

Superconduttività II

Nicola Semprini Cesari

- La teoria di London & London
 - Campi elettrici e magnetici nei superconduttori
 - Carica elettrica puntiforme
 - Distribuzione piana di carica
 - Distribuzione piana di corrente
 - Filo rettilineo percorso da corrente
 - Onde elettromagnetiche
 - Interpretazione quantomeccanica
 - Quantizzazione del flusso magnetico
-

Teoria fenomenologica di London-London

La prima teoria della superconduttività, in seguito detta del I tipo, fu formulata da F. e H. London nel 1935. Si tratta di una teoria basata sulla elettrodinamica classica che descrive le proprietà allora note della superconduttività (*assenza di resistenza ed effetto Meissner*). La teoria assume che all'interno del SC vi siano cariche elettriche in grado di muoversi senza interazioni reticolari (resistenza ohmica nulla). Vengono inoltre imposte condizioni ad hoc affinché sia descritto l'effetto meissner.

assenza di resistenza
$$-e\vec{E} = m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \quad \vec{E} = \frac{m}{ne^2} \frac{\partial(-ne\vec{v})}{\partial t} \quad \vec{E} = \frac{m}{ne^2} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$$

dobbiamo ora imporre le giuste condizioni affinché sia descritto l'effetto Meissner. Consideriamo l'equazione di Faraday

$$\oint_I \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_I \frac{m}{ne^2} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \cdot d\vec{l} = \frac{m}{ne^2} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S(I)} \vec{\nabla} \wedge \vec{J} \cdot d\vec{S} = \iiint_{S(I)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{m}{ne^2} \vec{\nabla} \wedge \vec{J} \right) \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \iiint_{S(I)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint_{S(I)} \frac{\partial}{\partial t} (-\vec{B}) \cdot d\vec{S}$$

$\vec{\nabla} \wedge \vec{J} = -ne^2 / m \vec{B} + \vec{K}$ l'effetto Meissner richiede che nei punti interni di un sup.cond. $B=0$ a meno che nel punto non vi sia una corrente elettrica. Dunque deve essere $B=0$ se $J=0$ il che richiede $K=0$

$\vec{\nabla} \wedge \vec{J} = -ne^2 / m \vec{B}$

equazioni costitutive di London

$$\boxed{\text{Teoria del Superconduttore}} = \boxed{\vec{E} = \frac{m}{ne^2} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{J} = -ne^2 / m \vec{B}} + \boxed{\text{Equazioni di Maxwell nel vuoto}}$$

$$\boxed{\text{Teoria del Conduttore}} = \boxed{\vec{E} = \rho \vec{J}} + \boxed{\text{Equazioni di Maxwell nel vuoto}}$$

Campi elettrici e magnetici nei superconduttori secondo la teoria di London

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial}{\partial t} \rho$$

$$\vec{E} = \mu_0 \lambda^2 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{J} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \vec{B} \quad \lambda = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n e^2}}$$

Nel SC un campo elettrico determina una accelerazione delle cariche. Nel conduttore solo una velocità costante.

Nel SC si possono avere correnti elettriche con campi magnetici stazionari. Nel vuoto solo con campi magnetici variabili.

le proprietà fisiche del SC sono completamente descritte da λ (fattore di London)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial}{\partial t} \rho$$

Carica elettrica puntiforme nel SC

$$\vec{E} = \mu_0 \lambda^2 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{J} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \vec{B} \quad \lambda = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n e^2}}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \left(\mu_0 \lambda^2 \frac{\partial}{\partial t} \vec{J} \right) = \mu_0 \lambda^2 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\mu_0 \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho = -\frac{1}{\lambda^2 \mu_0 \epsilon_0} \rho \quad \rho = \rho_0 e^{i \frac{t}{\lambda \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}}$$

Nel vuoto una carica ferma da luogo ad un campo elettrico costante. Nel SC la carica ferma da luogo ad oscillazioni nel suo valore e quindi a campi elettrici oscillanti. Nel SC i campi elettrici longitudinali (generati da cariche elettriche) sono sempre variabili col tempo (OK controllato anche con le equazioni generali della propagazione del campo elettrico, l'effetto Faraday non contribuisce ed il campo non viene smorzato esponenzialmente)

il valore della carica locale oscilla sinusoidalmente con valori estremi pari alla carica depositata (oscillazioni di plasma, assenza di dissipazione). Stesso meccanismo del conduttore dove però la carica diminuirebbe esponenzialmente (effetti dissipativi). Monopolo oscillante (praticamente impossibile da realizzare nel vuoto) che non emette onde elettromagnetiche.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial}{\partial t} \rho$$

$$\vec{E} = \mu_0 \lambda^2 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{J} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \vec{B} \quad \lambda = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n e^2}}$$

vogliamo studiare più in dettaglio il fenomeno utilizzando una geometria più semplice

Piano di carica ferma nel SC

Il piano carico determina E normale e uniforme su tutto lo spazio (I-Max), E determina J variabile col tempo ma uniforme (I-Lon) e quindi non si ha campo magnetico (II-Lon). Dalla IV-Max si ha

