Esercizi di Calcolo Vettoriale e Cinematica

Esercitazioni di Fisica LA per ingegneri - A.A. 2003-2004

Calcolo vettoriale

Esercizio 1

La proiezioni dei vettori $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ lungo la direzione del vettore $\vec{v}_3$ sono rispettivamente 2 e 3 e il prodotto scalare della somma di $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ con $\vec{v}_3$ vale 30. Calcolare $|\vec{v}_3|$. (R: 6)

Esercizio 2

Verificare che i vettori $\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\imath} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\jmath} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$ e $\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\hat{\imath} + \frac{1}{\sqrt{6}}\hat{\jmath} - \frac{2}{\sqrt{6}}\hat{k}$ sono ortogonali e sono versori; trovarne un terzo che sia versore perpendicolare ad entrambi. (R:$\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\imath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\jmath}$)

Esercizio 3

Dati i vettori $\vec{v}_1 = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$, $\vec{v}_2 = -5\hat{k}$, $\vec{v}_3 = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 3\hat{k}$, calcolare $(2\vec{v}_1) \wedge \left(\frac{1}{5}\vec{v}_2\right) \cdot \vec{v}_1 - (\vec{v}_1 + \vec{v}_3) \cdot \vec{v}_2$. (R: -15)

Esercizio 4

Dati i vettori $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ con $|\vec{v}_1| = 2$ e $|\vec{v}_2| = 3$, determinare $|\vec{v}_3|$ in modo che $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = 0$ essendo $\theta = 60°$ l'angolo fra $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. Calcolare inoltre l'angolo fra $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_3$ e quello fra $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$. (R: $\sqrt{19}$, $143.41°$, $156.59°$)

Cinematica

Esercizio 1

Data la legge oraria: $s(t) = a\,t^3 - b\,t + c$ (con $a = 3\,ms^{-3}$, $b = 2\,ms^{-1}$, $c = 1\,m$) calcolare;

1) la posizione e la velocita' all'istante iniziale ($t = 0s$);

2) a quale istante il punto materiale ha velocitá nulla.

R: $1\,m$, $-2\,m/s$, $0.47\,m/s$

Esercizio 2

Una macchina parte, accelera uniformemente per $20\,s$ con accelerazione costante pari a $a_0 = 0.5\,m/s^2$, quindi viaggia con velocita' costante. Calcolare quanto tempo impieghi per coprire $1\,km$. (R: $110\,s$)

Esercizio 3

Il vettore posizione in funzione del tempo di un punto materiale vincolato a muoversi su un piano é:

$$\vec{r}(t) = (At + B)\hat{\imath} + (Ct^3 - Dt^2)\hat{\jmath}$$

con $B = 3\,m$, $C = 1\,m/s^3$, $D = 2\,m/s^2$. Determinare:

1) il valore di A sapendo che il modulo della velocitá al tempo iniziale $t = 0\,s$ é pari a $v_0 = 4\,m/s$;

2) i vettori velocitá e accelerazione all'istante $t = 10\,s$;

3) l'accelerazione normale (in modulo) a $t = 0\,s$ e a $t = 1\,s$.

R: $4\,m/s$, $56\,m/s^2$, $4\,m/s^2$, $1,94\,m/s^2$

Esercizio 4

Considerare il moto piano: $\vec{r}(t) = ut\,\hat{\imath} + A\cos\omega t\,\hat{\jmath}$. Determinare:

1) l'equazione della traiettoria;

2) le ascisse dei punti corrispondenti al minimo della velocitá;

3) il raggio di curvatura in tali punti.

