

Acceleratori Circolari II

Nicola Semprini Cesari

- Soluzione della Eq. di Hill
 - Emittanza trasversale
 - Emittanza del fascio
 - Misure di emittanza
 - Emittanza invariante
 - Luminosità
 - Fasci gaussiani
 - Ottimizzazione della luminosità
-

Soluzione equazione di Hill

$$x = A(s) \cos(\phi(s) + \phi_0)$$

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + K x = 0$$

$$\begin{aligned} \ddot{A} - A\dot{\phi}^2 + K A &= 0 \\ A^2 \dot{\phi} &= \text{cost} = \varepsilon \end{aligned}$$

Dunque i magneti dell'acceleratore (dipoli e quadrupoli, $K(s)$) determinano le funzioni $A(s)$ e $\phi(s)$ ma non sono in grado di variare la quantità ε ! Tale quantità è definita dalle condizioni iniziali ovvero dal valore di A e $d\phi/ds$ al momento dell'iniezione nell'acceleratore (in realtà è possibile modificare tale valore dopo l'iniezione con l'electron cooling ed il raffreddamento stocastico). ε prende il nome di *emittanza*.

Dato questo fatto si preferisce porre

$$x = \sqrt{\beta(s) \varepsilon} \cos(\phi(s) + \phi_0)$$

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + K x = 0$$

$$\begin{aligned} 2\beta\ddot{\beta} - \dot{\beta}^2 + 4K\beta^2 - 4 &= 0 \\ \beta\dot{\phi} &= 1 \end{aligned}$$

dalla quale otteniamo anche

$$\dot{x}(s) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta(s)}} \left[\frac{\dot{\beta}(s)}{2} \cos(\phi(s) + \phi_0) - \sin(\phi(s) + \phi_0) \right]$$

Periodicità

Di solito in un acceleratore circolare si ha la ripetizione di sequenze di magneti. Supponiamo allora di avere N sezioni identiche di lunghezza L per cui $NL=C$. Allora avremo che $K(s)=K(s+L)$ per cui anche $\beta(s)=\beta(s+L)$. Notiamo ora che

$$\beta \dot{\phi} = 1 \quad \phi(s) = \int_{s_0}^s \frac{1}{\beta(\sigma)} d\sigma \quad \phi(s+L) - \phi(s) = \int_{s_0}^{s+L} \frac{1}{\beta(\sigma)} d\sigma - \int_{s_0}^s \frac{1}{\beta(\sigma)} d\sigma = \int_s^{s+L} \frac{1}{\beta(\sigma)} d\sigma \neq 0$$

dunque $\phi(s)$ non ha periodicità L .

Il numero di giri compiuti dalla $\phi(s)$ al variare di s su tutta la lunghezza dell'acceleratore prende il nome di *tuning* (è in sostanza l'armonica del moto oscillatorio)

$$\phi(s+C) - \phi(s) = N \int_s^{s+L} \frac{1}{\beta(\sigma)} d\sigma \neq n 2\pi$$

Emittanza trasversale

Notiamo che la posizione x (rispetto alla traiettoria di riferimento) e la sua derivata dx/ds sono sempre limitate da

$$x = \sqrt{\beta(s)\varepsilon} \cos(\phi(s) + \phi_0)$$

$$-\sqrt{\beta(s)\varepsilon} \leq x \leq \sqrt{\beta(s)\varepsilon}$$

$$\dot{x}(s) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta(s)}} \left[\frac{\dot{\beta}(s)}{2} \cos(\phi(s) + \phi_0) - \sin(\phi(s) + \phi_0) \right]$$

$$-\sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta(s)}} \leq \dot{x} \leq +\sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta(s)}}$$

questo significa riferendosi al valore a mezza altezza

$$\Delta x \approx \sqrt{\beta(s)\varepsilon}$$
$$\Delta \dot{x} \approx \sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta(s)}}$$

Le equazioni dicono che il moto oscillatorio trasversale attorno alla traiettoria di riferimento è di ampiezza e periodicità spaziale variabile. Tuttavia il moto si svolge in modo tale da conservare l'emittanza ovvero il prodotto $\Delta x \Delta x'$!

