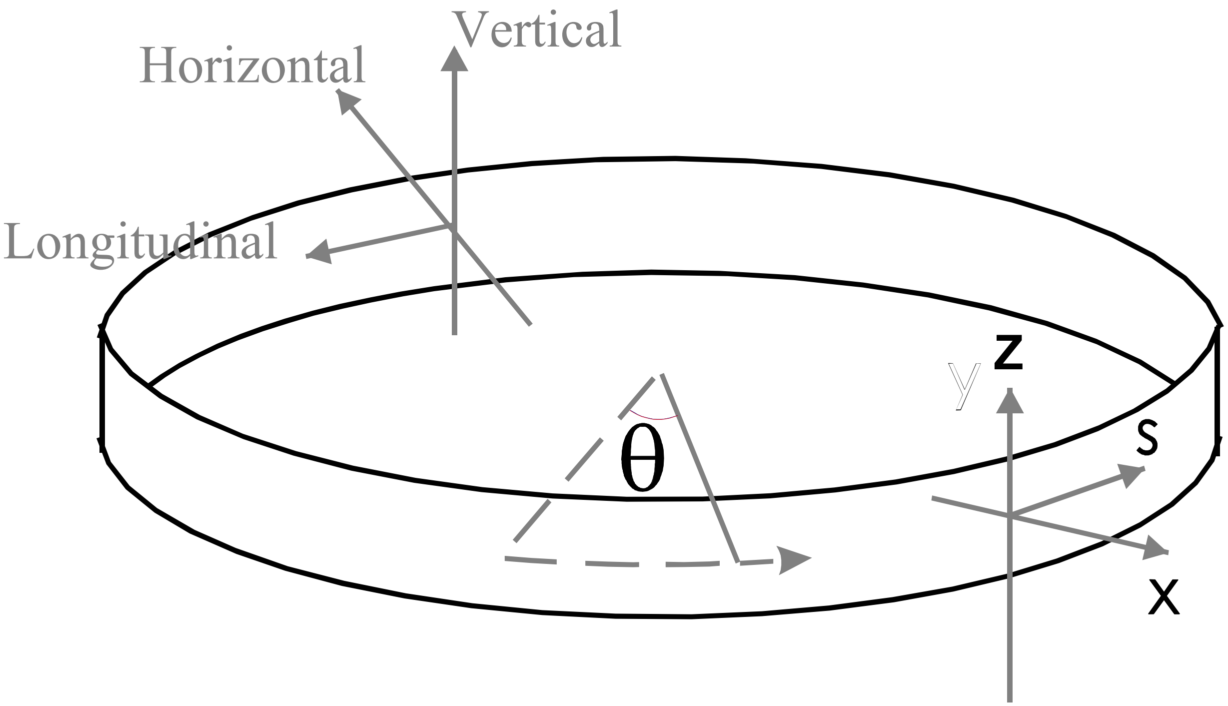
Nicola Semprini Cesari

- Sistemi di coordinate
- Magneti dipolari e quadripolari
- Formule utili
- Moti trasversali