R: $y = A\cos\frac{\omega\,x}{u}$, $k\frac{u\pi}{\omega}$, $\frac{u^2}{\omega^2 A}$

Esercizio 5

Un punto materiale si muove sulla parabola $y = -Ax^2 + B$ (con $A = 2\,m^{-1}$ e $B = 50\,m$) partendo da terra ($y(0) = 0\,m$). La proiezione del moto lungo l'asse y descrive un moto uniformemente decelerato con $\vec{a} = -a_0\,\hat{\jmath}$, $a_0 = 2\,m/s^2$. Calcolare la velocitá iniziale del corpo. (R: $12.5\,\hat{\imath} + 14.14\,\hat{\jmath}$)

Esercizio 6

Un punto materiale pesante di massa $m = 1.20\,kg$ é vincolato a muoversi nel piano verticale xy lungo una guida priva di attrito. All'istante iniziale si trova nel punto di coordinate $x = 0m$, $y = 1.40\,m$ con velocitá nulla. La guida é tangente all'asse delle ordinate nel punto iniziale. La posizione della particella in funzione del tempo é data dall'espressione: $\vec{r}(t) = (A\omega t - A\sin\omega t)\hat{\imath} + (A + A\cos\omega t)\hat{\jmath}$. Calcolare:

1) il valore delle costanti A e ω;

2) la coordinata x del punto in cui la particella tocca il suolo ($y = 0\,m$), il modulo del vettore velocitá in tale punto ed il tempo necessario a raggiungerlo.

R: $0.70\,m$, $3.74\,s^{-1}$, $2.20\,m$, $5.24\,m/s$, $0.84\,s$

Esercizi d'esame - avanzati

Esercizio 1

Un punto materiale, sul piano cartesiano, segue la traiettoria $y = Ax + B$ con $A = 5$ e $B = -2\,m$. Sapendo che la legge oraria espressa come spostamento sulla traiettoria in funzione del tempo (nel semipiano delle ascisse positive)é $s(t) = kt^2$ con $k = 2\,m/s^2$ e avendo scelto $s(0) = 0$ in corrispondenza del punto $P : (0, B)$ determinare la legge oraria in forma cartesiana.
(*Parziale 07/02/2003* R:$\vec{r}(t) = 0.392\,t^2\,\hat{\imath} + (1.961\,t^2 - 2)\hat{\jmath}$)

Esercizio 2

Un punto materiale si muove con un'accelerazione $\vec{a}(t) = A\exp(-kt)\hat{\imath} + B\hat{\jmath}$ essendo $A = -2\,m/s^2$, $k = 1\,s^{-1}$, $B = -9.8\,m/s^2$. Determinare l'equazione della traiettoria sapendo che il corpo parte con velocitá $\vec{v}(0) = (2\hat{\imath})m/s$ dal punto $\vec{r}(0) = 1000\hat{\jmath}\,m$. Determinare inoltre il raggio di curvatura a $t = 0$.
(*Parziale 07/02/2003* R1: $y = -4.9\,[\ln(1 - 0.5\,x)]^2 + 1000$, R2: $R = 4.082\,10^{-1}m$)

Esercizio 3

Due vettori di modulo rispettivamente $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ formano un angolo di $\theta = \pi/6\,rad$. Trovare il modulo del vettore $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Trovare inoltre il seno dell'angolo φ compreso tra i vettori $\vec{a}$ e $\vec{c}$.
(*Parziale 07/02/2003* R1: $|\vec{c}| = \sqrt{13}$, R2: $\sin\varphi = \sqrt{3/52}$)

Esercizio 4

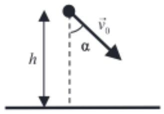
Un punto materiale è vincolato a muoversi senza attrito lungo una guida rettilinea. Al tempo $t = 0$ il punto materiale si trova in quiete nell'origine scelta. Se il punto accelera con accelerazione $a(t) = kt$, dove $k = 2\,m/s^2$, trovare la velocità e lo spazio percorso in funzione del tempo.
(*Parziale 07/02/2003* R1: $v(t) = t^2\,m/s$, R2: $s(t) = 1/3\,t^3\,m$)

Esercizio 5

Un punto materiale si muove su di una traiettoria circolare di raggio $r = 2\,m$ con la legge oraria $s(t) = kt^2$, con $k = 2\,m/s^2$. Calcolare la componente tangenziale e la componente normale dell'accelerazione in funzione del tempo.
(*Parziale 07/02/2003* R1: $a_t = 4\,m/s^2$, R2: $a_n = 8t^2\,m/s^2$)