da cui otteniamo anche

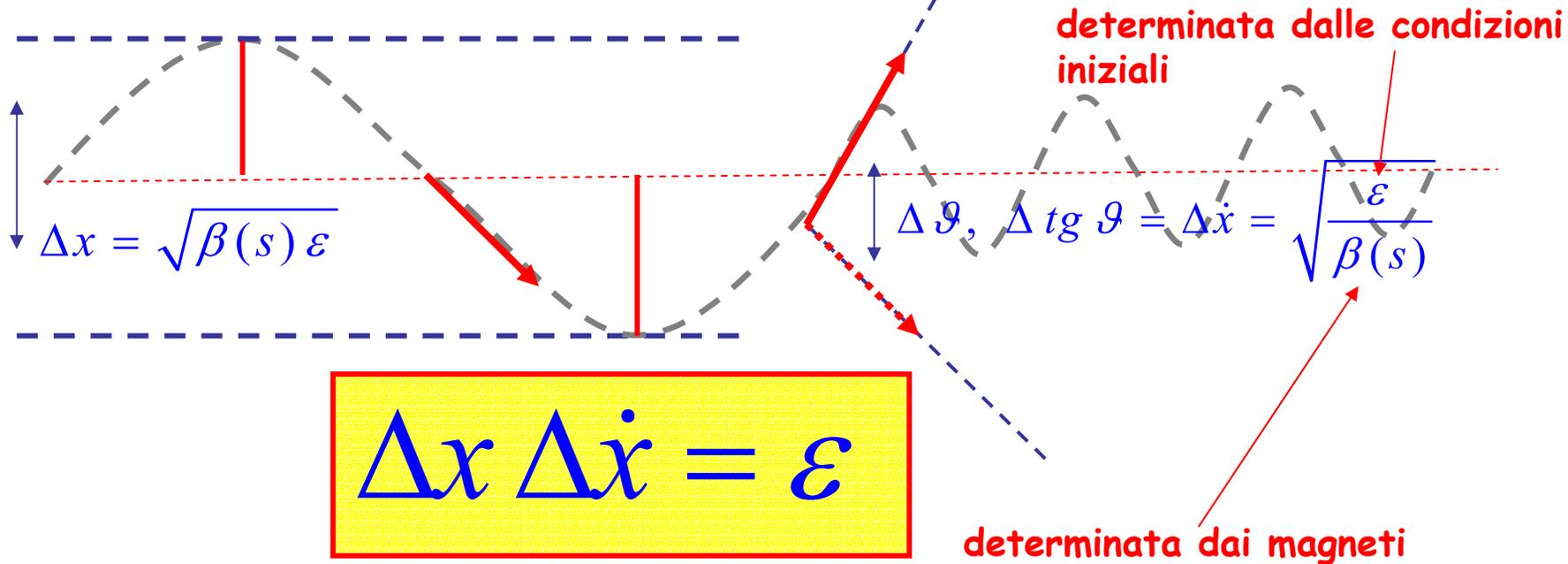
$$\Delta x \Delta \dot{x} \approx \varepsilon$$

queste relazioni hanno un semplice significato

Emittanza trasversale

$$x(s) = \sqrt{\beta(s) \varepsilon} \cos(\phi(s) + \phi_0)$$

$$\dot{x}(s) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta(s)}} \left[\frac{\dot{\beta}(s)}{2} \cos(\phi(s) + \phi_0) - \sin(\phi(s) + \phi_0) \right]$$



Emittanza trasversale

Dunque l'ottica dell'acceleratore (dipoli e quadrupoli) può modificare le ampiezze dell'oscillazione spaziale e dell'oscillazione angolare attorno alla traiettoria di riferimento (funzione d'ampiezza $\beta(s)$) ma non il loro prodotto (emittanza ε).

Con l'ottica quindi possiamo costringere la particella a viaggiare per un tratto sull'orbita di riferimento (al prezzo di un aumento dell'angolo di volo) oppure ad avere una direzione di volo esattamente parallela all'orbita di riferimento (al prezzo di un aumento della distanza dall'orbita di riferimento). La richiesta simultanea di queste condizioni è invece limitata dal valore dell'emittanza.

Chi definisce l'emittanza associata ad una carica dentro l'acceleratore?