  Equazioni del moto nel dipolo e nel quadrupolo

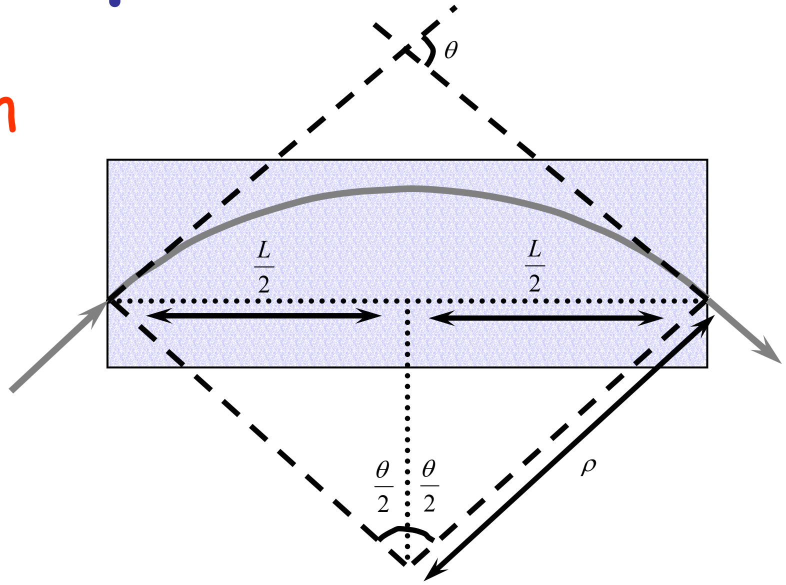
  Equazione di Hill

Sistema di coordinate



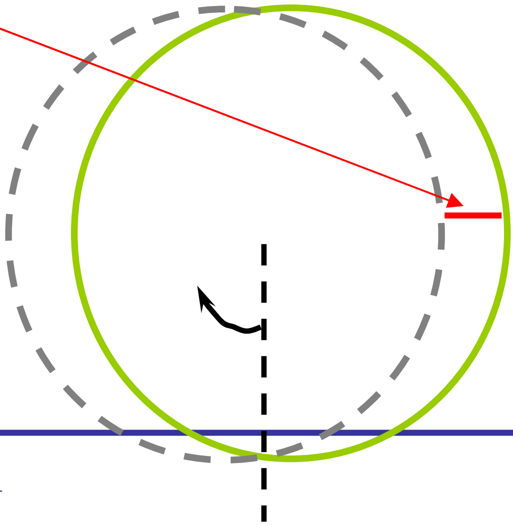
Si adotta un sistema di versori della traiettoria.
Ricordare nel seguito !

Magneti dipolari



I magneti dipolari generano un campo approssimativamente uniforme e costante in direzione -z.

Andamento oscillatorio, con campi uniformi sinusoidale.



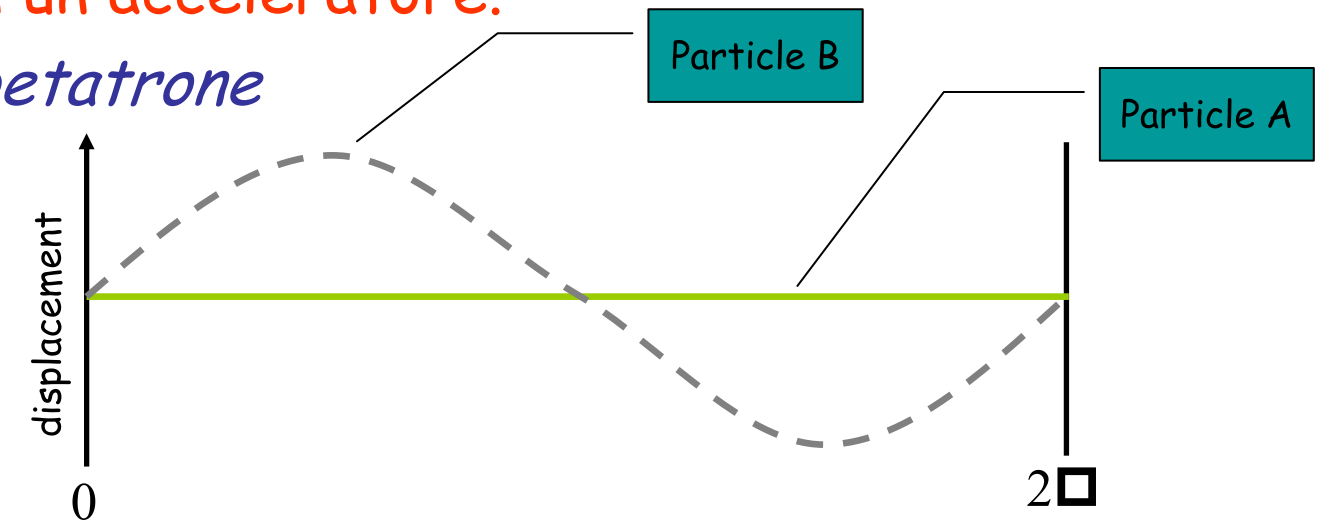
Traiettorie di due cariche che in un determinato punto hanno stesso lo stesso impulso ma angolo differente

Magneti dipolari

Traiettoria della seconda carica rispetto alla prima:

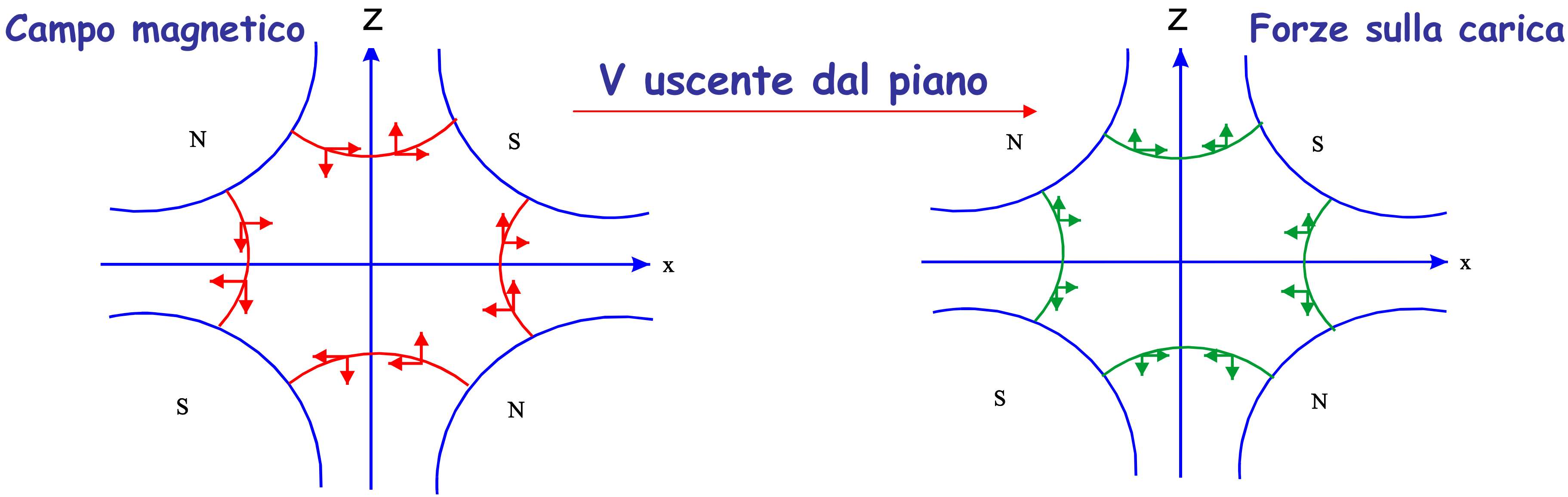
moto oscillatorio che rappresenta il moto trasversale fondamentale in un acceleratore.

Oscillazioni di betatrone



I moti trasversali, come le oscillazioni di betatrone, sono controllati da *magneti quadrupolari* che riportano le cariche sull'orbita di riferimento.

Magneti quadrupolari



La forza di Lorentz focalizza lungo x e defocalizza lungo z. Ruotando il dispositivo di 90 gradi si ottiene una focalizzazione lungo z ed una defocalizzazione lungo x.

I moti trasversali rispetto alla traiettoria di riferimento determinati dall'insieme dei magneti dipolari e quadrupolari sono oscillatori e vengono descritti dalle *Equazioni di Hill*

Alcune formule utili

Moto nel campo magnetico dei dipoli ed elettrico delle cavità. Si trascurano i quadrupoli che correggono in modo trascurabile i risultati seguenti

$$\frac{d\,\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

$$\frac{d}{dt}(p_s \hat{s}) = q(0, E, 0) + q(0, v_s, 0) \wedge (0, 0, -B)$$

$$\dot{p}_s \hat{s} + p_s \dot{\hat{s}} = q\,E\,\hat{s} - q\,v_s B\,\hat{x}$$

$$\dot{p}_s \hat{s} - p_s \frac{v_s}{\rho}\hat{x} = q\,E\,\hat{s} - q\,v_s B\,\hat{x}$$

$$p_s\,\rho\,d\varphi = q\;B\,\rho\,\rho\,d\varphi$$

$$p_s\,ds = q\;B\,ds\;\rho$$

$$\int_{Tr} p_s\,ds = q \int_{Tr} B\,ds\,\rho$$

$$\frac{\int_{Tr} p_s\,ds}{2\pi\rho} = q\frac{\int_{Tr} B\,ds}{2\pi\rho}\rho$$

Relazioni impulso campo

$$\boxed{\begin{aligned} &\dot{p}_s = q\,E \\ &p_s = q\,\rho\,B \qquad \langle p \rangle = q \langle B \rangle \rho \end{aligned}}$$