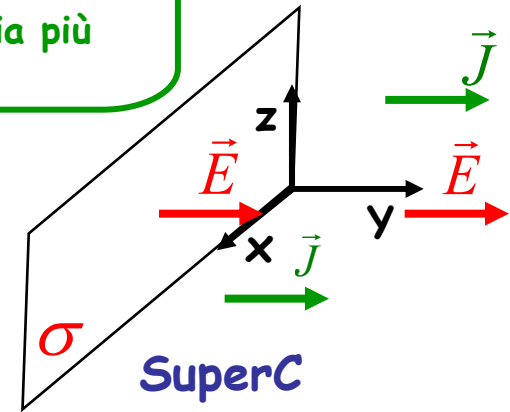
$$0 = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \quad 0 = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} \quad 0 = \frac{\mu_0}{\lambda} \vec{E} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = -\frac{1}{\lambda \epsilon_0} \vec{E} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_y = -\frac{1}{\lambda \epsilon_0} E_y \quad E_y = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} e^{i \frac{t}{\sqrt{\lambda \epsilon_0}}}$$

per le correnti invece abbiamo

$$0 = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \quad 0 = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \lambda \frac{\partial}{\partial t} \vec{J} \quad 0 = \vec{J} + \lambda \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{J}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{J} = -\frac{1}{\lambda \epsilon_0} \vec{J} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} J_y = -\frac{1}{\lambda \epsilon_0} J_y \quad J_y = i \sqrt{\frac{\lambda}{\epsilon_0}} \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} e^{i \frac{t}{\sqrt{\lambda \epsilon_0}}}$$



i campi E e J sono uniformi e collineari su tutto lo spazio e variabili nel tempo secondo una legge sinusoidale (oscillazioni plasma) ma in controfase. Come nel caso precedente possiamo concludere che, a differenza del vuoto, una distribuzione di carica ferma da luogo a campi elettrici longitudinali (generati da cariche elettriche) variabili nel tempo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial}{\partial t} \rho$$

$$\vec{E} = \mu_0 \lambda^2 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{J} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \vec{B} \quad \lambda = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n e^2}}$$

Nel vuoto una corrente stazionaria genera campi magnetici costanti. Cosa succede nel SC?

Piano di corrente stazionaria nel SC

La corrente J induce B (IV-Max). B controinduce J (II-Lon) e rispetto al vuoto B viene smorzato. La propagazione del campo è regolata da

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{\nabla}^2 \vec{B} = -\vec{\nabla}^2 \vec{B} = \mu_0 \vec{\nabla} \wedge \vec{J} = -\frac{1}{\lambda^2} \vec{B}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B} = \frac{1}{\lambda^2} \vec{B} \quad \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} = \frac{1}{\lambda^2} B_z \quad B_z = B_{0z} e^{-\frac{y}{\lambda}}$$

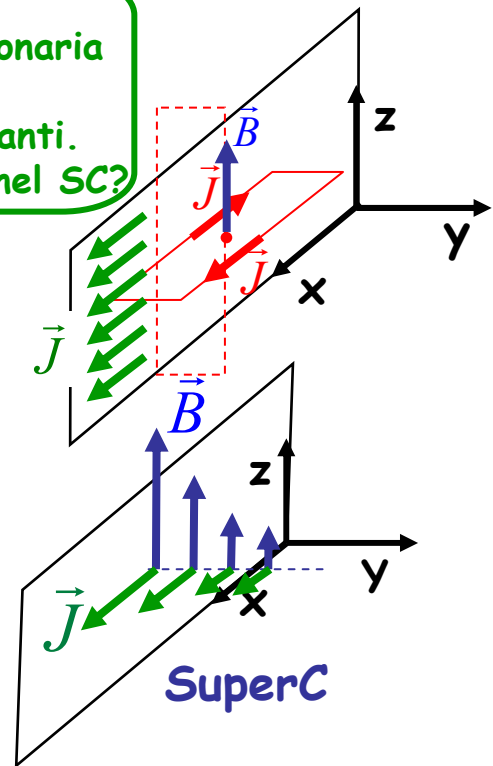
per le correnti invece abbiamo le equazioni

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge (-\lambda \vec{\nabla} \wedge \vec{J}) = -\lambda (\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) - \vec{\nabla}^2 \vec{J}) = \lambda \vec{\nabla}^2 \vec{J} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{J} = \frac{1}{\lambda^2} \vec{J} \quad \frac{\partial^2 J_x}{\partial y^2} = \frac{1}{\lambda^2} J_x \quad J_x = J_{0x} e^{-\frac{y}{\lambda}}$$

B e J sono connessi dalla IV-Max

$$2B_{0z}L = \mu_0 J_{0x}L \quad B_{0z} = \mu_0 \frac{J_{0x}}{2}$$

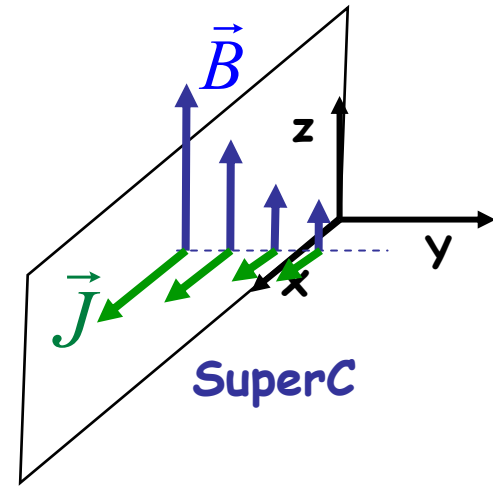


$$\vec{\nabla}^2 \vec{B} = \frac{1}{\lambda^2} \vec{B}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{J} = \frac{\mu_0}{\lambda} \vec{J}$$