Evidentemente la posizione e l'angolo iniziali (rispetto alla traiettoria di riferimento) al momento della iniezione nella macchina definiscono l'emittanza associata ad una determinata carica. In altre parole l'emittanza misura la qualità del processo di inserimento della carica nell'acceleratore.

Emittanza del fascio

Se abbiamo N particelle cariche nell'acceleratore avremo per ciascuna di queste

$$-\sqrt{\beta(s)\varepsilon_i} \leq x_i \leq \sqrt{\beta(s)\varepsilon_i} \qquad -\sqrt{\frac{\varepsilon_i}{\beta(s)}} \leq \dot{x}_i \leq +\sqrt{\frac{\varepsilon_i}{\beta(s)}}$$

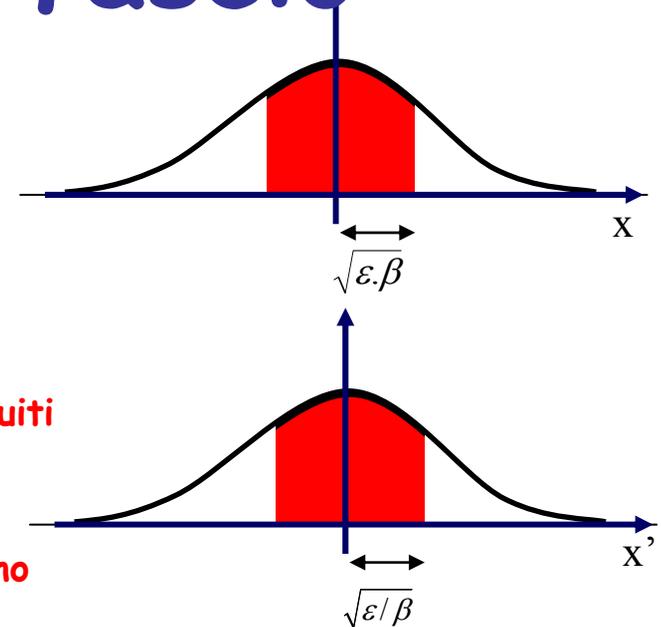
il che significa che le posizioni e gli angoli (rispetto alla traiettoria di riferimento) in un determinato punto dell'acceleratore ed in un determinato istante sono distribuiti attorno allo zero secondo una certa distribuzione di probabilità.

Ipotizziamo (come si fa di solito) che tali distribuzioni siano gaussiane e consideriamo intervalli nella distribuzione di x e x' tali che contengano il 68.3% delle particelle del fascio (intervallo di una sigma). Tali intervalli avranno i seguenti valori

$$-\sqrt{\beta(s)\varepsilon_\sigma} \leq x \leq \sqrt{\beta(s)\varepsilon_\sigma} \qquad -\sqrt{\frac{\varepsilon_\sigma}{\beta(s)}} \leq \dot{x} \leq +\sqrt{\frac{\varepsilon_\sigma}{\beta(s)}}$$

e definiscono l'emittanza del fascio (riferita ad una sigma).

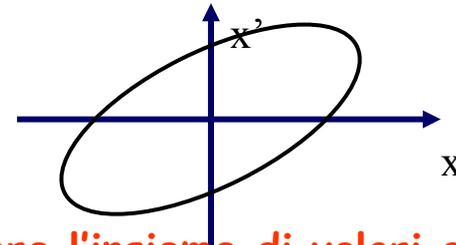
Dalla definizione risulta pertanto che l'emittanza del fascio è quel valore di ε che determina un intervallo in x e x' che contiene una determinata frazione delle particelle del fascio.



Emittanza del fascio

I macchinisti rappresentano il moto oscillatorio nello *spazio delle tracce* ovvero esprimono x' (tangente dell'angolo) in funzione di x (posizione). Si ottiene facilmente per una determinata particella

$$\frac{\dot{\beta}^2 + 4}{4\beta\varepsilon} x^2 + \frac{\beta}{\varepsilon} \dot{x}^2 - \frac{\dot{\beta}}{\varepsilon} x \dot{x} = 1$$