Il campo elettrico produce le variazioni di energia il campo magnetico curva la traiettoria

Alcune formule utili

$$W^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4 \approx p^2c^2$$

$$W \approx pc = q\,c\,\rho\langle B\rangle$$

Energia

$$\boxed{W \approx 0.3\,Q\langle B\rangle\,\rho}$$

m

tesla

GeV

in unità di e

Alcune formule utili

$$f = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi\rho} \qquad p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad v = \frac{c}{\sqrt{1 + m_0^2 c^2 / p^2}}$$

$$f = \frac{c}{2\pi\rho} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{m_0^2 c^2}{p^2}}} \qquad p = q\,\rho \langle B \rangle$$

Frequenza di rivoluzione

$$\boxed{f = \frac{c}{2\pi\rho} \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{m_0 c}{q\,\rho \langle B \rangle})^2}}}$$

Viola la relatività. Si deve osservare che la geometria dell'acceleratore fissa l'impulso pertanto si può soddisfare la relatività introducendo la giusta relazione velocità impulso.

Moti trasversali

Equazioni del moto nei magneti

$$\frac{d\,\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = q\,\vec{v} \wedge \vec{B}$$ **dentro il magnete il campo elettrico è nullo**

$$\frac{d}{dt}(p_x\hat{x} + p_s\hat{s} + p_z\hat{z}) = q(v_x, v_s, v_z) \wedge (B_x, 0, B_z)$$ **campo magnetico trasversale**

$$\dot{p}_x\hat{x} + \dot{p}_s\hat{s} + \dot{p}_z\hat{z} + p_x\dot{\hat{x}} + p_s\dot{\hat{s}} + p_z\dot{\hat{z}} = q\,v_s B_z\hat{x} + q(v_z B_x - v_x B_z)\hat{s} - q\,v_s B_x\hat{z}$$

$$\dot{\hat{x}} = \vec{\omega} \wedge \hat{x} = \dot{\varphi}\,\hat{z} \wedge \hat{x} = \frac{1}{\rho}\rho\,\dot{\varphi}\,\hat{s} = \frac{v_s}{\rho}\hat{s}$$ **Relazioni di Poisson**

$$\dot{\hat{s}} = \dot{\varphi}\,\hat{z} \wedge \hat{s} = -\frac{v_s}{\rho}\hat{x}$$

$$\dot{\hat{z}} = 0$$

Equazioni del moto nei magneti

$$\dot{p}_x\hat{x}+\dot{p}_s\hat{s}+\dot{p}_z\hat{z}+p_x\frac{v_s}{\rho}\hat{s}-p_s\frac{v_s}{\rho}\hat{x}=q\,v_sB_z\hat{x}+q(v_zB_x-v_xB_z)\hat{s}-q\,v_sB_x\hat{z}$$

$$(\dot{p}_x-p_s\frac{v_s}{\rho})\hat{x}+(\dot{p}_s+p_x\frac{v_s}{\rho})\hat{s}+\dot{p}_z\hat{z}=q\,v_sB_z\hat{x}+q(v_zB_x-v_xB_z)\hat{s}-q\,v_sB_x\hat{z}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\dot{p}_x-p_s\frac{v_s}{\rho}=q\,v_sB_z\\&\dot{p}_s+p_x\frac{v_s}{\rho}=q(v_zB_x-v_xB_z)\\&\dot{p}_z=-q\,v_sB_x\end{aligned}}$$