$$B_z = \mu_0 \frac{J_{0x}}{2} e^{-\frac{y}{\lambda}}$$

$$J_x = J_{0x} e^{-\frac{y}{\lambda}}$$



il campo magnetico costante e le correnti decadono esponenzialmente mano a mano che si propagano nel superconduttore ($\lambda \sim 2 \times 10^{-5}$ cm) fino ad annullarsi. Si ha una configurazione statica di campo in cui B e J sono perpendicolari ed hanno rapporto dei moduli costante (campi duali come E e B nell'onda elettromagnetica). Se anziché J abbiamo una parete a B definito (come accade quando il SC è immerso in un campo magnetico esterno) otteniamo lo stesse equazioni e quindi spieghiamo l'effetto Meissner. Poiché nel vuoto la stessa distribuzione di correnti darebbe luogo ad un campo magnetico costante ed uniforme in tutto lo spazio concludiamo che il mezzo SC conferisce un raggio finito alla propagazione del campo magnetico costante.

filo rettilineo percorso da corrente costante nel superconduttore

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial}{\partial t} \rho$$

$$\vec{E} = \mu_0 \lambda^2 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{J} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \vec{B} \quad \lambda = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n e^2}}$$

il campo magnetico sulla superficie del filo è diretto lungo $i\varphi$ e vale (legge di ampere)

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r_0}$$

dalla superficie del filo in poi ci si trova dentro il superconduttore con campo magnetico diretto sempre lungo $i\varphi$ e dipendente solo da r .
Abbiamo allora le equazioni

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{J} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \vec{B} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} Br = \mu_0 J \quad -\frac{\partial}{\partial r} J = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} B$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (Br) \right) = \frac{1}{\lambda^2} B \quad r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (Br) \right) = \frac{1}{\lambda^2} (Br) \quad r \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (Br) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (Br) \right) = \frac{1}{\lambda^2} (Br)$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (Br) + \frac{\partial^2}{\partial r^2} (Br) = \frac{1}{\lambda^2} (Br) \quad \frac{\partial^2}{\partial r^2} (Br) \approx \frac{1}{\lambda^2} (Br) \quad Br \approx B_0 r_0 e^{-\frac{r}{\lambda}} \quad B \approx \frac{\mu_0 i}{2\pi r} e^{-\frac{r}{\lambda}}$$

$$\Rightarrow B \approx \frac{\mu_0 i}{2\pi r} e^{-\frac{r}{\lambda}}$$

il campo magnetico nel mezzo conduttore ha la stessa struttura spaziale del campo nel vuoto, cambia solo la dipendenza dalla distanza dal filo che risulta modulata dal fattore di yukawa. Naturalmente anche in questo caso sono presenti correnti di superconduzione parallele al filo con lo stesso andamento spaziale.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial}{\partial t} \rho$$

$$\vec{E} = \mu_0 \lambda^2 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{J} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \vec{B} \quad \lambda = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n e^2}}$$

L' esempio precedente mostra che in un SC B costante si diffonde nel mezzo con un raggio finito. Dato che E-long è stato già studiato, ci domandiamo cosa succede ad un E-trasv costante.

Piano di corrente accelerata nel SC

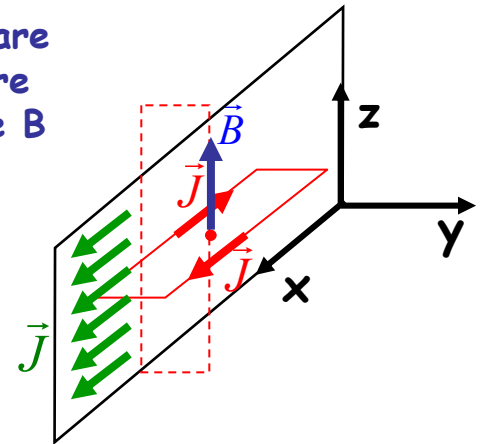
il modo più semplice per avere E-trasv costante è quello di immaginare un piano di corrente uniformemente accelerata. Si ha allora B lineare col tempo (IV-Max) ed E costante (II-Max). Le propagazioni di E e B sono regolate da

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) &= \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}) = \\ &= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{J} = -\frac{1}{\lambda^2} \vec{E} \end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{\nabla}^2 \vec{B} = -\vec{\nabla}^2 \vec{B} = \mu_0 \vec{\nabla} \wedge \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{1}{\lambda^2} \vec{B}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \frac{1}{\lambda^2} \vec{E} \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} E_x = \frac{1}{\lambda^2} E_x \quad E_x = E_{x0} e^{-\frac{y}{\lambda}}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B} = \frac{1}{\lambda^2} \vec{B} \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} B_z = \frac{1}{\lambda^2} B_z \quad B_z = B_{z0} e^{-\frac{y}{\lambda}}$$