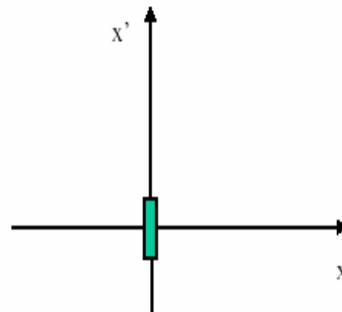
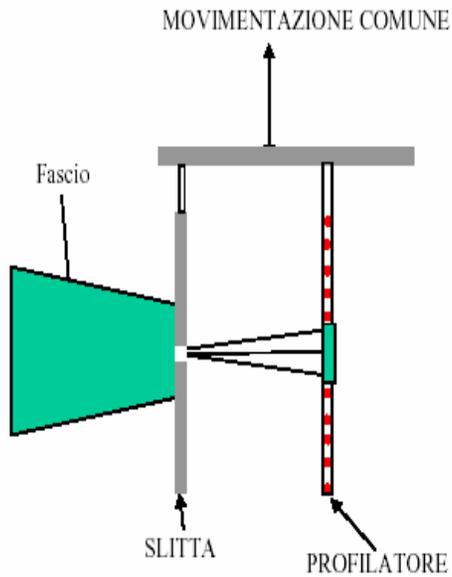
Dunque in una determinata posizione dell'acceleratore l'insieme di valori di x e x' permessi ad una particella giacciono su di una ellisse (il punto specifico dell'ellisse dipende dalla fase).

Mano a mano che la particella percorre l'acceleratore il punto associato nello SdT percorre una ellisse di parametri variabili (quindi si muove su di un involuppo di ellissi!).

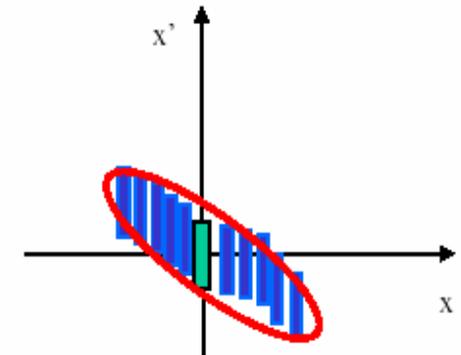
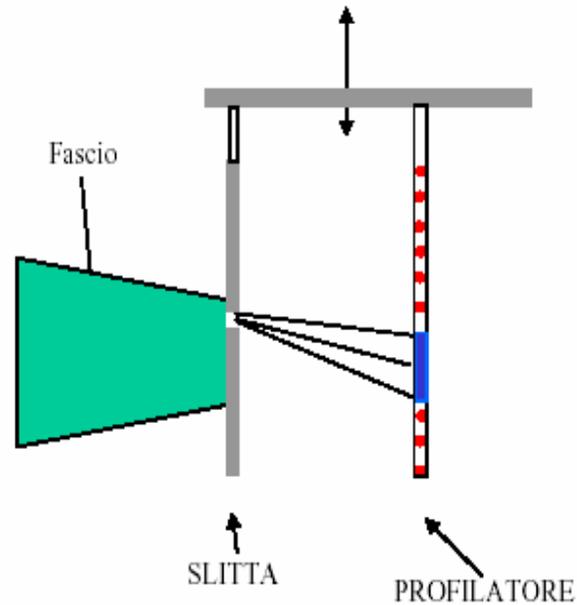
Nonostante questo il valore dell'area di ognuna dell'ellissi dell'involuppo è sempre lo stesso (infatti non dipende da $\beta(s)$ come è facile vedere) e vale $A = \pi\varepsilon$.

Se abbiamo N particelle avremo N punti nello SdT che si muovono su N ellissi differenti che non s'incrociano mai. In questo caso l'emittanza del fascio vale A/π dove A è l'area della ellissi che contiene una determinata frazione delle particelle del fascio (ad esempio il 68.3%).