Equazioni del moto

Moto nel magnete dipolare

$$\dot{p}_x - p_s \frac{v_s}{\rho} = q\, v_s B_z$$

$$\dot{p}_s + p_x \frac{v_s}{\rho} = q(v_z B_x - v_x B_z)$$

$$\dot{p}_z = -q\, v_s B_x$$

campo nel magnete dipolare

$$B_x = 0,\ \ B_s = 0,\ B_z = -B$$

$$\dot{p}_x - p_s \frac{v_s}{\rho} = -q\, v_s B$$

$$\dot{p}_s + p_x \frac{v_s}{\rho} = q v_x B$$

$$\dot{p}_z = 0$$

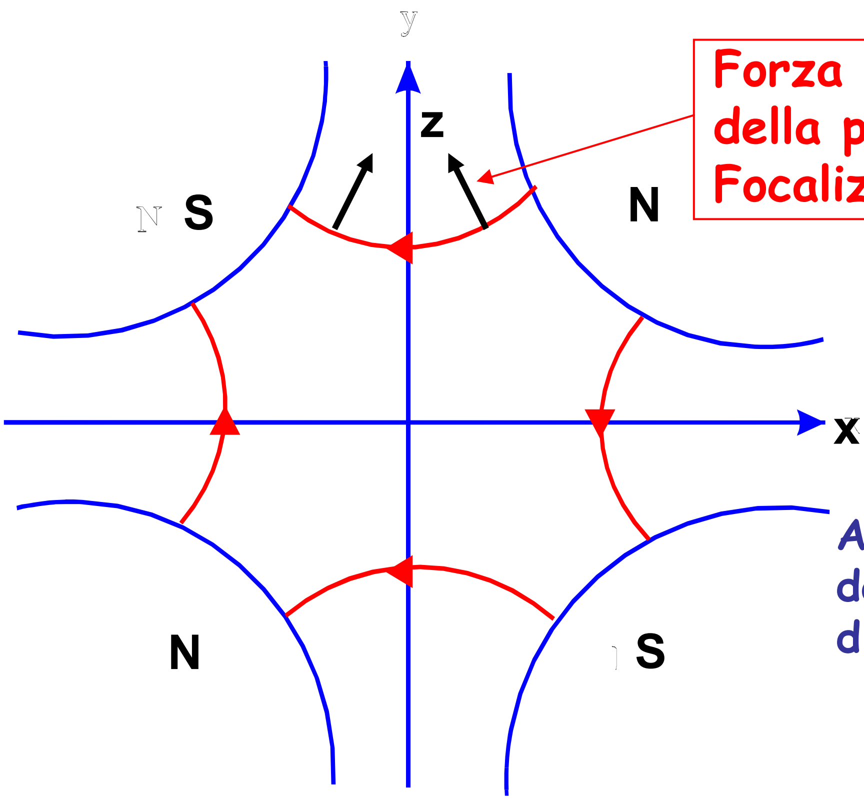
traiettoria di riferimento

$$v_x = 0,\ \ v_s = v,\ \ v_z = 0$$

$$p_s \frac{v_s}{\rho} = q\, v_s B$$

$$\boxed{p_s = q\, \rho\, B}$$

Campo magnetico nel quadrupolo



Forza di Lorentz nel caso in cui la velocità della particella entra nel piano del foglio. Focalizzazione in X defocalizzazione in Z.

Il campo quadrupolare nella origine è nullo per cui in un intorno della origine avremo:

$$B_x = a_{xx}x + a_{xz}z$$
$$B_z = a_{zx}x + a_{zz}z$$
$$B_s = 0$$

Al campo quadrupolare dobbiamo sommare quello dipolare:

$$B_x = a_{xx}x + a_{xz}z$$
$$B_z = \boxed{B_{0z}} + a_{zx}x + a_{zz}z$$
$$B_s = 0$$

nell'intorno si deve anche avere

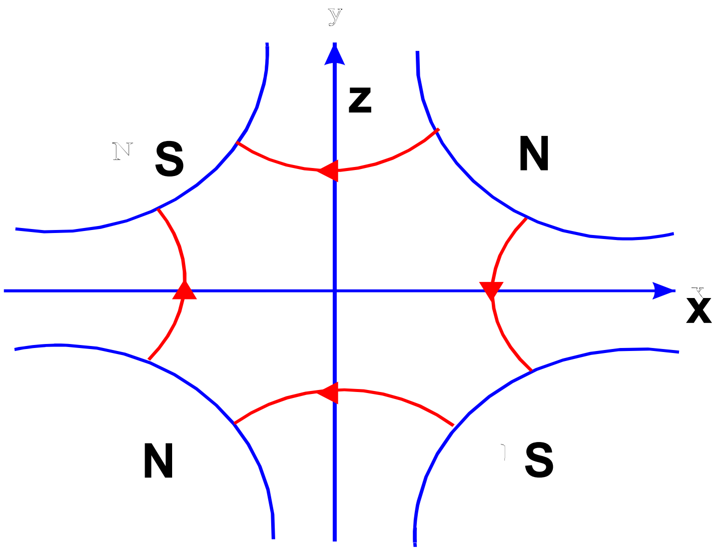
$$div\,\vec{B} = a_{xx} + a_{zz} = 0 \qquad a_{xx} = -a_{zz} = \alpha$$