il campo B_0 generato dalla distribuzione di corrente si calcola con IV-Max

$$2B_{0z}L = \mu_0 J_{0x}L \quad B_{0z} = \mu_0 \frac{J_{0x}}{2}$$

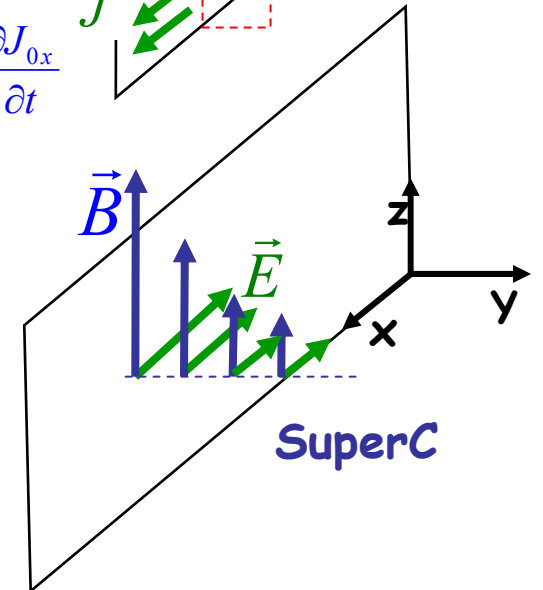
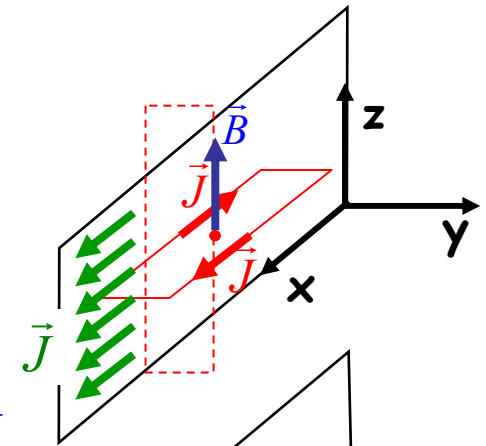
i campi E e B devono poi soddisfare la II-Max

$$-\frac{\partial}{\partial y} E_{0x} e^{-\frac{y}{\lambda}} = -\frac{\partial}{\partial t} \mu_0 \frac{J_{0x}}{2} e^{-\frac{y}{\lambda}} \quad E_{0x} \frac{1}{\lambda} = -\frac{\mu_0}{2} \frac{\partial J_{0x}}{\partial t} \quad E_{0x} = -\frac{\lambda \mu_0}{2} \frac{\partial J_{0x}}{\partial t}$$

abbiamo allora le seguenti equazioni per E e B

$$E_x = -\frac{\lambda \mu_0}{2} \frac{\partial J_{0x}}{\partial t} e^{-\frac{y}{\lambda}}$$

$$B_z = \mu_0 \frac{J_{0x}}{2} e^{-\frac{y}{\lambda}}$$



I campi B ed E -trasv costanti decadono esponenzialmente mano a mano che diffondono nel mezzo SC . I loro moduli hanno un rapporto definito. Tutto va come nel vuoto ad eccezione del termine esponenziale.

Concludiamo quindi che *il mezzo SC conferisce un raggio di propagazione finito ai campi magnetici e elettrici-trasversali costanti*

onde elettromagnetiche piane nel superconduttore

Disaccoppiando le equazioni di Maxwell-London dopo facili passaggi si ottiene

$$\vec{\nabla}^2 \vec{J} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{J} = \frac{1}{\lambda^2} \vec{J} - \vec{\nabla} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = \frac{1}{\lambda^2} \vec{E} + \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{\nabla} \rho$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B} = \frac{1}{\lambda^2} \vec{B}$$

assenza di
carica
elettrica
ed infinita
rigidità del
fluido
carico

Nelle pagine precedenti abbiamo analizzato la propagazione di campi elettrici e magnetici costanti. Lasciamo ora cadere questa limitazione e consideriamo il caso di campi elettrici e magnetici variabili.

$$\vec{\nabla}^2 \vec{J} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{J} = \frac{1}{\lambda^2} \vec{J}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = \frac{1}{\lambda^2} \vec{E}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B} = \frac{1}{\lambda^2} \vec{B}$$

Supponiamo ora di avere, ad un certo tempo, un campo magnetico uniforme sul piano xz diretto lungo z. Essendo tale piano un piano di simmetria sia E che B che J non potranno che dipendere dalla sola variabile Y. Avremo dunque $B_z(y, t)$ ed $E_x(y, t)$ $E_y(y, t)$ $E_z(y, t)$. Dalla III eq. si ha per il campo magnetico

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} B_z - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} B_z = \frac{1}{\lambda^2} B_z$$

siccome siamo interessati a studiare le onde nel superconduttore cerchiamo la soluzione nella forma di una onda progressiva (necessariamente piana data la simmetria del problema)

$$B_z(y,t) = B_{0z} e^{i(ky - \omega t)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} B_z - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} B_z = \frac{1}{\lambda^2} B_z \quad \Rightarrow$$

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{1}{\lambda^2} \quad k = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{\lambda^2}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} k = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{\lambda^2}} & \omega > \frac{1}{\lambda} \\ k = +i \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{\omega^2}{c^2}} & \omega < \frac{1}{\lambda} \end{cases} \quad \Rightarrow$$

si devono evitare le onde divergenti esponenzialmente

$$B_z(y,t) = B_{0z} e^{i(ky - \omega t)} \quad k = \sqrt{\omega^2 / c^2 - 1 / \lambda^2} \quad \omega > c / \lambda$$

$$B_z(y,t) = B_{0z} e^{-ky} e^{-i\omega t} \quad k = \sqrt{1 / \lambda^2 - \omega^2 / c^2} \quad \omega < c / \lambda$$