Misure di emittanza

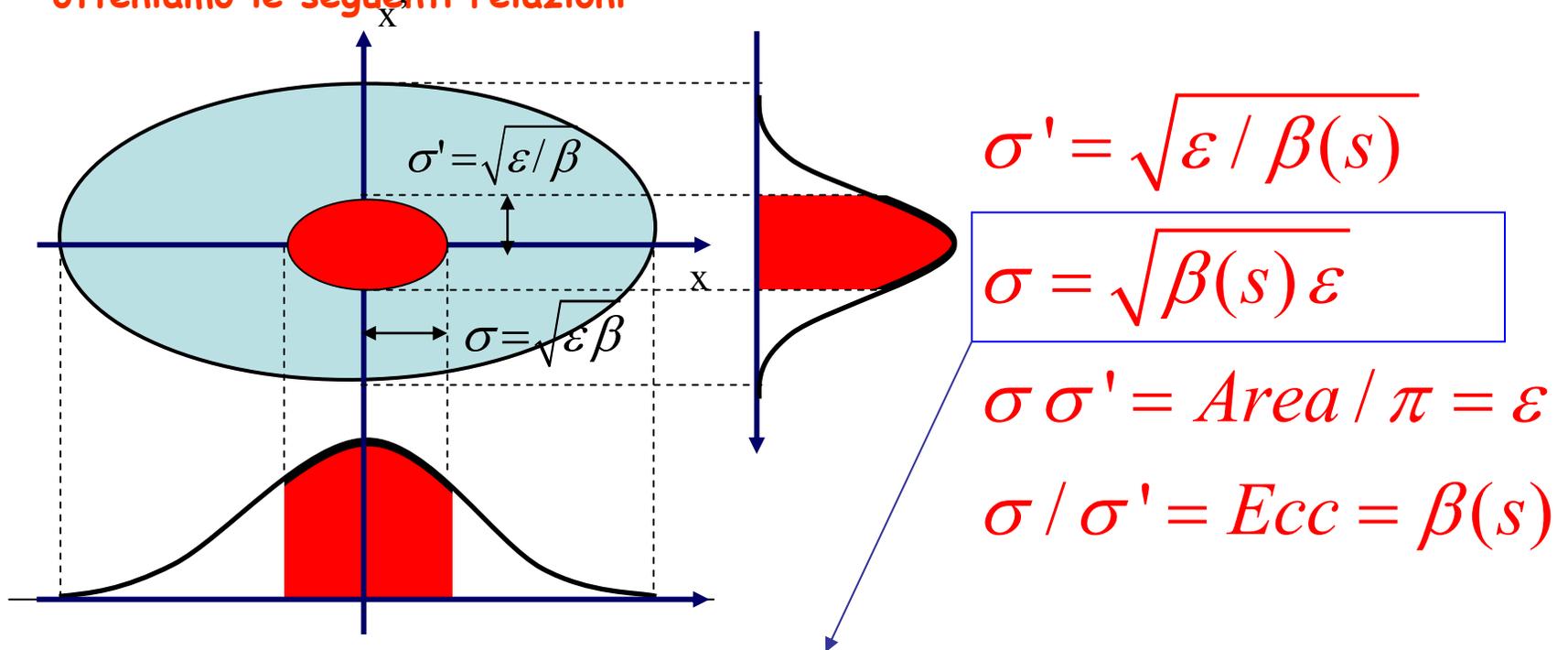


MOVIMENTAZIONE COMUNE



Profilo del fascio

Assumendo come riferimento le ellissi che contengono tutto il fascio (ellisse azzurra) ed una sua determinata frazione (ad esempio il 68.3%, ellisse rossa) otteniamo le seguenti relazioni



Per ottenere grande luminosità nel punto d'interazione, non potendo modificare il valore di ϵ , è quindi necessario predisporre l'ottica in tale punto in modo da ottenere un piccolo valore della funzione $\beta(s)$ (β^*).

Emittanza invariante

Il processo di accelerazione modifica v_z ma non v_x (o v_y) per cui risulta anche modificato $x' = v_x/v_z$ che all'aumentare della velocità della particella tende a diminuire. Dunque *l'emittanza diminuisce durante la fase di accelerazione.*

Per monitorare il mantenimento delle proprietà del fascio durante la fase di accelerazione risulta quindi vantaggioso introdurre una grandezza associata all'emittanza che rimanga però invariante.