$$rot\,\vec{B} = (0, a_{xz} - a_{zx}, 0) = \vec{0} \qquad a_{xz} = a_{zx} = \beta$$

forma generale del campo magnetico nell'intorno

$$B_x = \alpha x + \beta z$$
$$B_z = B_{0z} + \beta x - \alpha z$$
$$B_s = 0$$

Campo magnetico nel quadrupolo



Il campo è tale che nella terna scelta $B_z=B_0$ in X=0 per qualunque Z

$$B_z = B_{0z} + \beta x - \alpha z$$

$$B_z(x=0) = B_{0z} - \alpha z = B_{0z}$$

$$\boxed{\alpha = 0}$$

$$B_x = \beta z$$

$$B_z = B_{0z} + \beta x$$

$$B_s = 0$$

si deve tenere conto della disposizione prescelta dei poli magnetici

$$\boxed{\begin{aligned} B_x &= -\beta z \\ B_z &= -B_{0z} - \beta x \\ B_s &= 0 \end{aligned}}$$

Campo magnetico quadrupolare in prossimità della origine

Moto nel quadrupolo

Equazioni del moto

$$\dot{p}_x - p_s \frac{v_s}{\rho} = q\, v_s B_z$$

$$\dot{p}_s + p_x \frac{v_s}{\rho} = q(v_z B_x - v_x B_z)$$

$$\dot{p}_z = -q\, v_s B_x$$

Campo magnetico

$$B_x = -\beta z$$

$$B_z = -B_{0z} - \beta x$$

$$B_s = 0$$

Equazioni del moto nel piano trasversale a z=0

Soluzione stabile: focalizza in X !

$$\dot{p}_x - p_s \frac{v_s}{\rho} = -q\, v_s (B_{0z} + \beta x)$$

Soluzione instabile: non focalizza in z !

$$\dot{p}_z = q\, v_s \beta z$$

$$\dot{p}_x - p_s \frac{v_s}{\rho} = -q\, v_s (B_{0z} + \beta x)$$

$$m\,\ddot{x} - p_s \frac{v_s}{\rho} = -q\, v_s (B_{0z} + \beta x)$$

riparametrizzazione in s

$$\frac{d}{dt} = v_s \frac{d}{ds}$$

$$m v_s^2 x'' - m v_s^2 \frac{1}{\rho} = -q\, v_s (B_{0z} + \beta x)$$

$$x'' - \frac{1}{\rho} = -\frac{q}{p_s}(B_{0z} + \beta x)$$

Moto nel quadrupolo

$$x'' - \frac{1}{\rho} = -\frac{q}{p_s}(B_{0z} + \beta x)$$

$$\rho = \rho_0 + x = \rho_0 (1 + \frac{x}{\rho_0})$$

$$p_s = p_0 + \delta p = p_0 (1 + \frac{\delta p}{p_0})$$

$$x'' - \frac{1}{\rho_0}(1 - \frac{x}{\rho_0}) = -\frac{q}{p_0}(1 - \frac{\delta p}{p_0})(B_{0z} + \beta x)$$

Equazione oscillatoria con coefficiente elastico variabile (pendolo variabile!)

$$x'' - \frac{1}{\rho_0} + \frac{x}{\rho_0^2} \approx -\frac{q}{p_0} B_{0z} - \frac{q}{p_0}\beta x \qquad p_0 = q\rho_0 B_{0z}$$

Eq. Di Hill, ok PDG

$$x'' - \frac{1}{\rho_0} + \frac{x}{\rho_0^2} \approx -\frac{1}{\rho_0} - \frac{\beta}{\rho_0 B_{0z}} x$$

$$x'' \approx -(\frac{1}{\rho_0^2} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\beta}{B_{0z}})x$$

$$x'' \approx -K(s)\, x$$

Fine