Nel caso di fenomeni variabili col tempo, la propagazione nel superconduttore (come in qualsiasi altro mezzo), è caratterizzata da due regimi distinti separati da una ben precisa frequenza (frequenza di taglio). Se il segnale possiede una frequenza superiore a quella di taglio allora si propaga liberamente nel mezzo come un'onda piana e progressiva viceversa il segnale decade spazialmente secondo una legge esponenziale e non si ha alcuna propagazione (non si ha infatti la possibilità di mantenere la fase dell'onda costante). Il mezzo si comporta come un filtro passa alto.

attraverso le equazioni di Maxwell possiamo calcolare i campi correlati E e J

k reale o immaginario

$$B_z = B_{0z} e^{i(ky - \omega t)}$$

$$E_{x,y,z} = E_{0x,y,z} e^{i(ky - \omega t)}$$

$$J_{x,y,z} = J_{0x,y,z} e^{i(ky - \omega t)}$$

relazioni analoghe si ottengono per E e J

il campo elettrico deve soddisfare anche l'equazione di Faraday. Tenendo conto che $E = (E_x(y,t), E_y(y,t), E_z(y,t))$ si ha

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}, 0, -\frac{\partial E_x}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y}, 0, -\frac{\partial}{\partial y} E_{0x} e^{i(ky - \omega t)}\right) = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y}, 0, -ik E_{0x} e^{i(ky - \omega t)}\right) =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} (0, 0, B_{0z} e^{i(ky - \omega t)}) = (0, 0, i\omega B_{0z} e^{i(ky - \omega t)}) \implies$$

$E_{0x} = -\frac{\omega}{k} B_{0z}$

$\frac{\partial E_z}{\partial y} = 0$

il campo elettrico è diretto lungo le x negative. I moduli di E_x e B_z sono vincolati. Se k è reale (propagazione libera) E e B sono in fase, se k è immaginario (propagazione smorzata) E e B sono sfasati di 90 gradi.

Dalla legge della divergenza di E si ha inoltre

$$\frac{\partial}{\partial x} E_x + \frac{\partial}{\partial y} E_y + \frac{\partial}{\partial z} E_z = \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$$

lungo y e z possono esistere solo campi uniformi

La corrente J deve soddisfare le relazioni di London (I-Lon)

$$E_x = \mu_0 \lambda^2 \frac{\partial}{\partial t} J_x \quad E_{0x} e^{i(ky - \omega t)} = \mu_0 \lambda^2 \frac{\partial}{\partial t} J_{0x} e^{i(ky - \omega t)} = -i\omega \mu_0 \lambda^2 J_{0x} e^{i(ky - \omega t)}$$

$$E_{0x} = -i\omega \mu_0 \lambda^2 J_{0x} \quad J_{0x} = i \frac{E_{0x}}{\omega \mu_0 \lambda^2}$$

la corrente è sempre sfasata di 90 gradi rispetto al campo elettrico. I moduli di J ed E sono vincolati

Riassumendo abbiamo due differenti situazioni regolate dalla frequenza del campo nel mezzo. Se la frequenza è inferiore a quella di taglio i moduli dei campi sono soggetti ad attenuazione secondo una legge esponenziale e diffondono nel mezzo senza propagazione. Se invece la frequenza è superiore a quella di taglio non si ha alcuna attenuazione dei campi i quali si propagano liberamente nel mezzo. Le caratteristiche dettagliate dei campi e le relative leggi di dispersione sono riportate qui sotto.

frequenza inf a quella di taglio (K im.) frequenza sup a quella di taglio (K re.)

$$B_z = B_{0z} e^{-ky - i\omega t}$$

$$E_x = E_{0x} e^{-ky - i\omega t}$$

$$J_x = J_{0x} e^{-ky - i\omega t}$$

$$E_{0x} = i \frac{\omega}{k} B_{0z}$$

$$J_{0x} = i \frac{E_{0x}}{\omega \mu_0 \lambda^2}$$

$$k = \sqrt{1/\lambda^2 - \omega^2/c^2}$$

□ B E e J **decregono spazialmente secondo una legge esponenziale (assenza di propagazione)**

□ B ed E e la direzione di propagazione sono **mutuamente perpendicolari. J è allineato con E.**

□ B ed E hanno moduli **reciprocamente vincolati e sono sfasati di 90 gradi. J ed E hanno moduli vincolati e sono sfasati di 90 gradi.**

$$B_z = B_{0z} e^{i(ky - \omega t)}$$

$$E_x = E_{0x} e^{i(ky - \omega t)}$$

$$J_x = J_{0x} e^{i(ky - \omega t)}$$

$$E_{0x} = -\frac{\omega}{k} B_{0z}$$

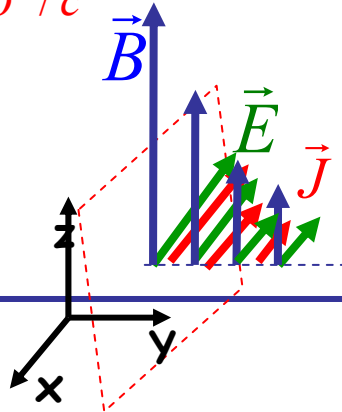
$$J_{0x} = i \frac{E_{0x}}{\omega \mu_0 \lambda^2}$$

$$k = \sqrt{\omega^2/c^2 - 1/\lambda^2}$$

□ B E e J **si propagano nello spazio come onde piane progressive**

□ B ed E e la direzione di propagazione sono **mutuamente perpendicolari. J è allineato con E.**