Il punto di partenza consiste nell'osservare che l'accelerazione non modifica né x né v_x per cui *la quantità xv_x è invariante*

$$x v_x = x \frac{v_x}{v_z} v_z = x \dot{x} v_z \quad \mathcal{E}_{inv} = \mathcal{E} v_z$$

così facendo si viola la relatività non tenendo conto che l'accelerazione definisce l'impulso della particella e quindi un profilo delle velocità che converge a c . Per questo è meglio introdurre la

$$x \frac{p_x}{p_z} = x \frac{p_x}{p_z} p_z = x \dot{x} p_z = mc \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} x \dot{x} \quad \frac{x p_x}{mc} = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} x \dot{x}$$

la quantità a primo membro è invariante e dimensionalmente uguale all'emittanza ed è per definizione *l'emittanza invariante o normalizzata*

$$\mathcal{E}_{inv} = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \mathcal{E}$$

Luminosità

In un collider dopo l'energia il parametro più importante è la luminosità che determina assieme alla sezione d'urto il numero di processi di un determinato tipo nella unità di tempo.

Solitamente in un collider particelle di due tipi circolano raggruppate in bunches egualmente spaziate sulla stessa traiettoria ma con versi opposti.



Quando due bunches si incontrano hanno luogo interazioni tra i due tipi di particelle. Supponendo che l'ottica sia stata regolata al meglio in modo da avere urti tra bunches perfettamente frontali avremo

$$\Delta N = \frac{N_2 \sigma}{\Delta S} N_1 \frac{\Delta t}{\tau} N_b = N_b \frac{1}{\tau} \frac{N_1 N_2}{\Delta S} \sigma \Delta t = N_b f_{riv} \frac{N_1 N_2}{\Delta S} \sigma \Delta t$$

frazione superficie d'urto $\frac{N_2 \sigma}{\Delta S}$
 particelle incidenti N_1
 frazione temporale $\frac{\Delta t}{\tau}$
 numero burst per fascio N_b

$$\frac{dN}{dt} = L \sigma \quad L = N_b f_{riv} \frac{N_1 N_2}{\Delta S}$$

Luminosità

Dunque il numero di interazioni nella unità di tempo in un determinato canale di reazione dipende dalla sezione d'urto della reazione in quel canale e da un coefficiente dipendente dalla geometria del bunch che viene detto *luminosità* L ($L^{-2} T^{-1}$, $cm^{-2} s^{-1}$).

$$\frac{dN}{dt} = L \sigma \quad L = N_b f_{riv} \frac{N_1 N_2}{\Delta S}$$

La precisione raggiunta nello studio di una reazione dipende dalla statistica complessivamente raccolta che risulta essere data dal prodotto della sezione d'urto della reazione e dell'integrale della luminosità o *luminosità integrata* L_{int} ($L^{-2} cm^{-2}$).

$$N(t) = \sigma L_{int}(t) \quad L_{int}(t) = \int_0^t L(\tau) d\tau$$

Dato che, nelle macchine attuali, la luminosità (luminosità integrata) tende ad essere un numero elevato anziché i cm^{-2} si usano i nb^{-1} pb^{-1} e fb^{-1}

$$1b = 10^{-24} cm^2$$

$$1nb = 10^{-9} \times 10^{-24} cm^2 = 10^{-33} cm^2$$

$$1cm^{-2} = 10^{-33} pb^{-1}$$

$$1b = 10^{-24} cm^2$$

$$1pb = 10^{-12} \times 10^{-24} cm^2 = 10^{-36} cm^2$$

$$1cm^{-2} = 10^{-36} pb^{-1}$$

$$1b = 10^{-24} cm^2$$

$$1fb = 10^{-15} \times 10^{-24} cm^2 = 10^{-39} cm^2$$

$$1cm^{-2} = 10^{-39} fb^{-1}$$

Luminosità

una formula più accurata

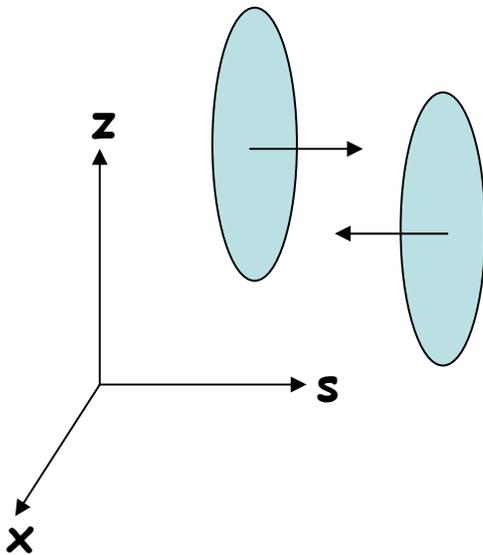
La formula precedente vale nel caso in cui i burst dei fasci collidenti si intersecano frontalmente ed hanno la stessa sezione trasversale. Queste condizioni nella pratica non si realizzano!