Esercizio 6

Le equazioni parametriche cartesiane del moto di un punto materiale sono: $x = k_1 - k_2\cos\omega t$, $y = k_3 + k_4\sin\omega t$, con $k_1 = 2\,m$, $k_2 = 3\,m$, $k_3 = 4\,m$, $k_4 = 5\,m$, $\omega = 10\,s^{-1}$. Determinare l'equazione della traiettoria.
(*Totale 28/03/2003* R: $k_4^2(x - k_1)^2 + k_2^2(y - k_3)^2 = k_2^2 k_4^2$)



Esercizio 7

Un grave (vedi figura sopra) si trova ad un certo istante alla quota $h = 11\,m$ rispetto alla superficie terrestre, con velocità di modulo $v_0 = 10\,m/s$ e direzione che forma un angolo $\alpha = 30°$ rispetto alla verticale discendente. Calcolare il raggio di curvatura della traiettoria in tale istante (si prenda $g = 9.81\,m/s^2$).
(*Totale 28/03/2003* R: $r_c = 20.38\,m$)

Esercizio 8

Il moto di un punto materiale vincolato su un piano verticale xy é descritto dall'equazione $\vec{r}(t) = \{R[\cos(\alpha_0 - \omega\,t) + \omega\,t] + x_0\}\,\hat{i} + R[\sin(\alpha_0 - \omega\,t) + 1]\,\hat{j}$ in cui $R = \sqrt{\xi}\,m$ e $\omega = \frac{10\,\pi}{\xi}\,s^{-1}$. Calcolare:

1) le costanti α_0 ed x_0 in modo che a $t = \xi/20\,s$ il punto passi per l'origine;
2) il raggio di curvatura della traiettoria nell'istante in cui é massima la distanza del punto dalla retta $y = 0\,m$.

(*Totale 19/06/2003* R1: $\alpha_0 = 2(k+1)\pi$, R2: $x_0 = -\pi\sqrt{\xi}/2$, R3: $r_c = 4\sqrt{xi}$)

Esercizio 9

Il moto di un punto materiale é descritto dall'equazione $y = a\,x^2$. Sapendo che il punto materiale parte da $P(-2\,m, 4a\,m)$ con una velocitá, in modulo, pari a $v_0 = \frac{\xi}{100}\,m/s$ e che il raggio di curvatura della traiettoria, nel punto $x = 0$, é uguale a $R = \sqrt{\xi}\,m$ calcolare a e la componente della velocitá del punto lungo x.
(*Totale 01/07/2003* R1: $a = 1/2\sqrt{\xi}$, R2: $v_x = \sqrt{\xi^3 \cdot 10^{-4}/(\xi + 4)}$)

Esercizio 10

Un punto materiale viene lanciato dalla superficie terrestre con velocità $v_0 = 100\,m/s$, a un angolo di $\theta = (9\xi/100)°$ rispetto alla verticale. Calcolare il raggio di curvatura del punto materiale subito dopo il lancio.
(*Totale 19/09/2003* R1: $r_c = v_0^2/[g\sin(9\xi/100)]$)

Esercizio 11

Le equazioni del moto in forma cartesiana per un proiettile sono date da $\ddot{x} = -k\dot{x}$ e $\ddot{y} = -g$ essendo $k = \xi \cdot 10^{-4}\,s^{-1}$ e g l'accelerazione di gravitá. Sapendo che il proiettile parte dal suolo ($x(0) = 0\,m$ ed $y(0) = 0\,m$) con una velocitá in modulo pari a $v_0 = 10\sqrt{2}\,m/s$ inclinata di 45° rispetto a terra scrivere l'equazione della traiettoria in forma implicita e determinare il raggio di curvatura della stessa nel punto di massima distanza da terra.
(*Totale 15/12/2003* R1: $y = -g/2k^2\ln^2(1 - kx/\alpha) - \alpha/k\ln(1 - kx/\alpha)$, R2: $r_c = \alpha^2\exp(-2k\alpha/g)/g$)