□ B ed E hanno moduli **reciprocamente vincolati e sono in fase J ed E hanno moduli vincolati e sono sfasati di 90 gradi.**



Interpretazione quantomeccanica

Cosa succede se interpretiamo i risultati ottenuti per l'onda elettromagnetica piana attraverso la meccanica quantica? La meccanica quantica pensa il campo elettromagnetico come formato da un enorme numero di particelle (fotoni) tutte nello stesso stato quantico (insieme di bosoni identici non soggetto alle limitazioni del principio di Pauli). L'energia e l'impulso di ciascun fotone è dato dalle relazioni $E = \hbar\omega$ $\vec{p} = \hbar\vec{k}$

la struttura dei campi elettrici e magnetici di ciascun fotone è identica a quella del campo complessivo ed è quella vista nella pagina precedente. Le relazioni di dispersione di ciascun fotone nei due diversi regimi diventano

$$\omega < 1/\lambda \quad E < mc^2$$

$$k^2 = 1/\lambda^2 - \omega^2/c^2$$

$$p^2/\hbar^2 = 1/\lambda^2 - E^2/(c^2\hbar^2)$$

$$E^2 = -p^2c^2 + (\hbar/c\lambda)^2c^4$$

particella virtuale di massa $m = \hbar/c\lambda$

le espressioni delle onde piane corrispondenti a ciascun fotone diventano

$$B_z = B_{0z} e^{-\frac{i}{\hbar}Et} e^{-\frac{p}{\hbar}y}$$

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{m^2c^4 - E^2}$$

caso statico: fattore esponenziale di yukawa $e^{-\frac{y}{\hbar/mc}}$

$$\omega > 1/\lambda \quad E > mc^2$$

$$k^2 = \omega^2/c^2 - 1/\lambda^2$$

$$p^2/\hbar^2 = E^2/(c^2\hbar^2) - 1/\lambda^2$$

$$E^2 = p^2c^2 + (\hbar/c\lambda)^2c^4$$

particella reale di massa $m = \hbar/c\lambda$

$$B_z = B_{0z} e^{\frac{i}{\hbar}(py-Et)}$$

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{E^2 - m^2c^4}$$

i fotoni nel mezzo equivalgono a particelle massive nel vuoto, W e Z possono essere pensati come fotoni ordinari nel mezzo di higgs o particelle massive nel vuoto

L'onda elettromagnetica si propaga nel mezzo superconduttore mantenendo inalterata la propria struttura. Ciascun quanto dell'onda elettromagnetica può propagarsi secondo due differenti regimi. Se è soddisfatta la relazione $E < mc^2$ (particella virtuale) si ha una attenuazione esponenziale del campo regolata dal fattore di yukawa $\hbar c / \sqrt{m^2 c^4 - E^2}$ e la relazione energia impulso di particella virtuale $E^2 = -p^2 c^2 + m^2 c^4$. Viceversa se è soddisfatta la relazione $E > mc^2$ (particella reale) non si ha attenuazione esponenziale del segnale il quale si propaga liberamente soddisfacendo la relazione energia impulso di particella reale $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$.

La finitezza del raggio d'azione del quanto nel regime virtuale e della massività del quanto nel regime reale sono entrambe l'effetto della massa apparente acquisita da ciascun quanto all'interno del mezzo superconduttore. Il valore di tale massa è determinato oltre che da costanti naturali fondamentali dalle proprietà intrinseche del mezzo $m = \hbar / c\lambda$.

La propagazione dell'onda elettromagnetica nel superconduttore mostra un meccanismo dettagliato in grado di fornire, ad un quanto di massa nulla, una massa apparente con tutte le proprietà cinematiche e dinamiche di una massa reale. Lo stesso meccanismo determina inoltre un raggio d'azione finito del quanto nel regime virtuale (si ricorderà che la base del meccanismo è la relazione di London tra J e B vista a suo tempo).

COMMENTO. Una prima assunzione basilare nell'architettura del modello standard (supportata da una enorme base sperimentale ovviamente) è che i tre campi fondamentali (elettromagnetico, debole, forte) siano vettoriali e regolati da estensioni delle equazioni di Maxwell. Tale schema si adatta perfettamente alla interazione elettromagnetica (ovvio!) ed anche a quella forte (oggi si è capito che i quanti di radiazione di tale interazione sono di massa nulla e raggio d'azione infinito) mentre sembra in totale conflitto con la interazione debole che possiede quanti di radiazione massivi e raggio d'azione finito. Il conflitto viene risolto ammettendo che il vuoto sia in realtà riempito di un mezzo costituito da cariche deboli in regime di superconduzione (campo di Higgs) che attraverso il meccanismo che si è visto (il campo magnetico debole genera una corrente elettrica debole la quale controinduce via legge di Ampere un campo magnetico debole) conferisce una massa apparente ed un raggio d'azione finito ai quanti di radiazione del campo.