Immagineremo allora che nel punto di collisione i fasci abbiano distribuzioni trasversali descritti dalle funzioni $f_1(x,y)$ e $f_2(x,y)$. Avremo allora

$$dN = \frac{N_2 f_2(x, z) dx dz \sigma}{dx dz} N_1 f_1(x, z) dx dz \frac{dt}{\tau} N_b$$

$$\frac{dN}{dt} = N_b f_{riv} N_1 N_2 \iint f_1(x, z) f_2(x, z) dx dz \sigma = L \sigma$$

$$L = N_b f_{riv} N_1 N_2 \iint f_1(x, z) f_2(x, z) dx dz$$



Fasci gaussiani

$$\begin{aligned}
 & \iint f_1(x,z)f_2(x,z) dx dz = \\
 &= \frac{\iint \exp\left(-\frac{(x-x_1)^2}{2\sigma_{1x}^2} - \frac{(z-z_1)^2}{2\sigma_{1z}^2}\right) \exp\left(-\frac{(x-x_2)^2}{2\sigma_{2x}^2} - \frac{(z-z_2)^2}{2\sigma_{2z}^2}\right) dx dz}{\iint \exp\left(-\frac{(x-x_1)^2}{2\sigma_{1x}^2} - \frac{(z-z_1)^2}{2\sigma_{1z}^2}\right) dx dz \iint \exp\left(-\frac{(x-x_2)^2}{2\sigma_{2x}^2} - \frac{(z-z_2)^2}{2\sigma_{2z}^2}\right) dx dz} = \\
 &= \frac{\iint \exp\left(-\frac{(x-x_1)^2}{2\sigma_{1x}^2} - \frac{(x-x_2)^2}{2\sigma_{2x}^2}\right) \exp\left(-\frac{(z-z_1)^2}{2\sigma_{1z}^2} - \frac{(z-z_2)^2}{2\sigma_{2z}^2}\right) dx dz}{(\sqrt{2\pi})^4 \sigma_{1x} \sigma_{2x} \sigma_{1z} \sigma_{2z}} = \\
 & \exp\left(-\frac{(x_1-x_2)^2}{2(\sigma_{1x}^2 + \sigma_{2x}^2)}\right) \exp\left(-\frac{(z_1-z_2)^2}{2(\sigma_{1z}^2 + \sigma_{2z}^2)}\right) \iint \exp\left(-\frac{\left(x - \frac{\frac{x_1}{\sigma_{1x}^2} + \frac{x_2}{\sigma_{2x}^2}}{\frac{1}{\sigma_{1x}^2} + \frac{1}{\sigma_{2x}^2}}\right)^2}{2\frac{1}{\frac{1}{\sigma_{1x}^2} + \frac{1}{\sigma_{2x}^2}}}\right) \exp\left(-\frac{\left(z - \frac{\frac{z_1}{\sigma_{1z}^2} + \frac{z_2}{\sigma_{2z}^2}}{\frac{1}{\sigma_{1z}^2} + \frac{1}{\sigma_{2z}^2}}\right)^2}{2\frac{1}{\frac{1}{\sigma_{1z}^2} + \frac{1}{\sigma_{2z}^2}}}\right) dx dz \\
 &= \frac{\exp\left(-\frac{(x_1-x_2)^2}{2(\sigma_{1x}^2 + \sigma_{2x}^2)}\right) \exp\left(-\frac{(z_1-z_2)^2}{2(\sigma_{1z}^2 + \sigma_{2z}^2)}\right) (\sqrt{2\pi})^4 \sigma_{1x} \sigma_{2x} \sigma_{1z} \sigma_{2z}}{(\sqrt{2\pi})^4 \sigma_{1x} \sigma_{2x} \sigma_{1z} \sigma_{2z}} = \\
 &= \frac{\exp\left(-\frac{(x_1-x_2)^2}{2(\sigma_{1x}^2 + \sigma_{2x}^2)}\right) \exp\left(-\frac{(z_1-z_2)^2}{2(\sigma_{1z}^2 + \sigma_{2z}^2)}\right) (\sqrt{2\pi})^2 \sqrt{\frac{1}{\sigma_{1x}^2 + \sigma_{2x}^2}} \sqrt{\frac{1}{\sigma_{1z}^2 + \sigma_{2z}^2}}}{(\sqrt{2\pi})^4 \sigma_{1x} \sigma_{2x} \sigma_{1z} \sigma_{2z}} = \\
 &= \frac{\exp\left(-\frac{(x_1-x_2)^2}{2(\sigma_{1x}^2 + \sigma_{2x}^2)}\right) \exp\left(-\frac{(z_1-z_2)^2}{2(\sigma_{1z}^2 + \sigma_{2z}^2)}\right)}{2\pi \sqrt{\sigma_{1x}^2 + \sigma_{2x}^2} \sqrt{\sigma_{1z}^2 + \sigma_{2z}^2}}
 \end{aligned}$$