Una seconda assunzione basilare nel modello standard (ovviamente supportata dai fatti) è che i quark liberi abbiano masse intrinseche relativamente piccole ($m_u = 4 \text{ MeV}$, $m_d = 8 \text{ MeV}$, simmetria chirale). Tale fatto sembra essere in conflitto con la elevata massa degli adroni ($m_p = 938 \text{ MeV}$). Il conflitto viene risolto ammettendo che coppie q -anti q riempiano il vuoto (condensato, particella sigma) e che gli adroni (dotati di massa intrinseca piuttosto piccola) acquisiscano la loro massa muovendosi in questo mezzo.

Dunque nel modello standard esistono vari tipi di masse. La massa intrinseca posseduta dalle particelle libere del modello la cui origine è incognita. Le masse apparenti acquisite dalle particelle a causa della presenza di un mezzo materiale nel quale si muovono. Un primo meccanismo di generazione della massa apparente è quello di Higgs che conferisce massa ai mediatori della interazione debole. Un secondo meccanismo è basato sulla particella sigma che conferisce la quasi totalità della massa agli adroni (dunque è il principale meccanismo di generazione della massa ordinariamente intesa). Tali meccanismi sono stati creati in analogia (nel caso del meccanismo di Higgs si tratta di identità completa) con il caso del superconduttore che abbiamo esaminato.

Superconduttori bucati: quantizzazione del flusso

Consideriamo un SC come quello della figura immerso in un campo magnetico esterno \vec{B} . E' chiaro che nei punti interni alla cavità quando si considera l'equazione di London (vedi trasparenze precedenti) bisogna prevedere il caso in cui \vec{K} sia non nullo ($\vec{K}=0$ era imposto dall'effetto Meissner).

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{J} + ne^2 / m \vec{B} = \vec{K}$$

$$\vec{\nabla} \wedge (ne / m \vec{p}) + ne^2 / m \vec{B} = \vec{K}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{p} + e \vec{B} = m / ne \vec{K}$$

$$\iint_S \vec{\nabla} \wedge \vec{p} \cdot d\vec{S} + e \iint_S \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \cdot d\vec{S} = m / ne \iint_S \vec{K} \cdot d\vec{S} = \psi$$

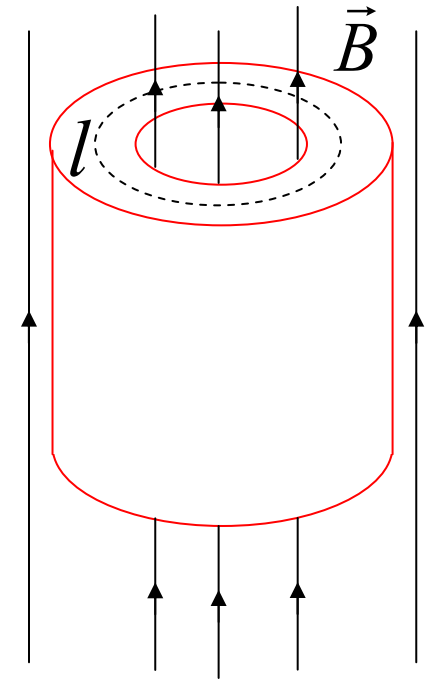
$$\oint_{l_s} (\vec{p} + e\vec{A}) \cdot d\vec{l} = \Psi = nh \quad \text{quantizzazione di Bohr-Sommerfeld}$$

$$\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = nh / e - 1/e \oint_{l_s} \vec{p} \cdot d\vec{l}$$

ora se il percorso d'integrazione l abbraccia la cavità si ha che l'impulso e di conseguenza il suo integrale si annulla (assenza di correnti di superconduzione nei punti interni) e quindi

$$\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = nh / e$$

London-London intuirono che la meccanica quantistica era determinante nella descrizione di un superconduttore, non furono in grado di formulare una teoria quantistica del superconduttore tuttavia, impiegandola nella sua forma più primitiva, predissero questo effetto.

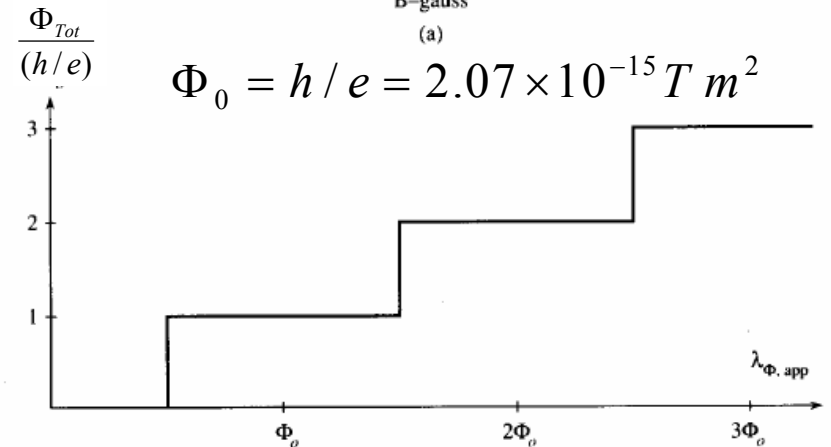
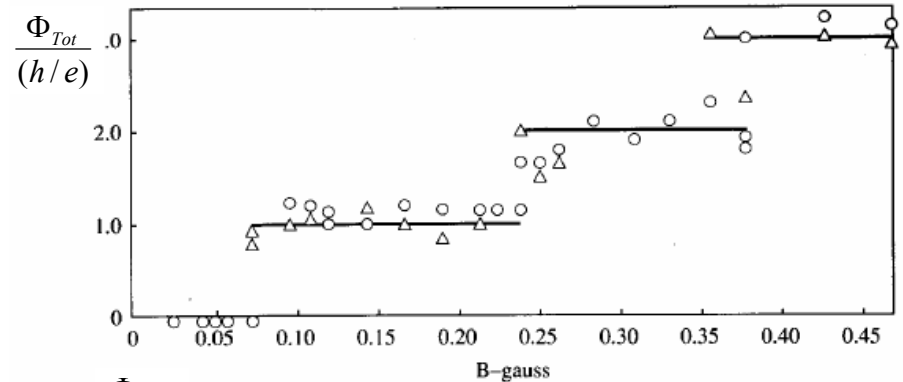