Luminosità per fasci gaussiani

$$L = N_b f_{riv} N_1 N_2 \frac{\exp\left(-\frac{(x_1 - x_2)^2}{2(\sigma_{1x}^2 + \sigma_{2x}^2)}\right) \exp\left(-\frac{(z_1 - z_2)^2}{2(\sigma_{1z}^2 + \sigma_{2z}^2)}\right)}{2\pi \sqrt{\sigma_{1x}^2 + \sigma_{2x}^2} \sqrt{\sigma_{1z}^2 + \sigma_{2z}^2}}$$

nel caso di urto frontale tra fasci gaussiani di uguale distribuzione trasversale si ottiene

$$L = N_b f_{riv} \frac{N_1 N_2}{4\pi \sigma_x \sigma_z}$$

che è la formula più usata (vedi PDG).

Ottimizzare la luminosità

Tenuto conto che che f_{riv} non può essere modificata la luminosità può essere ottimizzata massimizzando N_b , N_1 ed N_2 e minimizzando σ_x e σ_z

$$L = N_b f_{riv} \frac{N_1 N_2}{4\pi \sigma_x \sigma_z}$$

N_b : l'aumento del numero di burst comporta un aumento della corrente di fascio e quindi un aumento della potenza dissipata dai campi elettrici ovvero dalle cavità a radiofrequenza. Inoltre comporta una diminuzione del tempo a disposizione degli apparati (tempi di decisione del trigger e di acquisizione dei dati).

$N_{1/2}$: il numero di particelle per burst è limitato dagli effetti collettivi [le cariche del burst generano un campo elettromagnetico soggetto alle condizioni al contorno delle cavità e della beam pipe. Tale campo modifica la traiettoria e la struttura del burst stesso (se il tempo di decadimento è sufficientemente lungo), dei burst dello stesso fascio e dei burst dell'altro fascio (quest'ultimo effetto è limitato in LHC dato che i fasci circolano in tubi a vuoto differenti)]. Tali effetti sono difficili da calcolare (molti lavori belli e difficili basati su modelli, manca una teoria generale).

Ottimizzare la luminosità

$\sigma_{x/y}$: la diminuzione delle sezioni trasversali dei fasci può essere ottenuta minimizzando l'emittanza e la funzione d'ampiezza. Per quanto riguarda l'emittanza sappiamo che si tratta di una proprietà dell'intera macchina dipendente dalla qualità dell'iniezione e dalla sua ottica e non può essere facilmente modificata. Al contrario la funzione d'ampiezza può essere facilmente modificata operando sui magneti prossimi al punto d'interazione.

$$\sigma_{x/y} = \sqrt{\beta_{x/y}(s) \varepsilon_{x/y}}$$

La funzione d'ampiezza è determinata dalla equazione differenziale seguente

$$2\beta\ddot{\beta} - \dot{\beta}^2 + 4K\beta^2 - 4 = 0$$

per vedere un caso semplice immaginiamo che $\beta(s)$ non dipenda da s si ha allora

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{K}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\rho_0^2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\beta}{B_{0z}}}} = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 + \frac{\rho_0\beta}{B_{0z}}}}$$

che mostra che piccoli valori di $\beta(s)$ possono essere ottenuti con quadrupoli di elevato gradiente di campo β posti in prossimità del punto d'interazione.

Fine