La prova sperimentale

La misura del flusso attraverso un superconduttore forato immerso in un campo magnetico esterno fu compiuta contemporaneamente da Deaver & Fairbank 1961, Stanford University e Doll & Nabauer 1961, Munchen University.

In realtà gli sperimentatori trovarono che i valori di flusso si posizionavano a valori seminteri per cui conclusero che i portatori di carica nella superconduzione avevano carica $2e$! Evidenza sperimentale della esistenza delle coppie di Cooper.

Come avevano intuito London-London i superconduttori sono governati anche dalle leggi quantomeccaniche. I superconduttori quindi costituiscono sistemi fisici macroscopici governati dalle leggi valide nei sistemi microscopici. Per questo motivo vengono utilizzati, oltre che nella costruzione di elettromagneti, nella creazione di dispositivi elettronici basati sulla meccanica quantistica (giunzioni Josephson, squid etc. etc.) e negli esperimenti sui fondamenti della meccanica quantica.



In quanto precede abbiamo assunto come equazioni costitutive di London del mezzo super conduttore la relazione

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{J} = -ne^2 / m \vec{B} + \vec{K}$$

con la condizione aggiuntiva $K=0$ necessaria per descrivere l'effetto Meissner. In realtà London si spinse più avanti osservando che

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{J} = -ne^2 / m \vec{B} = -ne^2 / m \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge (-ne^2 / m \vec{A})$$

da cui

$$\vec{J} = -ne^2 / m \vec{A} + \vec{\nabla} \phi$$

a questo punto scelse una gauge definita (detta gauge di London) ponendo $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ siccome in condizioni stazionarie si deve avere anche $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ otteniamo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -ne^2 / m \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{\nabla}^2 \phi \quad 0 = 0 + \vec{\nabla}^2 \phi \quad \vec{\nabla}^2 \phi = 0$$

London scelse la condizione più restrittiva $\vec{\nabla} \phi = 0$ in modo da ottenere la relazione

$$\vec{J} = -ne^2 / m \vec{A}$$

In questo fu probabilmente guidato dal fatto che in un normale conduttore si ha $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ ovvero una relazione per la densità di corrente J per cui pensò che pure in un super conduttore (σ =infinito, $K=0$) dovesse sussistere una relazione per J . In ogni caso è chiaro nella relazione di London c'è molto di più della semplice ipotesi σ =infinito per cui è lecito domandarsi se in natura non vi siano casi in cui σ =infinito che tuttavia non sottostanno alla equazione di London (esistono nell'effetto Hall quantistico).

NOTA: l'equazione di London contiene alcuni aspetti che devono essere sottolineati. La descrizione delle proprietà elettromagnetiche classiche (non quantistiche) di un superconduttore da un punto di vista logico non richiedono una relazione come quella di London appena esaminata. E' sufficiente la relazione utilizzata nel corso di questo capitolo. Siccome la relazione di London viola in modo evidente l'invarianza di gauge (facendo comparire direttamente il potenziale vettore A e non le sue derivate) mentre la relazione meno restrittiva che abbiamo utilizzato non la viola dobbiamo concludere in ambito classico non si può concludere nulla sulla eventuale violazione della invarianza di gauge in un superconduttore. Informazioni a questo riguardo emergono solo in ambito quantistico. La infatti, a causa delle leggi che regolano la scrittura delle leggi quantiche in campi elettromagnetici (leggi di Aharonov-Bohm), emerge una relazione diretta tra densità di corrente e potenziale vettore

$$\vec{j} = -\frac{ie\hbar}{2m} \left(\Psi \vec{\nabla} \Psi^* - \Psi^* \vec{\nabla} \Psi \right) - \frac{e^2}{m} \Psi^* \Psi \vec{A}$$

dove la funzione d'onda deve soddisfare la equazione di G-L. In un superconduttore del I tipo accade che l'equazione di G-L determina $\Psi = \text{cost}$ il che comporta che J sia allora legato direttamente al potenziale vettore dalla legge di London. *Dunque è solo all'interno della descrizione quantomeccanica della superconduzione che le proprietà della superconduttività si saldano con la rottura della invarianza di gauge.*

Fine

